Kohomologie von Schemata

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Wintersemester 2009/10

Inhaltsverzeichnis

1 Differentiale

Sei A ein Ring, B eine A-Algebra und M ein B-Modul.

Definition 1.1 Eine A-Derivation von B nach M ist eine Abbildung

$$D: \ B \ \to \ M$$

die A-linear ist und für die die Leibniz-Regel gilt:

$$D(bb') \ = \ b'D(b) + bD(b') \tag{6.1}$$

Lemma/Definition 1.2 Es gibt einen B-Modul $\Omega^1_{B/A}$, den Modul der (relativen) (Kähler-) Differentiale von B über A, und eine Derivation

$$d \ : \ B \ \to \ \Omega^1_{B/A}\,,$$

die universell für alle A-Derivationen in B-Moduln ist: Ist $D : B \to M$ eine A-Derivation, so gibt es genau einen B-Modul-Homomorphismus $\varphi : \Omega^1_{B/A} \to M$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1_{B/A} \arrow[dd, dashed, "\exists!\,\varphi"] \\ B \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Konstruktion: Setze

$$\Omega^1_{B/A} = \Big\{\text{freier } B \text{ Modul über Symbolen } \tilde{d}b, b \in B\Big\} /N$$

wobei N der Untermodul ist, der von allen Elementen

$$\begin{gathered} \tilde{d}(b+b') - \tilde{d}b - \tilde{d}b' \\ \tilde{d}(bb') - b'\tilde{d}b - b\tilde{d}b' \\ \tilde{d}a \end{gathered}$$

für $b, b' \in B$ und $a \in A$ erzeugt wird. Definiere $d : B \to \Omega^1_{B/A}$ durch

$$d(b) = \ \text{Klasse von } \tilde{d}b$$

Lemma 1.3 Sei $B = A[X_i \mid i \in I]$ ein Polynomring, in beliebig vielen Variablen X_i. Dann ist $\Omega^1_{B/A}$ ein freier A-Modul mit Basis $dX_i, i \in I$.

Beweis Offenbar sind die dX_i Erzeugende, wie man durch Induktion beweist:

$$d(\prod_i X_i^{n_i}) \;=\; \sum_i n_i \prod_{\substack{j\\ j\neq i}} X_j^{n_j} X_i^{n_i-1} dX_i\,.$$

Angenommen, $\sum P_i dX_i = 0$ mit $P_i \in B$. Die formale partielle Ableitung

$$\begin{array}{rrcl} \frac{\partial}{\partial X_i}: & B & \to & B \\ & \prod_j X_j^{n_j} & \mapsto & n_i X_i^{n_i-1} \prod_{\substack{j\\ j\neq i}} X_j^{n_j} \end{array}$$

ist eine Derivation; es gibt also einen B-Modulhomomorphismus

$$\varphi_i:\; \Omega^1_{B/A} \;\to\; B$$

mit $\varphi_i(dX_j) = \frac{\partial X_j}{\partial X_i} = \delta_{ij}$. Angewendet auf $\sum P_j dX_j$ folgt $P_i = 0$, für alle i.

Bemerkung 1.4 Für ein Polynom P folgt noch die Regel

$$dP \;=\; \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i\,,$$

wie es sein soll.

Proposition 1.5 Sei $\mu : B \otimes_A B \to B$ definiert durch $\mu(b \otimes b') = b \cdot b'$ und $I = \ker(\mu)$. Betrachte $B \otimes_A B$ als B-Modul über die Multiplikation von *links*, und I/I^2 als B-Modul durch die induzierte Struktur. Sei

$$\begin{array}{rrcl} d: & B & \to & I/I^2 \\ & b & \mapsto & 1\otimes b - b \otimes 1 \quad \mathrm{mod}\ I^2\,. \end{array}$$

Dann ist $(I/I^2, d)$ isomorph zu $(\Omega^1_{B/A}, d)$.

Beweis: (a) d ist Derivation: selbst.

(b) Wir erhalten einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \Omega^1_{B/A} & \to & I/I^2 \\ & db & \mapsto & 1\otimes b - b\otimes 1 \end{array}$$

(c) In $B \otimes_A B$ gilt $x \otimes y = xy \otimes 1 + x(1 \otimes y - y \otimes 1)$, also wird I als B-Modul von Elementen der Form db erzeugt.

(d) Sei M ein beliebiger B-Modul. Dann kann man auf der abelschen Gruppe $B \oplus M$ eine Ring-Struktur definieren durch

$$(b, m)(b', m') \;=\; (bb', bm' + b'm)$$

(selbst); dieser Ring sei mit $B * M$ bezeichnet. Die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \pi: & B * M & \to & B \\ & (b,m) & \mapsto & b \end{array}$$

ist ein surjektiver Ring-Homomorphismus; der Kern ist M, und als Ideal ist $M^2 = 0$.

In unserer Situation ist $B * M$ auch eine A-Algebra (sogar eine B-Algebra durch den Schnitt $s : B \to B * M, b \mapsto (b, 0)$), von π.

Sei nun $D : B \to M$ eine A-Derivation. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \psi: & B \otimes_A B & \to & B * M \\ & b \otimes b' & \mapsto & (bb', bD(b')) \end{array}$$

ein wohldefinierter Ringhomomorphismus:

$$b_1 b_2 \otimes b_1' b_2' \mapsto (b_1 b_2 b_1' b_2', b_1 b_2 D(b_1' b_2')) = (b_1 b_2 b_1' b_2', b_1 b_2 (b_2' D(b_1') + b_1' D(b_2'))$$

$$= (b_1 b_1', b_1 D(b_1')) \cdot (b_2 b_2', b_2 D(b_2'))\,.$$

Wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} B \otimes AB \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mu"'] & B * M \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, phantom, "="] & B \end{tikzcd}$$

ist $\psi(I) \subseteq M$, und wegen $M^2 = 0$ ist $\psi(I^2) = 0$. Wir erhalten also einen wohldefinierten B-Modul-Homomorphismus

$$\overline{\psi}: \; I/I^2 \; \to \; M\,,$$

der $1 \otimes b - b \otimes 1 \bmod I^2$ auf $D(b)$ schickt, also mit den Derivationen vertauscht. Angewandt auf $M = \Omega^1_{B/A}$ erhalten wir eine Umkehrabbildung für φ.

Proposition 1.6 (a) Ist A' eine A-Algebra, so ist

$$\Omega^1_{B \otimes_A A'/A'} \;\cong\; \Omega^1_{B/A} \otimes_A A' \;\cong\; \Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \quad \text{,wobei } B' = B \otimes_A A'\,.$$

(b) Ist $S \subseteq B$ eine multiplikative Teilmenge, so ist

$$\Omega^1_{S^{-1}B/A} \;\cong\; S^{-1}\Omega^1_{B/A}\,.$$

Beweis: selbst (folgt aus den universellen Eigenschaften).

Satz 1.7 (1. fundamentale Sequenz) Ist C eine B-Algebra, so hat man eine exakte Sequenz

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \stackrel{\alpha}{\to} \Omega^1_{C/A} \stackrel{\beta}{\to} \Omega^1_{C/B} \to 0$$

Beweis Es sei $\alpha(db \otimes c) = cdb$ und $\beta(c_1 dc_2) = c_1 dc_2$; dann sind diese Homomorphismen wohldefiniert, und es ist β surjektiv und $\beta\alpha = 0$. Für die Exaktheit in der Mitte genügt es zu zeigen, dass für jeden C-Modul M die Sequenz

(1.7.1) $$Hom_C(\Omega^1_{C/B}, M) \;\to\; Hom_C(\Omega^1_{C/A}, M) \;\to\; Hom_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M)$$

exakt ist(universelle Eigenschaft des Kokerns von α). Nach den universellen Eigenschaften identifiziert sich (1.7.1) mit der Sequenz

$$(1.7.2) \qquad Der_B(C,M) \to Der_A(C,M) \to Der_A(B,A) = Hom_B(\Omega^1_{B/A}, M)$$

die nach Definition exakt ist (Eine A-Derivation d ist genau dann eine B-Derivation, wenn $db = 0$ für alle $b \in B$).

Satz 1.8 (2. fundamentale Sequenz) Sei J ein Ideal von B und $C = B/J$. Dann gibt es eine exakte Sequenz von C-Moduln

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \to 0$$

wobei $\delta(b \mod J^2) = db \otimes 1$ für $b \in J$.

Beweis: (a) Für $b \in B$ und $b' \in J$ ist $d(bb') = b'db + bdb'$. Daher ist $b' \mapsto db' \otimes 1$ B-linear und bildet J^2 auf 0 ab.

(b) Offenbar ist α surjektiv und $\alpha\delta = 0$. Es genügt also, für jeden C-Modul M die Exaktheit von

$$Hom_C(\Omega^1_{C/A}, M) \to Hom_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M) \to Hom_C(J/J^2, M)$$

zu zeigen. Aber diese Sequenz identifiziert sich mit

$$Der_A(C,M) \to Der_A(B,M) \to Hom_B(J,M)$$

wobei die zweite Abbildung D auf $D|_J$ abbildet. Diese Sequenz ist offenbar exakt.

Corollar 1.9 Ist B eine endlich erzeugte A-Algebra oder eine Lokalisierung davon, so ist $\Omega^1_{B/A}$ endlich erzeugt.

