Universität Regensburg

Die Milnor-Vermutung

Oberseminar Arithmetische Geometrie
Sommersemester 2010

Ziel dieses Oberseminars ist es, Voevodskys Beweis [10] des folgenden Theorems zu verstehen:

Theorem. *Sei k ein Körper der Charakteristik* $\mathrm{char}(k) \neq 2$, *und sei n eine nichtnegative ganze Zahl. Dann ist der Normresthomomorphismus*

$$K_n^M(k)/2 \to H^n_{ét}(k, \mu_2^{\otimes n})$$

ein Isomorphismus.

Dieser Satz war von Milnor 1970 vermutet worden. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage ist die so genannte *Bloch-Kato-Vermutung*, die mittlerweile auch als bewiesen gilt:

Vermutung. *Sei k ein beliebiger Körper, n eine nichtnegative ganze Zahl und m eine positive ganze Zahl, die nicht durch* $\mathrm{char}(k)$ *teilbar ist. Dann ist der Normresthomomorphismus*

$$K_n^M(k)/m \to H^n_{ét}(k, \mu_m^{\otimes n})$$

ein Isomorphismus.

Diese Vermutung ist für $n = 0$ und $n = 1$ trivialerweise bzw. wegen Hilberts Satz 90 erfüllt. Der Fall $n = 2$ wurde 1982 von Merkurjev und Suslin bewiesen, später fanden Merkurjev, Suslin und Rost Beweise für die Milnor-Vermutung im Falle $n \leq 4$.

Der volle Beweis der Milnor-Vermutung erfolgte 1996 durch Voevodsky, basierend auf einer Idee von Beilinson und Lichtenbaum, den Normresthomomorphismus als Vergleich zweier verschiedener Kohomologietheorien aufzufassen.

Voevodsky definierte für eine algebraische Varietät X über k und zwei ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ eine Kohomologiegruppe $H^{p,q}(X, \mathbb{Z})$. Diese *motivische Kohomologie* für algebraische Varietäten bildet ein Analogon zur singuläre Kohomologie für CW-Komplexe. Darüber hinaus übertrug er weitere Ideen aus der Topologie in die Welt der algebraischen Geometrie: Zusammen mit Morel entwickelte er eine *motivische Homotopietheorie*, die viele Eigenschaften der Homotopietheorie von CW-Komplexen aufweist. Die Liste der Konstruktionen, die Analoga zu entsprechende Theorien in der algebraischen Topologie darstellen, ließe sich fortsetzen. Mit Hilfe dieser Ideen gelang es Voevodsky schließlich, den Beweis der Milnor-Vermutung zu vollenden.

In diesem Oberseminar werden wir nach einem kurzen Überblick über wichtige Konstruktionen der homologischen Algebra (Vortrag 2) zunächst grundlegende Eigenschaften der motivischen Kohomologie studieren (Vorträge 3–5). Dabei ist es notwendig, zunächst den Blickwinkel zu erweitern und die Kategorie der glatten Schemata (über k) per Darstellungsfunktor in die Kategorie der Garben in der Nisnevich-Topologie einzubetten. Davon ausgehend lassen sich effektive motivische Komplexe und schließlich auch die motivische Kohomologie definieren.

Anschließend wenden wir uns dem Beweis der Milnor-Vermutung zu. Wir werden sehen, dass die Milnor-Vermutung aus einer verallgemeinerten Version von Hilberts Satz 90, nämlich dem Verschwinden einer bestimmten Kohomologiegruppe, folgt (Vortrag 6). In den Vorträgen 7–9 wird dann die Grundlage für den Beweis gelegt, der schlussendlich in Vortrag 10 per Induktion vollzogen wird.

Programm

Die Hauptreferenz für den eigentlichen Beweis ist natürlich [10]; daneben finden sich die meisten Argumente in gleicher oder leicht abgewandelter Form auch in Voevodskys erstem Beweis ([9]) sowie den beiden Papers [3] und [5], die einen guten Überblick über die Ideen in letzterem Beweis liefern und einige Aspekte auch verständlicher erläutern.

Voevodskys Beweis funktioniert über weite Teile auch im Fall $\ell \neq 2$ und ist daher in dem Paper auch allgemeiner angelegt. Wo es die Argumentation vereinfacht, sollte immer $\ell = 2$ angenommen werden. Dies gilt insbesondere in §5 von [10].

Da der Beweis und insbesondere die zugrunde liegende Theorie sehr umfassend und die Anzahl der Vorträge einigermaßen gering ist, kann nicht jedes Thema in der ihm gebührenden Tiefe abgehandelt werden; einige nicht unbedeutende Konstruktionen müssen sogar als Black Boxes angenommen werden, wie zum Beispiel die Kohomologieoperationen Q_i oder das Rost-Motiv. Nichtsdestotrotz sollten die Lücken nicht wesentlich für das Verständnis des Beweises sein und vielleicht sogar zum weiteren Studium der Materie anregen.

1 Einführungsvortrag *22.4.2010*

2 Derivierte und triangulierte Kategorien *29.4.2010*

Man gebe einen Überblick über wichtige Begriffe und Konstruktionen der homologischen Algebra: Definition des Begriffs der triangulierten Kategorie ([13, 10.2.1] oder [2, IV.1.1], mit der Homotopiekategorie einer additiven Kategorie als Beispiel ([13, 10.1 & 10.2.4] oder [2, IV.1.9]). Lokalisierung einer triangulierten Kategorie ([13, 10.3.1 & 10.3.7] oder [2, III.2.8 & IV.2.2]); derivierte Kategorien als Beispiel ([13, 10.4.3 & 10.4.4] oder [2, III.2.1 & IV.4.2]). Derivierte Funktoren ([13, 10.5] oder [2, III.6.2 & III.6.6]); totales Tensorprodukt ([13, 10.6.3] oder [2, Ex. III.7.6]).

3 (Prä-)Garben mit Transfer und $DM_-^{eff}(k)$ *6.5.2010*

Man definiere zunächst den Begriff der Nisnevich-Topologie (am besten in der Version von [6, S. 95]). Dann führe man endliche Korrespondenzen und die zugehörige Kategorie $SmCor(k)$ ein ([12, Chapter 5, S.190 oben] oder [8, S.8]). Anschließend behandle man [12, Chapter 5, §3.1]; Proposition 3.1.11 kann ausgelassen werden und direkt Theorem 3.1.12 ohne Beweis dargestellt werden, da der Begriff der Prätheorie ohnehin nicht weiter behandelt wird. Man ergänze allerdings letzteren Satz um die Aussage von [12, Chapter 3, 4.1.8]. Zum Schluss definiere man $DM_-^{eff}(k)$. Als zusätzliche Quellen können [8, §1] und [4, Lectures 1, 2] dienen.

4 Tensorstruktur auf $DM_-^{eff}(k)$ und grundlegende Eigenschaften *20.5.2010*

[12], Chapter 5, §3.2 bis vor Theorem 3.2.6: Für eine Prägarbe mit Transfer F definiere man den zugehörigen singulären simplizialen Komplex $\underline{C}_*(F)$. Mit dessen Hilfe lässt sich $DM_-^{eff}(k)$ als Lokalisierung von $D^-(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ nach schwachen Äquivalenzen aufzufassen und eine Tensorstruktur auf $DM_-^{eff}(k)$ definieren. Weitere Quellen sind [8], 1.12–2.8 sowie [4, Lecture 14]. Dann gebe man eine kurze Aufstellung der wichtigsten Eigenschaften ([4, 14.5] oder [12, S.194] (ohne gm) oder [8, §4]).

5 Motivische Kohomologie und Milnor K-Gruppen *27.5.2010*

[8] §3: Die motivische Kohomologie wird eingeführt: motivische Komplexe $\mathbb{Z}(n)$ und motivische Kohomologie, erste Eigenschaften. Besonders wichtig ist die Verbindung zur Milnor-K-Theorie in Theorem 3.4. Als zusätzliche Literatur sei [4], Lectures 3 bis 5, erwähnt.

6 Hilbert 90 impliziert Milnor *10.6.2010*

[10], §6: Die Bedingung $H_L^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$ für jeden Körper k bezeichnet man mit $H90(n, l)$. Dieser Vortrag zeigt, wie diese Bedingung die Bloch-Kato-Vermutung für n und ℓ impliziert.

[1, 1.1] verwende man ohne Beweis, Theorem 6.5 kann man streichen, da es für uns ohne Belang ist. Falls genügend Zeit ist, kann man den Beweis von Lemma 6.8 durch [4], 14.21–14.24 vervollständigen.