Beweis Ist $B = A[X_1, \ldots, X_n]/J$, so ist nach 1.3

$$B^n \cong \Omega^1_{A[X_1,\ldots,X_n]/A} \otimes B \twoheadrightarrow \Omega^1_{B/A},$$

und der zweite Fall folgt mit 1.6 (b).

Beispiel 1.10 Sei $L = K(\alpha)/K$ eine Körpererweiterung, die durch ein Element erzeugt wird.

(1) α ist transzendent über K, d.h., $L \cong K(t) = \alpha \mapsto t(K[t] \smallsetminus \{0\})^{-1}K[t]$. Nach 1.3 und 1.6 (b) ist dann

$$\Omega^1_{L/K} = (K[t] \smallsetminus \{0\})^{-1}K[\alpha]d\alpha = Ld\alpha$$

eindimensional über L.

(2) α ist algebraisch über K. Sei $f(x)$ das Minimalpolynom von α über K. Dann ist $L \cong a \mapsto \overline{x}K[x]/ < f(x) >$. Nach der 2. fundamentalen Sequenz haben wir eine exakte Sequenz

$$< f(x) > / < f(x)^2 > \to K[x]/ < f(x) > \cong L\,dx \to \Omega^1_{L/K} \to 0$$

$$\begin{aligned} f(x) \mapsto \ df &= f'(x) \mod < f(x) > dx \\ &= f'(\alpha)dx \in Ldx \end{aligned}$$

(2a) Ist α separabel über K, so ist $f'(\alpha) \neq 0$ und daher

$$\Omega^1_{L/K} \;=\; 0\,.$$

(2b) Ist α nicht separabel über K, so ist $f'(x) \equiv 0$ und

$$\Omega^1_{L/K} \;=\; Ld\alpha\,.$$

(3) **Zusatz:** Ist α separabel über K und ist $A \subseteq K$ ein Unterring, so ist

$$\Omega^1_{K/A} \otimes L \;\tilde{\to}\; \Omega^1_{L/A}\,.$$

Denn: wir wissen bereits die Surjektivität (nach (2a)) und müssen zeigen, dass für jeden L-Modul M die Ableitung

$$Der_A(L,M) \;\to\; Der_A(K,M)$$

surjektiv ist. Dies folgt aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & Der_K(K[x],M) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & D \text{ bestimmt durch } DX \in M \arrow[r, mapsto] & (f \mapsto f'(\alpha)\cdot Dx) \\
Der_A(L,M) \arrow[r] & Der_A(K[x],M) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{K[x]}(< f >, M) & \\
 & Der_A(K,M) & &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten.

Corollar 1.11 Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch und separabel, wenn $\Omega^1_{L/K} = 0$.

Beweis Für $\alpha \in L$ haben wir die 1. fundamentale Sequenz

$$\Omega^1_{K(\alpha)/K} \otimes L \;\to\; \Omega^1_{L/K} \;\to\; \Omega^1_{L/K(\alpha)} \;\to\; 0\,.$$

Ist nun L endlich erzeugt über K (als Körper) und $\Omega^1_{L/K} = 0$, so folgt induktiv, dass $L/K(\alpha)$ endlich separabel ist, und dass die erste Abbildung ein Isomorphismus ist, also $\Omega^1_{K(\alpha)/K} = 0$. (Zusatz zu 1.10), also auch $K(\alpha)/K$ separabel. Die Umkehrung folgt noch leichter.

Ist L beliebig erzeugt, so ist $L = UL_i$, L_i endlich erzeugt, und

$$\Omega^1_{L/K} \;=\; \varinjlim_i \Omega^1_{L_i/K}\,,$$

und die Behauptung folgt für L aus dem Fall der endlich erzeugten L_i.

Satz 1.12 Sei k ein Körper und A eine lokale k-Algebra und der Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$ isomorph zu k. Dann ist die Abbildung

$$\delta:\; \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \;\to\; \Omega^1_{A/k} \otimes_A k$$

aus der 2. fundamentalen Sequenz 1.8 ein Isomorphismus.

Beweis Nach 1.8 ist $Coker(\delta) = \Omega^1_{k/k} = 0$, also δ surjektiv. Für die Injektivität von δ genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{tikzcd}
Hom_k(\Omega^1_{A/k} \otimes_A k, k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k) & D/\mathfrak{m} \\
Der_k(A, K) \arrow[ur] & & D \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

der Dualräume surjektiv ist. Sei $f : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ gegeben, und $\pi : A \to k$ die Projektion, so dass $a - \pi(a) \in \mathfrak{m}$ für alle $a \in A$. Definiere

$$\begin{array}{rccl} D: & A & \to & k \\ & a & \mapsto & f(a - \pi a \mod \mathfrak{m}^2)\,. \end{array}$$

Dann ist D eine k-Derivation: Die Additivität ist klar, und für die Leibnizregel haben wir:

$$\begin{aligned} aa' \mapsto f(aa' - \pi(aa') \mod \mathfrak{m}^2) &= f(a'(a - \pi(a)) + a(a' - \pi(a'))) \\ &-(a - \pi(a))(a' - \pi(a')) \mod \mathfrak{m}^2) = a'D(a) + aD(a')\,. \end{aligned}$$

Weiter ist $D|_k = 0$ (also D k-linear) und $D|_{\mathfrak{m}} = f$.

Definition 1.13 Sei L/K eine Körpererweiterung.

(a) Eine Transzendenzbasis $(x_i)_{i \in I}$ von L/K heißt separierend, wenn $L/K(x_i/i \in I)$ separabel ist.

(b) L/K heißt separabel (erzeugt), wenn es eine separierende Transzendenzbasis gibt.

Bemerkung 1.14 Ist K vollkommen, so ist jede endlich erzeugte Körpererweiterung L/K separabel erzeugt (s. Zariski-Samuel 'Commutative Algebra, Vol 1, S. 105).

Proposition 1.15 Sei L/K eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Dann ist L/K genau dann separabel erzeugt, wenn gilt

$$\dim_L \Omega^1_{L/K} \;=\; tr.gr_K L\,.$$

Zusatz: Sind in diesem Fall $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$, so dass $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n$ eine Basis von $\Omega^1_{L/K}$ bilden, so ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine separierende Transzendenzbasis von L/K.

Beweis Ist L separabel algebraische Erweiterung von $K(X_1, \ldots, X_n)$, so ist $tr.\deg_K L = n$ und nach 1.11 und 1.10 (3) ist

$$\Omega^1_{L/K} \;\cong\; \Omega^1_{K(X_1,\ldots,X_n)/K} \otimes_{K(X_1,\ldots,X_n)} L \;\cong\; L^n\,,$$

wobei der letzte Isomorphismus nach 1.3 und 1,6 (b) gilt. Gilt die Gleichheit, so gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$, so dass $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n$ eine Basis von $\Omega^1_{L/K}$ bilden. Sei $L_0 = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Wegen der exakten Sequenz

$$\Omega^1_{L_0/K} \otimes_{L_0} L \;\to\; \Omega^1_{L/K} \;\to\; \Omega^1_{L/L_0} \;\to\; 0$$

ist $\Omega^1_{L/L_0} = 0$, nach 1.11 also L/L_0 separabel algebraisch. Wegen $tr.\deg_K L = n$ müssen also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ transzendent über K sein.

Satz 1.16 Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, A eine endlich erzeugt k-Algebra und $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dann sind äquivalent:

(a) $A_\mathfrak{m}$ ist regulär.

(b) $\Omega^1_{A/k} \otimes_A A_\mathfrak{m} = \Omega^1_{A_\mathfrak{m}/k}$ ist frei vom Rang $\dim A_\mathfrak{m}$ ($= \dim A$, falls A irreduzibel ist).

Beweis Gilt (b), so ist nach 1.12 $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 A_\mathfrak{m} = \dim A_\mathfrak{m}$, also (a) nach Definition der Regularität. Umgekehrt folgt aus (a) mit 1.12 $\dim_k(\Omega^1_{A_\mathfrak{m}/k} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k) = r := \dim A_\mathfrak{m}$. Andererseits sei $K = Quot(A_\mathfrak{m})$. Dann ist nach 1.6 (b)

$$\Omega^1_{A_\mathfrak{m}/k} \otimes_{A_\mathfrak{m}} K \;=\; \Omega^1_{K/k}$$

und dies hat nach 1.14 und 1.15 die Dimension $tr.gr_k K = \dim A' = \dim A_\mathfrak{m} = r$ für die (integre) irreduzible Komponente $\mathrm{Spec}(A')$ von $\mathrm{Spec}(A)$, in der $\mathfrak{m}$ liegt (Alg. Geo I, Proposition 7.10). Nun folgt die Behauptung aus

Lemma 1.17 Sei A ein lokaler Integritätsring mit Restklassenkörper k und Quotientenkörper K. Ist M ein endlich erzeugter A-Modul mit

$$\dim_k M \otimes_A k \;=\; r \;=\; \dim_K M \otimes_A K\,,$$

so ist M frei vom Rang r.

Beweis Ist $\dim_k M \otimes_A k = r$, so hat M nach dem Nakayama-Lemma r Erzeugende $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$, und wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \;\to\; N \;\to\; A^r \;\twoheadrightarrow\; M \;\to\; 0\,.$$

Beim Tensorieren mit K bleibt diese Sequenz exakt; es folgt $N \otimes_A K = 0$, also $N = 0$, da N torsionsfrei ist.

Definition 1.18 Sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata, und sei $\Delta_X : X \to X \times_S X$ die Diagonale (definiert durch die beiden Komponentabbildungen (id_X, id_X) und die universelle Eigenschaft des Faserprodukts). Dies ist eine abgeschlossene Immersion in ein offenes Unterschema W von $X \times_S X$ (siehe Lemma 2.3 unten); sei $J \subseteq \mathcal{O}_W$ die zugehörige Idealgarbe. Setze dann

$$\Omega^1_{X/S} \;:=\; \Delta_X^*(J/J^2)\,;$$

dies ist die Garbe der relativen (Kähler)-Differentiale von X über S.

Bemerkungen 1.19 (a) Sind $U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq S$ und $V = \mathrm{Spec}\, B \subseteq X$ offen affin mit $f(V) \subseteq V$, so ist offenbar $J/J^2 = \widetilde{I/I^2}$ für $I = Ker(B \otimes_A B \to B)$, betrachtet als $B \otimes_A B/I$ Modul bzw. $\mathcal{O}_X$-Modul; nach 1.5 gilt also $\Omega^1_{X/S|V} \cong \widetilde{\Omega^1_{B/A}}$.

(b) Die lokalen Differentiale verkleben sich zu einer $\mathcal{O}_S$-Derivation $d : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/S}$.

Aus den bisherigen Ergebnissen für den affinen Fall und Bemerkung 1.19 ergeben sich sofort die folgenden Resultate.

Proposition 1.20 (a) Ist $S' \to S$ ein Morphismus, so ist

$$\Omega^1_{X\times_S S'/S'} \;\cong\; p_1^*\Omega^1_{X/S}\,,$$

wobei $p_1 : X \times_S S' \to X$ die erste Projektion ist.

(b) Ist $U \subseteq X$ offen, so ist

$$\Omega^1_{U/S} \;=\; \Omega^1_{X/S|_U}\,.$$

Satz 1.21 (1. fundamentale Sequenz) Für Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ von Schemata hat man eine kanonische exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \;\to\; \Omega^1_{X/Z} \;\to\; \Omega^1_{X/Y} \;\to\; 0$$

Satz 1.22 (3. fundamentale Sequenz) Ist $i : Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion, mit Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$, so hat man eine exakte Sequenz

$$J/J^2 \;\to\; i^*\Omega^1_{X/S} \;\to\; \Omega^1_{Z/S} \;\to\; 0\,.$$

Beispiel 1.23 Ist $X = \mathbb{A}^n_S$, so ist $\Omega^1_{X/S}$ freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang n, mit Basis $dx_1, \ldots, dx_n$.

Satz 1.24 Sei A ein Ring. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \;\to\; \Omega^1_{\mathbb{P}^n_A/A} \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(-1)^{n+1} \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A} \;\to\; 0\,.$$

Beweis Sei $R = A[X_0, \ldots, X_n]$. Definiere den Morphismus graduierter R-Moduln

$$\begin{aligned} \varphi :\quad E := \bigoplus_{i=0}^{n} R(-1)e_i \;&\to\; R \\ e_i \;&\mapsto\; X_i \end{aligned}$$

und setze $M = \ker\varphi$. Da φ surjektiv in Graden ≥ 1 ist, erhalten wir eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln, $X = \mathbb{P}^n_A$

$$0 \;\to\; \tilde{M} \;\to\; \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_X(-1)e_i \;\xrightarrow{\tilde{\varphi}}\; \mathcal{O}_X \;\to\; 0\,.$$

über $D_+(X_i)$ haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \;\to\; M_{X_i} \;\to\; E_{X_i} \;\to\; R_{X_i} \;\to\; 0\,,$$

wobei M_{X_i} freier R_{X_i}-Modul vom Rang n ist, mit Basis $\{e_j - \frac{X_j}{X_i}e_i \mid j \neq i\}$, also $\Gamma(D_+(X_i), \tilde{M})$ freier $R_{(X_i)} = \Gamma(D_+(X_i), \mathcal{O}_X)$-Modul mit Basis $\{\frac{1}{X_i}e_j - \frac{X_j}{X_i^2}e_i \mid j \neq i\}$. Definiere

$$\begin{aligned} \varphi_i :\quad \Omega^1_{X/A|_{D_+(X_i)}} \;&\xrightarrow{\sim}\; \tilde{M}|_{D_+(X_i)} \\ d\tfrac{X_j}{X_i} \;&\mapsto\; \tfrac{1}{X_i^2}(X_ie_j - X_je_i) \quad (j \neq i) \end{aligned}$$

Diese Isomorphismen verkleben sich: auf $D_+(X_i) \cap D_+(X_k)$ ist $\frac{X_j}{X_k} = \frac{X_i}{X_k}\frac{X_j}{X_i}$, also

$$d\left(\frac{X_j}{X_k}\right) - \frac{X_j}{X_i} d\left(\frac{X_i}{X_k}\right) = \frac{X_i}{X_k} d\left(\frac{X_j}{X_i}\right)$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi_k \text{ (linke Seite)} &= \tfrac{1}{X_k^2}(X_k e_j - X_j e_k - \tfrac{X_j}{X_i}(X_k e_i - X_i e_k)) \\
&= \tfrac{1}{X_k^2}(X_k e_j - \tfrac{X_j}{X_i} X_k e_i)\,, \\
\varphi_i \text{ (rechte Seite)} &= \tfrac{X_i}{X_k}\tfrac{1}{X_i^2}(X_i e_j - X_j e_i)\,,
\end{aligned}$$

was übereinstimmt.

2 Separierte und eigentliche Morphismen

Vorbemerkung: Ein topologischer Raum X ist genau dann separiert (d.h., ein Hausdorff-Raum), wenn die Diagonale $\Delta \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist. Schemata sind selten Hausdorff-Räume, aber die folgende Definition ist der passende Ersatz (Man beachte aber, dass der unterliegende Raum eines Faserprodukts $X \times_Y X$ von Schemata *nicht* das topologische Faserprodukt ist).

Definition 2.1 (a) Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt **separiert**, wenn der Diagonalen-Morphismus

$$\Delta = \Delta_{X/Y} : \ X \hookrightarrow \ X \times_Y X$$

(vergleiche 1.18) eine abgeschlossene Immersion ist. Man sagt dann auch X ist separiert über Y oder X ist ein separiertes Y-Schema (dabei denkt man sich den Strukturmorphismus $f : X \to Y$ als gegeben)

(b) Ein Schema X heißt separiert, wenn es separiert über $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ist (bezüglich des eindeutigen Schemamorphismus $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$).

Lemma 2.2 Jeder Morphismus $f : X \to Y$ von affinen Schemata ist separiert. Insbesondere ist jedes affine Schema separiert.

Beweis Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $Y = \mathrm{Spec}(B)$ und entspricht f dem Ringhomomorphismus $B \to A$, so entspricht $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ dem Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_B A & \to & A \\ a_1 \otimes a_2 & \mapsto & a_1 a_2 \,. \end{array}$$

Dieser ist surjektiv, liefert also eine abgeschlossene Immersion.

Lemma 2.3 Für einen beliebigen Morphismus $f : X \to Y$ ist $\Delta : X \to X \times_Y X$ immer eine Immersion, d.h., eine Komposition $X \xrightarrow{i} W \xrightarrow{j} X \times_S X$, wobei j eine offene und i eine abgeschlossene Immersion ist.

Beweis Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine affine offene Umgebung $U \subseteq X$ für die $f(U)$ in einer affinen offenen Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(x)$ enthalten ist. Es ist dann $U \times_V U \subseteq X \times_Y X$ eine affine offene Umgebung von $\Delta(x)$, und die Einschränkung

$$\Delta|_U \ : \ U \ \to \ U \times_V U \,. \tag{2.3.1}$$

ist nach 2.2 eine abgeschlossene Immersion. Dann ist die Vereinigung W der Mengen $U \times_V U$ für alle $x \in X$ offen in $X \times_Y X$, und wir erhalten eine Faktorisierung

$$\Delta \ : \ X \overset{i}{\hookrightarrow} W \overset{j}{\hookrightarrow} X \times_Y X \,.$$

Hierbei ist i eine abgeschlossene Immersion (beachte (2.3.1) und dass $\Delta^{-1}(U \times_V U) = U$), und die Behauptung folgt.

Corollar 2.4 Ein Morphismus $X \to Y$ ist genau dann separiert, wenn die Menge $\Delta(X) \subseteq X \times_Y X$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Beweis Eine Immersion $i : Z \hookrightarrow X$ ist genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn $i(Z)$ abgeschlossen in X ist, wie leicht aus den Definitionen folgt.

Wir haben das folgende Kriterium:

Proposition 2.5 Sei X ein Schema. Dann sind äquivalent:

(i) X ist separiert.

(ii) Für je zwei affine offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ ist $U \cap V$ affin, und der kanonische Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \ \rightarrow \ \mathcal{O}_X(U \cap V)$$

ist surjektiv.