Die nun folgenden Vorträge dienen dem Ziel, $H90(n, 2)$ für alle $n \geq 0$ zu zeigen. Sie bilden das eigentliche Herzstück des Beweises von Voevodsky.

7 Motivische Homotopietheorie und Reinheitssatz *17.6.2010*

Man definiere simpliziale Garben ([6, S.47]) und danach die motivischen Homotopiekategorien $\mathcal{H}(k)$ und $\mathcal{H}_\bullet(k)$ ([9, S. 26–27]). Das Smash-Produkt zweier punktierter simplizialer Garben entnehme man [6, S.82]. Mehr als die Definition interessieren uns der Zusammenhang zur motivischen Kohomologie, der in [11, Theoreme 2.1 & 2.4] erläutert wird, und auch der Reinheitssatz [6, 2.23, S.115], den wir ohne Beweis zitieren. Danach zeige man [10], 2.1–2.4.

8 Die Gradfunktion *24.6.2010*

[10], §2, 2.5–2.11: Hauptaufgabe dieses Vortrages ist es, für jedes rein d-dimensionale glatte projektive Schema X über einem Körper k eine Gradfunktion $H^{2d,d}(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ zu konstruieren.

9 Motivische Margolis-Homologie *1.7.2010*

[10], §3 + §9: Analog zu entsprechenden Konstruktionen in der algebraischen Topologie gibt es in der mod 2 motivischen Kohomologie Operationen Q_i mit der Eigenschaft $Q_i^2 = 0$. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich die so genannte Margolis-Homologie definieren. Entscheidend für den letzten Vortrag ist ihr Verschwinden [10, 3.8] unter geeigneten Voraussetzungen.

Die Existenz der Q_i und die in [11, 13.4–13.6] gezeigten Eigenschaften setze man dabei als Black Box voraus.

10 Norm-Quadriken *8.7.2010*

[10], §4: In diesem Abschnitt werden die Norm-Quadriken eingeführt und einige ihrer Milnor-K-Gruppen und motivischen Kohomologiegruppen berechnet (4.1 und 4.9). Wichtig für die folgende Argumentation ist auch das Rost-Motiv (4.3); allerdings ist dessen Konstruktion (siehe [7]) wahrscheinlich zu lang für den Vortrag. Da außerdem die Verbindung von $DM_-^{eff}(k)$ zur (und die Definition der) Kategorie der Chow-Motive nicht eingeführt wurde, formuliere man 4.3 am besten direkt in $DM_-^{eff}(k)$ (vgl. [3, 8.1], dort wird auch die Konstruktionsidee skizziert). Auch Theorem 4.10 verwende man ohne Beweis.

11 Beweis der Milnor-Vermutung *15.7.2010*

[10], §§ 5 und 7 bis einschließlich 7.5: §5 legt mit Theorem 5.9 eine der Grundlagen für den Induktionsbeweis der Milnorvermutung in §7, in dem auch die Hauptergebnisse der letzten drei Vorträge zusammenlaufen.

In §5 nehme man dabei $\ell = 2$ an und kürze den Beweis von 5.2 wie in 5.5 beschrieben ab.

12 Programmdiskussion *22.7.2010*

Universität Regensburg

Literatur

[1] Thomas Geisser and Marc Levine. The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky. *J. Reine Angew. Math.*, 530:55–103, 2001.

[2] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Translated from the 1988 Russian original.

[3] Bruno Kahn. La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky). *Astérisque*, (245):Exp. No. 834, 5, 379–418, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.

[4] Carlo Mazza, Vladimir Voevodsky, and Charles Weibel. *Lecture notes on motivic cohomology*, volume 2 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[5] F. Morel. Voevodsky's proof of Milnor's conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 35(2):123–143, 1998.

[6] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90):45–143 (2001), 1999.

[7] Markus Rost. The motive of a Pfister form. Preprint, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rost/motive.html, 1998.

[8] Andrei Suslin and Vladimir Voevodsky. Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 548 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 117–189. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[9] Vladimir Voevodsky. The Milnor Conjecture. Preprint, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/, 1996.

[10] Vladimir Voevodsky. Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98):59–104, 2003.

[11] Vladimir Voevodsky. Reduced power operations in motivic cohomology. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98):1–57, 2003.

[12] Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, and Eric M. Friedlander. *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[13] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.