(iii) Es gibt eine affine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X derart, dass für alle i, j die Menge $U_i \cap U_j$ affin ist und der Morphismus

$$\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(U_j) \ \rightarrow \ \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

surjektiv ist.

Beweis Sei $\Delta : X \rightarrow X \times_{\mathbb{Z}} X$ die Diagonale (hier steht $X \times_A Y$ für $X \times_{\mathrm{Spec}(A)} Y$ falls A ein Ring ist). Dann gilt für offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ immer

$$U \cap V \ = \ \Delta^{-1}(U \times_{\mathbb{Z}} V)$$

(siehe Alg. Geo. II 5.A.3). Sind U und V affin (also $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(U))$, entsprechend für V), und ist $U \cap V$ affin, so entspricht

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \ \rightarrow \ \mathcal{O}_X(U \cap V) \tag{2.5.1}$$

dem Morphismus von affinen Schemata

$$\Delta \ : \ U \cap V \ \rightarrow \ U \times_{\mathbb{Z}} V \,, \tag{2.5.2}$$

der durch die Restriktion von Δ gegeben ist. Hiermit schließen wir nun wie folgt.

Ist X separiert, so ist Δ eine abgeschlossene Immersion. In der Situation von (ii) ist dann $U \times_{\mathbb{Z}} V$ affin, (2.5.2) abgeschlossene Immersion und daher (2.5.1) surjektiv. Also gilt (ii). Aus (ii) folgt trivialerweise (iii). Aus (iii) folgt, dass die Einschränkung

$$\Delta^{-1}(U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j) \ \rightarrow \ U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j$$

für alle i, j eine abgeschlossene Immersion ist. Da $(U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j)_{i,j}$ eine Überdeckung von $X \times_{\mathbb{Z}} X$ ist, folgt dass Δ abgeschlossene Immersion ist, also (i).

Corollar 2.6 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ ist separiert.

Beweis Die affine offene Überdeckung $(D_+(X_0), \ldots, D_+(X_n))$ erfüllt die Bedingungen von 2.5 (iii): $D_+(X_i) \cap D_+(X_j) \ = \ D_+(X_i X_j)$ ist wieder affin, und man zeigt leicht, dass mit $P := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ jeder Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_P(D_+(X_i)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_P(D_+(X_j)) \ \rightarrow \ \mathcal{O}_P(D_+(X_i X_j))$$

surjektiv ist (betrachte Monome in $\mathcal{O}_P(D_+(X_iX_j)) = \{\frac{F}{(X_iX_j)^m} \mid n \in \mathbb{N}, F \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad $2n\}$.

Wir haben die folgenden Eigenschaften von separierten Morphismen.

Proposition 2.7 (a) Offene und abgeschlossene Immersionen sind separiert.

(b) Die Komposition von separierten Morphismen ist wieder separiert.

(c) Basiswechsel von separierten Morphismen sind wieder separiert.

(d) Sind $X \to Z$ und $Y \to Z$ separiert, so auch das Faserprodukt $X \times_Z Y \to Z$.

(e) Betrachte ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z. & \end{tikzcd}$$

Ist gf separiert, so auch f (Insbesondere ist jeder Morphismus von separierten Z-Schemata wieder separiert).

(f) Sei Y ein separiertes Z-Schema. Sind X_1, X_2 sind Y-Schemata, so ist der kanonische Morphismus

$$X_1 \times_Y X_2 \ \to \ X_1 \times_Z X_2$$

eine abgeschlossene Immersion.

Beweis (a): $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ ist ein Isomorphismus, falls $X \hookrightarrow Y$ offene oder abgeschlossene Immersion ist (Ist $U \subseteq Y$ offen, so ist $U \times_Y U = U \cap U = U$; für abgeschlossene Immersionen folgt die Behauptung aus der Isomorphie $R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{a} \cong R/\mathfrak{a}$ für einen Ring R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$).

(b): Für Morphismen $X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z$ faktorisiert der Diagonal-Morphismus $\Delta_{X/Z} : X \to X \times_Z X$ in der Form

$$X \stackrel{\Delta_{X/Y}}{\longrightarrow} X \times_Y X = X \times_Y Y \times_Y X \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} X \times_Y (Y \times_Z Y) \times_Y X = X \times_Z X\,,$$

wobei $\alpha = id_X \times \Delta_{Y/Z} \times id_X$ durch Funktorialität des Faserprodukts gewonnen wird. Nun sind abgeschlossene Immersionen (genauer: die Eigenschaft, eine abgeschlossene Version zu sein) stabil unter Komposition und Basiswechsel, das heißt:

(2.7.1) Sind $X \stackrel{i_1}{\to} Y \stackrel{i_2}{\to} Z$ zwei abgeschlossene Immersionen, so ist $i_2 i_1$ abgeschlossene Immersion.

(2.7.2) Ist $X \stackrel{i}{\to} Y$ eine abgeschlossene Immersion und $f : Y' \to Y$ ein weiterer Morphismus, so ist in dem kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

auch der Morphismus i' (der sogenannte Basiswechsel von i mit f) eine abgeschlossene Immersion.

Dies folgt leicht aus den Definitionen. Aus (2.7.2) folgt wiederum

(2.7.3) Ist T ein Schema und $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion von T-Schemata, so ist für jedes T-Schema Z der induzierte Morphismus

$$i \times id_Z : \ X \times_T Z \ \to \ Y \times_T Z$$

eine abgeschlossene Immersion.

Betrachte nämlich (2.7.2) für $Y' = Y \times_T Z \to Y$; dann identifiziert sich der Basiswechsel

$$X \times_T Z = X \times_Y (Y \times_T Z) \ \xrightarrow{i'} \ Y \times_T Z$$

mit $i \times id_Z$.

Sind nun oben $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ beide separiert, so sind $\Delta_{X/Y}$ und $\Delta_{Y/Z}$ abgeschlossene Immersionen, also auch α nach (2.7.3), also $\Delta_{X/Z} = \alpha\Delta_{X/Y}$ nach (2.7.1), d.h., gf ist separiert.

(c): Sei $X \to Y$ separiert und $Y' \to Y$ ein Morphismus. Wir wollen zeigen, dass der Basiswechsel

$$X' = X \times_Y Y' \ \to \ Y'$$

von $X \to Y$ mit $Y' \to Y$ separiert ist. Aber $\Delta_{X'/Y'}$ identifiziert sich mit dem Morphismus

$$\Delta_{X/Y} \times id_{Y'} : \ X \times_Y Y' \ \to \ (X \times_Y X) \times_Y Y' = (X \times_Y Y') \times_{Y'} (X \times_Y Y)$$

der nach (2.7.3) eine abgeschlossene Immersion ist.

(d) Seien $X \to Z$ und $Y \to Z$ separiert. Der Morphismus $X \times_Z Y \to Z$ ist die Komposition

$$X \times_Z Y \ \to \ Y \ \to \ Z\,,$$

und daher separiert nach (b) und (c).

(e) Aus $gf : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"'] \arrow[dr, "\Delta_{X/Z}"] & \\
X \times_Y X \arrow[r, "h"] & X \times_Z X\,,
\end{tikzcd}$$

wobei h der offensichtliche Morphismus ist ($h = id_X \times id_X$). Es folgt $\Delta_{X/Y}(X) \subseteq h^{-1}(\Delta_{X/Z}(X))$. Wir zeigen die umgekehrte Inklusion (hieraus folgt die Abgeschlossenheit von $\Delta_{X/Y}(X)$, also die Separiertheit von f (Corollar 2.4), da $\Delta_{X/Z}(X)$ wegen der Separiertheit von gf abgeschlossen ist).

Sei $s \in h^{-1}(\Delta_{X/Z}(X))$, sei $x \in X$ mit $h(s) = \Delta_{X/Z}(x)$, und sei $t = \Delta_{X/Y}(X)$. Seien $U \subseteq X, V \subseteq Y$ und $W \subseteq Z$ affine offene Mengen mit $x \in U, f(x) \in V$ und $gf(x) \in W$ sowie $f(U) \subseteq V$ und $g(V) \subseteq W$. Dann sind $s, t \in U \times_V U \subseteq X \times_y X$, und

$$h|_{U \times_V U} : \ U \times_V U \ \to \ U \times_W U$$

ist eine abgeschlossene Immersion, da U, V, W affin sind (explizite Beschreibung des Faserprodukts). Damit ist diese Einschränkung injektiv, und es folgt $s = t$ wegen $h(s) = h(t)$.

(f) Der betrachtete Morphismus $X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times_Z X_2$ identifiziert sich mit

$$id_{X_1} \times \Delta_{Y/Z} \times id_{X_2} : \; X_1 \times_Y Y \times_Y X_2 \;\to\; X_1 \times_Y (Y \times_Z Y) \times_Y X_2 \,,$$

der wegen der Separiertheit von $Y \to Z$ und (2.7.3) eine abgeschlossene Immersion ist.

Corollar 2.8 Jeder projektive Morphismus ist separiert.

Beweis Wir haben nach (unserer) Definition eine Faktorisierung $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_Y \overset{p}{\to} Y$, wobei i eine abgeschlossene Immersion und p die kanonische Projektion ist. Nach Corollar 2.6 ist $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ separiert, nach 2.7 (c) also auch der Basiswechsel $\mathbb{P}^n_Y \overset{p}{\to} Y$. Weiter ist i nach 2.7 (a) separiert, also pi nach 2.7 (b).

Unser Separiertheitsbegriff hat ähnliche Konsequenzen wie in der Topologie:

Proposition 2.9 Sei S ein Schema, X ein reduziertes S-Schema und Y ein separiertes S-Schema. Stimmen zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ auf einer dichten offenen Teilmenge $U \subseteq X$ überein, so gilt $f = g$.

Beweis Sei $\Delta = \Delta_{Y/S} : Y \to Y \times_S Y$ und $h = (f, g) : X \to X \times_S Y$. Dann ist $(f, f) = \Delta \circ f : X \to Y \times_S Y$. Nach Voraussetzung ist $h|_U = \Delta \circ f|_U$, so dass $U \subseteq h^{-1}(\Delta(Y))$. Da $\Delta(Y)$ abgeschlossen ist (wegen der Separiertheit von Y über S) und U dicht in X ist, folgt $h(X) \subseteq \Delta(Y)$. Es folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ (da $pr_1 f = pr_2 g$), also Gleichheit der stetigen Abbildungen.

Wir zeigen nun $f = g$ als Morphismen. Durch Betrachtung affiner Überdeckungen sind ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec}(A)$ und $Y = \operatorname{Spec}(B)$ affin. Seien $\varphi, \psi : B \to A$ die Ringhomomorphismen zu f und g. Sei $b \in B$ und $a = \varphi(b) - \psi(b)$. Es folgt $a|_U = 0$ in $\mathcal{O}_X(U)$, d.h., $U \subseteq V(a)$ ($a \in \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in U$). Da U dicht in X ist, folgt $V(a) = \operatorname{Spec}(A)$ und daher $a \in Rad(A) =$ Nilradikal von A. Da A nach Voraussetzung reduziert ist, folgt $a = 0$, d.h., $\varphi(b) = \psi(b)$. Da b beliebig war, folgt $\varphi = \psi$, d.h., $f = g$.

Bemerkung 2.10 Proposition 2.9 wird falsch, wenn $Y \to S$ nicht separiert oder X nicht reduziert ist.

Für Schemata gibt es, wie in der Topologie, auch den Begriff von eigentlichen Morphismen. Dieser wird wieder in Analogie gebildet.

Definition 2.11 Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

(a) f heißt **abgeschlossen**, wenn f abgeschlossene Mengen in X auf abgeschlossene Mengen in Y abbildet.

(b) f heißt **universell abgeschlossen**, wenn jeder Basiswechsel von f (d.h., $X \times_Y Y' \to Y'$ für jedes Y-Schema $Y' \to Y$) abgeschlossen ist.

Definition 2.12 Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **eigentlich**, wenn gilt

(a) f ist von endlichem Typ.

(b) f ist separiert.

(c) f ist universell abgeschlossen.

Analog zu Proposition 2.7 studieren wir Eigenschaften von eigentlichen Morphismen. Hierzu zunächst

Lemma 2.13 Sei $\mathcal{P}$ eine Klasse von Morphismen von Schemata. Es gelte

(1) $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter Komposition (für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ mit f und g in $\mathcal{P}$ liegt auch gf in $\mathcal{P}$).

(2) $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter Basiswechsel (für $f : X \to Y$ in $\mathcal{P}$ und jeden Morphismus $g : Y' \to Y$ liegt der Basiswechsel $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ von f mit g in $\mathcal{P}$).

Dann ist $\mathcal{P}$ abgeschlossen unter Faserprodukt (für $X \to S$ und $Y \to S$ in $\mathcal{P}$ liegt auch $X \times_S Y \to S$ in $\mathcal{P}$). Weiter gilt für einen Morphismus $f : X \to Y$ von S-Schemata und ein weiteres S-Schema T : Liegt f in $\mathcal{P}$, so auch $f \times id_Z : X \times_S Z \to Y \times_S Z$.

Es gelte zusätzlich

(3) Alle abgeschlossenen Immersionen liegen in $\mathcal{P}$.

Für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

gilt dann: Liegt gf in $\mathcal{P}$ und ist g separiert, so liegt f in $\mathcal{P}$.

Beweis Die erste Behauptung folgt wie im Beweis von 2.7. (d), mittels der Faktorisierung

$$X \times_S Y \to Y \to S .$$

Die zweite Behauptung folgt genauso, wie (2.7.3) aus (2.7.2) folgt.

Für die letzte Behauptung benutzen wir die Faktorisierung

$$f : X \overset{(id_X, f)}{\longrightarrow} X \times_Z Y \overset{pr_2}{\longrightarrow} Y .$$

Hier ist nach (2) die zweite Projektion pr_2 in $\mathcal{P}$, als Basiswechsel von $X \to Z$. Andererseits ist der Morphismus (i_X, f) eine abgeschlossene Immersion (Anwendung von 2.7 (f) auf die Y-Schemata $X_1 = X$ und $X_2 = Y$ liefert, dass $X = X \times_Y Y \to X \times_Z Y$ eine abgeschlossene Immersion ist, wenn $Y \to Z$ separiert ist). Aus (1) und (3) folgt nun, dass $f = pr_2 \circ (id_X, f)$ in $\mathcal{P}$ ist.

Proposition 2.14 Die Eigenschaft, ein Morphismus (lokal) von endlichem Typ zu sein (Alg. Geo II, 2.5 und 2.6), ist stabil unter Komposition und Basiswechsel. Abgeschlossene Immersionen sind vom endlichem Typ.

Beweis Die Verträglichkeit mit Komposition folgt sofort aus den Definitionen, denn für Ringhomomorphismen $A \to B \to C$ ist C von endlichem Typ über A, wenn dies für B/A und C/B gilt, und außerdem ist die Komposition von quasi-kompakten Morphismen offenbar quasi-kompakt (nach dem Kriterium Alg. Geo. II, 2.4 (c)). Die Verträglichkeit mit Basiswechsel ist ebenfalls leicht: Für 'lokal von endlichem Typ' folgt dies aus der Tatsache, dass für $A \to B$ von endlichem Typ und beliebiges $A \to A'$ offenbar auch $A' \to B \otimes_A A'$ von endlichem Typ ist (betrachte einen Epimorphismus $A[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow B$). Für 'von endlichem Typ' ist zu zeigen:

Lemma 2.15 Ist $f : X \to Y$ ein quasi-kompakter Morphismus von Schemata, so für jeden Morphismus $g : Y' \to Y$ auch der Basiswechsel $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ von f mit g.

Beweis Sei $y' \in Y', y \in Y$ das Bild von y', $V \subseteq Y$ eine affine offene Umgebung von y und $V' \subseteq Y'$ eine affine offene Umgebung von y' mit $g(V') \subseteq V$. Es genügt zu zeigen, dass $(f')^{-1}(V')$ quasi-kompakt ist. Also sind ohne Einschränkung Y und Y' affin. Dann ist X endliche Vereinigung von affinen offenen Mengen $X_1, \ldots, X_n$, und $X \times_Y Y'$ endliche Vereinigung der affinen Mengen $X_i \times_Y Y'$.

Proposition 2.16 (a) Abgeschlossene Immersionen sind eigentlich.

(b) Komposition von eigentlichen Morphismen sind eigentlich.

(c) Basiswechsel von eigentlichen Morphismen sind eigentlich.

(d) Sind $X \to Z$ und $Y \to Z$ eigentlich, so auch $X \times_Z Y \to Z$.

(e) Ist in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

gf eigentlich und g separiert, so ist f eigentlich.

Beweis (a) folgt aus 2.14, 2.7 (a) und (2.7.2). (b) und (c) folgen aus 2.14 und 2.7 (b) und (c) (die Bedingungen für die universelle Abgeschlossenheit sind klar). Dann folgen (d) und (e) aus Lemma 2.13.

Der folgende Satz liefert eine wichtige Klasse von eigentlichen Morphismen.

Satz 2.17 Jeder projektive Morphismus ist eigentlich.

Beweis Nach unserer Definition hat ein projektiver Morphismus eine Faktorisierung

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_Y \overset{p}{\to} Y$$

mit einer abgeschlossenen Immersion i und dem kanonischen Morphismus p. Wegen 2.16 (a), (b) und (c) genügt es zu zeigen, dass der Morphismus $\pi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ eigentlich ist. Wir wissen schon, dass π von endlichem Typ ist (nach Konstruktion) und separiert (Corollar 2.6). Wir haben noch zu zeigen, dass π universell abgeschlossen ist, d.h., dass $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ für jedes Schema abgeschlossen ist. Diese Frage ist lokal in Y; wir können also annehmen, dass $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist.

Sei $B = A[X_0, \dots, X_n]$, und sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n_A$ eine abgeschlossene Teilmenge. Nach Definition ist $Z = V_+(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subset B$. Wir wollen zeigen, dass $Y - \pi(V_+(I))$ offen ist. Sei $y \in Y$. Es ist

$$\pi^{-1}(y) = \mathbb{P}^n_A \times_A k(y) = \mathbb{P}^n_{k(y)} = Proj(k(y)[X_0, \dots, X_n]),$$

und nach dem folgenden Lemma ist

$$\pi^{-1}(y) \cap V_+(I) = V_+(I \otimes_A k(y)) \subseteq \mathbb{P}^n_{k(y)},$$

denn wir können $\pi^{-1}(y) \cap V_+(I)$ mit $Proj(B/I) \times_A k(y)$ identifizieren und $V_+(I \otimes_A k(y))$ mit $Proj(B/I \otimes_A k(y))$ (Alg. Geo II, 8.A.5).

Also ist $y \in Y - \pi(V_+(I))$ genau dann wenn $V_+(I \otimes_A k(y)) = \emptyset$, d.h., wenn es kein homogenes Primideal $\mathfrak{p} \supseteq I \otimes_A k(y)$ gibt, welches $B_+ \otimes_A k(y)$ nicht ganz enthält. Wie man leicht sieht, ist dies äquivalent dazu, dass $B_+ \otimes_A k(y) \subseteq \sqrt{I \otimes_A k(\mathfrak{p})}$ (das letztere Radikal ist homogen). Diese Inklusion ist wiederum äquivalent dazu, dass

$$B_m \otimes_A k(y) \subseteq I \otimes_A k(y) \tag{2.17.1}$$

für ein $m \leq 1$ (B_m ist der Grad m-Anteil von B), da B_+ von den Elementen $X_0, \dots, X_n \in B_1$ erzeugt wird. Die Inklusion (2.17.1) ist wiederum äquivalent zu

$$(B/I)_m \otimes_A k(y) = 0. \tag{2.17.2}$$

Gilt dies, so folgt aus dem Nakayama-Lemma

$$(B/I)_m \otimes_A \mathcal{O}_{Y,y} = 0$$

(da $(B/I)_m$ endlich erzeugter A-Modul ist). Hieraus folgt die Existenz *eines* Elements $f \in A$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(f)$, und $f \cdot (B/I)_m = 0$ (Betrachte Erzeugende von $(B/I)_m$). Hieraus folgt nun

$$(B/I)_m \otimes_A A_f = 0$$

und rückwärts $(B/I)_m \otimes_A k(z) = 0$ für alle $z \in D(f)$, also $D(f) \subseteq Y - \pi(V_+(I))$.

Lemma 2.18 Sei A ein Ring, S eine graduierte A-Algebra und $A \to C$ ein Ringhomomorphismus. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus von C-Schemata

$$Proj(S \otimes_A C) \cong Proj(S) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C).$$

Beweis Sei

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & S & \to & T = S \otimes_A C \\ & s & \mapsto & s \otimes 1 \end{array}$$

der kanonische Morphismus von graduierten A-Algebren. Dann gilt $\varphi(S_+)T = T_+$ Nach dem folgenden Lemma 2.19 erhält man hieraus einen kanonischen Morphismus von A-Schemata

$$g: Proj(T) \to Proj(S),$$

also auch einen Morphismus

$$h: \ Proj(T) \ \to \ Proj(S) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C)\,.$$

Für jedes $f \in B_+$ gilt dabei (2.19 unten)

$$h^{-1}(D_+(f) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C)) = g^{-1}(D_+(f)) = D_+(\varphi(f))\,.$$

Es reicht also zu zeigen, dass mit $\varphi(f) = f \otimes 1$

$$D_+(\varphi(f)) \ \xrightarrow{h} \ D_+(f) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C)$$

für jedes f ein Isomorphismus ist. Dies bedeutet, dass

$$\psi: \ S_{(f)} \otimes_A C \ \to \ (S \otimes_A C)_{(f\otimes 1)}$$

ein Isomorphismus ist. Diese Abbildung ist offenbar surjektiv ($s/f^n \otimes c$ wird auf $s \otimes c/(f \otimes 1)^n$ abgebildet). Andererseits haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S_{(f)} \otimes_A C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i\otimes id_C"'] & (S \otimes_A C)_{(f\otimes 1)} \arrow[d] \\
S_f \otimes_A C \arrow[r, "\psi'"] & (S \otimes_A C)_{f\otimes 1}
\end{tikzcd}$$

wobei unten die üblichen Lokalisierungen stehen. Die linke Abbildung ist von der Inklusion

$$i: \ B_{(f)} \subseteq B_{(f)} \oplus (\bigoplus_{m \neq n\cdot \deg(f)} B_m/f^n)$$

induziert. Da $B_{(f)}$ ein direkter Summand ist, besitzt i ein Linksinverses (die Projektion auf $B_{(f)}$). Also gilt dies auch für $i \otimes id_C$, und es folgt die Injektivität von $i \otimes id_C$. Da ψ' ein Isomorphismus ist (siehe Alg. Geo. I, Lemma 2.A.11), folgt auch die Injektivität von ψ.

Lemma 2.19 Sei $\varphi : S \to T$ ein Homomorphismus von graduierten A-Algebren. Dann induziert φ einen Morphismus von A-Schemata

$$f: \ Proj(T) - V_+(S_+T) \ \to \ Proj(S)$$

(beachte, dass S_+T ein homogenes Ideal von T ist), so dass für jedes homogene $h \in S_+$ gilt: Es ist $f^{-1}(D_+(s)) = D_+(\varphi(s))$, und der Morphismus

$$f|_{D_+(\varphi(s))}: \ D_+(\varphi(s)) \ \to \ D_+(s)$$

affiner Schemata entspricht dem offensichtlichen Ringhomomorphismus

$$S_{(s)} \ \to \ T_{(\varphi(s))}\,.$$

Beweis Sei $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal in T. Dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein homogenes Primideal in S, und C_+ ist genau dann nicht in $\varphi^{-1}(\varphi)$ enthalten, (d.h., $\varphi^{1-}(\mathfrak{p}) \in Proj(S)$), wenn $\mathfrak{p}$ nicht S_+T enthält, d.h., $\mathfrak{p} \notin V_+(S_+T)$. Dies definiert die stetige Abbildung f. Es ist dann nicht schwer, eine zugehörige Abbildung $f^\sharp$ der Ringgarben mit den genannten Eigenschaften zu definieren (vergleiche des Spezialfall Alg. Geo. II, 8.A.5).

3 Flache, unverzweigte und étale Morphismen

Lemma/Definition 3.1 Sei A ein Ring.
(i) Ein A-Modul M heißt **flach**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0 \tag{3.1.1}$$

ist auch die induzierte Sequenz

$$0 \to N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M \to N_3 \otimes_A M \to 0$$

exakt (d.h., Tensorieren mit M ist ein exakter Funktor).

(b) Für jeden A-Modul N und jeden Untermodul $N' \subseteq N$ ist $N' \otimes_A M \hookrightarrow N \otimes_A M$ injektiv.

(ii) Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ heißt flach, wenn B ein flacher A-Modul ist (man sagt auch B ist flach über A).

Beweis der Äquivalenz: Das Tensorieren mit M ist immer ein rechtsexakter Funktor, d.h., für eine Sequenz (3.1.1) ist immer

$$N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M \to N_3 \otimes_A M \to 0$$

exakt (siehe Alg. Geo. I, 3.A.4).

Beispiele 3.2 (a) Für jeden Ring A und jede multiplikative Teilmenge $S \subset A$ ist $A \to A_S$ flach (siehe Alg. Geo. I, 3.A.10 und beachte, dass für jeden A-Modul N kanonisch $N \otimes_A A_S = N_S$ ist).

(b) Für $1 \neq n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nicht flach (Alg. Geo. I, 3.A.5).

(c) Offenbar gilt für Ringhomomorphismen $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$: Sind φ und ψ flach, so auch $\psi \circ \varphi$, denn es ist für jeden A-Modul M

$$A \otimes_A C = (A \otimes_A B) \otimes_B C\,.$$

(d) Ist $A \to B$ flach, so ist für jeden Ringhomomorphismus $A \to A'$ auch die Skalarerweiterung $A' \to A' \otimes_A B$ flach: Für jede Injektion $M' \hookrightarrow N'$ von A'-Moduln ist

$$M' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B) = M' \otimes_A B \hookrightarrow N' \otimes_A B = N' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B)$$

injektiv.

(e) Jeder freie A-Modul M ist flach: Ist $M = \bigoplus\limits_{i \in I} A$, so ist für jeden A-Modul N kanonisch $N \otimes_A M = \bigoplus\limits_{i \in I} N$, woraus sofort die Behauptung folgt. Insbesondere ist jeder Polynomring $A[X_i \mid i \in I]$ flach über A.

Lemma/Definition 3.3 Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt *flach*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Für je zwei affine offene Teilmengen $U = \mathrm{Spec}(A)$ von X und $V = \mathrm{Spec}(B)$ von Y mit $f(V) \subseteq U$ ist der Ringhomomorphismus $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) = B$ flach.

(b) Für alle $y \in Y$ ist $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ flach.

(c) Für alle abgeschlossenen Punkte $y \in Y$ ist $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ flach.

Beweis der Äquivalenz: (a) $\Rightarrow$ (b): Ohne Einschränkung seien X und Y affin, d.h., wir betrachten also einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$, der flach ist, und haben zu zeigen, dass für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subseteq B$ mit Bild $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq A$ unter $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ der Ringhomomorphismus $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ flach ist.

Nach 3.2 (d) ist aber

$$A_\mathfrak{p} \;\to\; B_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} \otimes_A B = \varphi(A - \mathfrak{p})^{-1} B$$

flach. Weiter ist wegen $\varphi(A - \mathfrak{p}) \subseteq B - \mathfrak{q}$

$$B_\mathfrak{q} \;=\; (B - \mathfrak{q})^{-1} B_\mathfrak{p}$$

eine Lokalisierung von $B_\mathfrak{p}$, also

$$B_\mathfrak{p} \;\to\; B_\mathfrak{q}$$

flach nach 3.2 (a). Damit ist

$$A_\mathfrak{p} \;\to\; B_\mathfrak{q}$$

flach nach 3.2 (c).

(b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a): Für eine Injektion $M \hookrightarrow N$ von A-Moduln ist $M \otimes_A B \to N \otimes_A B$ genau dann injektiv, wenn für jedes maximale Primideal $\mathfrak{n}$ von B die lokalisierte Abbildung

$$(M \otimes_A B) \otimes_B B_\mathfrak{n} \;\to\; (N \otimes_A B) \otimes_B B_\mathfrak{n} \tag{3.3.1}$$

injektiv ist: Dann sind nämlich die Lokalisierungen

$$(M \otimes_A B) \otimes_B B_\mathfrak{q} \;\to\; (N \otimes_A B) \otimes_B B_\mathfrak{q}$$

für alle Primideale $\mathfrak{q}$ von B injektiv, durch weitere Lokalisierung (es ist für $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n} \subseteq B$ maximal $B_\mathfrak{p} = (B_\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}B_\mathfrak{n}}$), und wir können die Injektion $M \otimes_A B \hookrightarrow \prod\limits_\mathfrak{q} (M \otimes_A B)_\mathfrak{q}$ benutzen).

Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{n} \subseteq B$ ist die Abbildung (3.3.1) aber nach Voraussetzung injektiv, denn sie identifiziert sich für $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ mit

$$(M \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{n} \;\to\; (N \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{n}\,.$$

Nun wenden wir an, dass $M \otimes_A A_\mathfrak{p} \to N \otimes_A A_\mathfrak{p}$ injektiv ist (Flachheit von $A \to A_\mathfrak{p}$) und dass $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{n}$ nach Voraussetzung flach ist.

Corollar 3.4 (a) Jede offene Immersion ist flach.

(b) Die Komposition von flachen Morphismen ist flach.

(c) Jeder Basiswechsel von flachen Morphismen ist flach.

(d) Für jedes Schema X sind $\mathbb{A}^n_X \to X$ und $\mathbb{P}^n_X \to X$ flach.

Beweis Mittels des Kriteriums 3.3 (b) ist (a) klar (für ein offenes Unterschema $U \subseteq X$ und $x \in U$ ist $\mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{O}_{X,x}$), (b) folgt aus 3.2 (c) (für $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ und $z \in Z$ haben wir eine Faktorisierung $\mathcal{O}_{X,gf(z)} \to \mathcal{O}_{Y,f(z)} \to \mathcal{O}_{Z,z}$) und (c) folgt aus 3.2 (d) (nach Übergang zu affinen offenen Teilmengen in Y und X haben wir die Situation von 3.2 (d)).

Für den ersten Fall in (d) genügt es, da die Frage lokal in der Basis ist, den Fall $\mathbb{A}^n_A \to \mathrm{Spec}(A)$ zu betrachten, der aus 3.2 (e) folgt. Hieraus folgt der zweite Fall in (d) durch Lokalisierung in X und $\mathbb{P}^n_X$, wo man wieder die Situation $\mathbb{A}^n_A \to (A)$ erhält.

Wir kommen zu unverzweigten Morphismen.

Definition 3.5 Sei $f : Y \to X$ ein Schemamorphismus, der lokal von endlichem Typ ist: Dann heißt f *unverzweigt* bei $y \in X$, wenn für $x = f(y)$ die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ ist eine endliche separable Körpererweiterung von $k(x)$.

(b) Es ist $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$, und $k(y)/k(x)$ ist eine endliche separable Körpererweiterung (Hierbei sind $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ und $\mathfrak{m}_y \subseteq \mathcal{O}_{Y,y}$ die maximalen Ideale und $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ und $k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ die Restklassenkörper von x bzw y).

f heißt unverzweigt, wenn f unverzweigt bei allen $y \in Y$ ist.

Beweis der Äquivalenz: Es ist $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y}$.

Bemerkung 3.6 Die obige Definition ist nur gut, wenn X noethersch ist. Im Allgemeinen sollte man nach EGA "von endlichem Typ" durch "von endlicher Präsentation" ersetzen.

Definition 3.7 Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt étale, wenn er flach und unverzweigt ist.

(Per Definition ist f dann auch lokal von endlichem Typ).

Satz 3.8 Sei $f : Y \to X$ lokal von endlichem Typ. Dann sind äquivalent:

(a) f ist unverzweigt.

(b) Für alle $x \in X$ ist die Faser

$$Y_x \;=\; Y \times_X \mathrm{Spec}(k(x)) \;\to\; \mathrm{Spec}(k(x))$$

von f über x unverzweigt.

(c) Für jedes $x \in X$ ist $Y_x = \coprod\limits_{i \in I} \mathrm{Spec}(k_i)$, wobei k_i endliche separable Körpererweiterung von $k(x)$ ist.

(d) $\Omega^1_{X/Y} = 0$

(e) Die Diagonale $\Delta_{Y/X} : Y \to Y \times_X Y$ ist eine offene Immersion.

Beweis: Offenbar ist (a) äquivalent zu (b), denn für $y \in Y$ und $x = f(y) \in X$ gilt

$$\mathcal{O}_{Y_x,y} \;=\; \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$$

(Betrachte affine offene Umgebungen von x und y).

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $V = \operatorname{Spec}(C) \subseteq Y_x$ affin offen. Dann ist B nach Voraussetzung von endlichem Typ über $k(x)$. Sei $\mathfrak{q} \subseteq B$ ein Primideal. Dann ist $B_{\mathfrak{q}}$ nach Voraussetzung eine endliche separable Körpererweiterung von $k(x)$, und wegen

$$k(x) \hookrightarrow B/\mathfrak{q} \hookrightarrow B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{q}}$$

ist $B/\mathfrak{q}$ eine endlich-dimensionale integre $k(x)$-Algebra, also auch ein Körper. Also ist $\mathfrak{q}$ maximal. Es folgt, dass B artinsch ist, und zwar ein endliches Produkt $B = \prod\limits_{i=1}^{r} B_{\mathfrak{q}_i}$, wobei $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ die endlich vielen (sowohl maximalen als auch minimalen) Primideale von B sind. Es folgt (c).

(c) $\Rightarrow$ (b) ist trivial.

(a) $\Rightarrow$ (d): Da die Bildung von $\Omega^1_{Y/X}$ mit Basiswechsel in X und Lokalisierung in Y verträglich ist, haben wir für $y \in Y$ und $x = f(y) \in X$ einen Isomorphismus

$$(\Omega^1_{Y/X})_y \;\cong\; \Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}}\,. \tag{3.8.1}$$

Da Y/X lokal von endlichem Typ ist, ist $\Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}}/\mathcal{O}_{X,x}$ endlich erzeugter $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul (1.9). Um (d) zu zeigen, genügt es also nach dem Nakayama-Lemma zu zeigen, dass $\Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) = 0$ ist. Wegen der Surjektion

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \twoheadleftarrow (\Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} k(x)) \otimes_{k(x)} k(y)$$

genügt es, das Verschwinden von

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \;\cong\; \Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,y}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)/k(x)}$$

zu zeigen, wo der Isomorphismus von der Basiswechsel-Eigenschaft 1.6 (a) kommt. Der rechte Differentialmodul ist aber 0, wenn (a) gilt; denn dann ist $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = k(y)$ eine endliche separable Körpererweiterung von $k(x)$, und wir können 1.11 anwenden.

(d) $\Rightarrow$ (e): Wie wir gesehen haben, existiert eine offene Teilmenge $W \subseteq Y \times_X Y$, so dass

$$\Delta_{Y/X} : \; Y \;\to W$$

eine abgeschlossene Immersion ist. Ist J das definierende Ideal, so ist nach Voraussetzung $0 = \Omega^1_{Y/X} = \Delta^*(J/J^2)$, also $J = J^2$. Da $Y \to X$ lokal von endlichem Typ ist, ist J endlich erzeugt: Durch Übergang zu affinen offenen Teilmengen betrachten wir einen Ringhomomorphismus $A \to B$ und das Ideal

$$I = \ker(B \otimes_A B \to B)\,.$$

Wird B als A-Algebra von $b_1, \ldots, b_n \in B$ erzeugt, so wird I von den Elementen

$$1 \otimes b_i - b_i \otimes 1$$

erzeugt (siehe 1.5 und 1.9).

Aufgrund dieser endlichen Erzeugung folgt aus $J/J^2 = 0$ auch $J = 0$. Ist nämlich $y \in Y = V(J)$, so gilt $J_y \subseteq \mathfrak{m}_y$; aus $J_y/J_y^2 = 0$ folgt also $J_y/\mathfrak{m}_y J_y = 0$, nach dem Nakayama-Lemma (und der endlichen Erzeugung von J_y!) also $J_y = 0$. Wieder wegen der lokalen endlichen Erzeugung von J gibt es also für jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung $V_y \subseteq W$ mit $J|_{V_y} = 0$. Es gibt also eine offene Menge V, $Y \subseteq V \subseteq W$, mit $J|_V = 0$. Damit erhalten wir einen Isomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} V$, also (e).

(e) $\Rightarrow$ (d) ist trivial.

(e) $\Rightarrow$ (b): Ohne Einschränkung sei $X = \mathrm{Spec}(k)$ für einen Körper und $Y = \mathrm{Spec}(A)$ für eine endlich erzeugte k-Algebra A. Weiter können wir durch Basiswechsel mit dem algebraischen Abschluss $\overline{k}$ von k annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist (Eigenschaft (e) ist mit Basiswechsel verträglich, und (b) ist richtig für A/k, wenn es richtig für $A \otimes_k \overline{k}/\overline{k}$ richtig ist).

Ist dann $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt ($=$ k-rationaler Punkt), so erhalten wir ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\Delta"] & Y \times_X Y \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[u, "y"] \arrow[r, "(y,id)"] & Y \times_k k \arrow[u, "id \times y"'] \cong Y \end{tikzcd}$$

Da offene Immersionen mit Basiswechsel verträglich sind, folgt aus (e), dass $y \hookrightarrow Y$ offen ist. Also ist A endlich über k, d.h., Produkt von lokalen endlich-dimensionalen k-Algebren, also ohne Einschränkung selbst von dieser Gestalt. Dann gilt dies auch für $A \otimes_k A$, wir erhalten also eine Isomorphie

$$A \otimes_k A \xrightarrow{\sim} A\,,$$

und es folgt $A = k$. Dies zeigt (b).

Corollar 3.9 (a) Offene Immersionen sind étale. Eine abgeschlossene Immersion $i : Y \hookrightarrow X$ ist unverzweigt.

(a) Kompositionen von unverzweigten (bzw. étalen) Morphismen sind wieder unverzweigt (bzw. étale).

(c) Basiswechsel von unverzweigten (bzw. étalen) Morphismen sind wieder unverzweigt (bzw. étale).

Beweis Nach 3.4 ist nur der unverzweigte Fall zu betrachten; dieser folgt sofort mit dem Kriterium 3.8 (d).

Proposition 3.10 In einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & X \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

ist f étale, wenn h étale und g unverzweigt ist.

Beweis f faktorisiert als

$$Y \xrightarrow{\Gamma_f} Y \times_S X \xrightarrow{p_2} X$$

wobei $\Gamma_f = (id, f)$ der Graphmorphismus ist und p_2 die Projektion auf den 2. Faktor. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma_f: & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_S X \arrow[d, "f \times id"] \\ \Delta_{X/S}: & X \arrow[r] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

ist kartesisch, und $\Delta_{X/S}$ ist nach Voraussetzung eine offene Immersion (3.8 (e)), also auch Γ_f, als Basiswechsel von $\Delta_{X/S}$. Weiter ist nach Definition

$$\begin{tikzcd} Y \times_S X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "h"] & S \end{tikzcd}$$

kartesisch, also p_2 étale, da h étale ist. Insgesamt folgt, dass $f = p_2 \circ \Gamma_f$ étale ist.

Proposition 3.11 In einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & X \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

ist f eine abgeschlossene Immersion, wenn h eine abgeschlossene Immersion und g separiert ist.

Beweis Ersetze im Argument von 3.10 “offen” durch “abgeschlossen”.

Lemma 3.12 Ist $i : Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion und flach, wobei X lokal noethersch ist, so ist i auch eine offene Immersion.

Beweis: Lokal (in der Basis X) ist i assoziiert zu einem Ringhomomorphismus

$$\varphi: A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$$

für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Ist dies ein flacher Ringhomomorphismus, so ist auch

$$0 \to \mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a} \to A \otimes_A A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a} \to 0$$

exakt, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$. Da $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist, folgt wie im Beweis von 3.8 (d) $\Rightarrow$ (e), dass $\mathrm{Spec}(\varphi)$ eine offene Immersion ist. Dies zeigt die Behauptung für i.

Corollar 3.13 Ist X zusammenhängend und lokal noethersch und $f : Y \to X$ étale (bzw. étale und separiert), so ist jeder Schnitt $s : X \to Y$ von f eine offene Immersion (bzw. ein Isomorphismus auf eine offene Zusammenhangskomponente von Y). Es gibt also eine Bijektion zwischen der Menge der Schnitte und der Menge der offenen (bzw. offenen und abgeschlossenen) Unterschemata $Y_i \subseteq Y$, für die f einen Isomorphismus $Y_i \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Insbesondere ist ein Schnitt durch seinen Wert an einem Punkt bestimmt, falls f separiert ist.

Beweis: Nur die ersten beiden Aussagen sind zu zeigen. Sei zunächst f separiert. Da $f_S = id_X$ eine abgeschlossene Immersion ist, ist s nach 3.11 auch eine abgeschlossene Immersion. Nach 3.10 ist s auch étale, also eine offene Immersion nach 3.12 (Da X lokal noethersch und $Y \to X$ lokal von endlichem Typ ist, ist Y lokal noethersch). Ist f nur étale, so ist f jedenfalls lokal (in Y und X) separiert, also ein lokaler Isomorphismus, also eine offene Immersion.

4 Formal unverzweigte, étale und glatte Morphismen

Definition 4.1 Eine **Nilimmersion** ist eine abgeschlossene Immersion $i : Z_0 \hookrightarrow Z$ von Schemata, deren Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_Z$ nilpotent ist ($J^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$).

Definition 4.2 Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt formal glatt (bzw. formal unverzweigt, bzw. formal étale), wenn gilt: Für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] & Z_0 \arrow[l] \arrow[d, hook, "i"] \\ X & Z \arrow[l] \end{tikzcd},$$

wo Z affin und i eine Nilimmersion ist, gibt es einen (bzw. höchstens einen, bzw. genau einen) Morphismus $g : Z \to Y$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] & Z_0 \arrow[l] \arrow[d, hook] \\ X & Z \arrow[l] \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, d.h., die Abbildung

$$Hom_X(Z, Y) \ \to \ Hom_X(Z_0, Y)$$

ist surjektiv (bzw. injektiv, bzw, bijektiv).

Lemma 4.3 Die drei Eigenschaften in 4.2 sind mit Lokalisierung, Komposition und Basiswechsel verträglich.

Beweis: selbst!

Bemerkung 4.4 (a) In der Definition 4.2 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass J ein Ideal von Quadrat null ist ($J^2 = 0$); hieraus folgt induktiv die Eigenschaft für beliebiges n.

(b) Für ein Schema X nennt man einen kontravarianten Funktor

$$F : \ Sch/X \ \to \ Sets$$

formal glatt (bzw. formal unverzweigt, bzw. formal étale), wenn für jede Nilimmersion $Z_0 \hookrightarrow Z$ von affinen X-Schemata die Abbildung

$$F(Z) \ \to \ F(Z_0)$$

surjektiv (bzw. injektiv, bzw. bijektiv) ist.

Satz 4.5 Ein Schemamorphismus $f : Y \to X$ ist genau dann formal unverzweigt, wenn $\Omega^1_{Y/X} = 0$.

Beweis: Ohne Einschränkung sind alle Schemata affin, und wir betrachten ein Diagramm von Ringen

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi'"] & R/I \\ A \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\phi"] & R \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd} \qquad I^2 = 0$$

wobei das Quadrat kommutativ ist und ϕ und ϕ' zwei Lifts von φ. Wir haben nun:

Lemma 4.6 Ist ϕ ein fester Lift von φ, so haben wir eine Bijektion (wobei I vermöge φ ein B-Modul wird, da I ein R/I-Modul ist)

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Lifts von } \varphi\} & \xrightarrow{\sim} & Der_A(B, I) \\ \phi' & \mapsto & \phi' - \phi \end{array}$$

Beweis: Wegen $\pi\phi = \varphi = \pi\phi'$ hat $\phi' - \phi$ Werte in I. Weiter ist ϕ genau dann ein Morphismus von A-Algebren, wenn $D = \phi' - \phi$ eine A-Derivation ist: Es ist nämlich

$$D(bb') = \phi'(bb') - \phi(bb') = \phi'(b)\phi'(b') - \phi(b)\phi(b') = (\phi'(b) - \phi(b))\phi'(b') + \phi(b)(\phi'(b') - \phi(b'))$$
$$= b'D(b) + bD(b'),$$

wenn ϕ ein Ringhomomorphismus ist, also gilt die Leibniz-Regel für $D = \phi' - \phi$. Die Umkehrung gilt entsprechend. Ebenso ist ϕ' genau dann A-linear, wenn D dies ist, d.h., wenn $D(a) = 0$ für alle $a \in A$.

Hieraus folgt nun 4.5: Wegen

$$Der_A(B, I) \; = \; Hom_B(\Omega^1_{B/A}, I)$$

gibt es höchstens einen Lift, wenn $\Omega^1_{B/A} = 0$. Umgekehrt betrachte man die Nilimmersion zur exakten Sequenz

$$0 \; \to \; I/I^2 \; \to \; (B \otimes_A B)/I^2 \; \xrightarrow{\pi} \; B \; \to 0\,,$$

wobei I der Kern von $B \otimes_A B \to B$, $b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$ ist. Wegen der Existenz des Schnittes $b \mapsto 1 \otimes b \mod I^2$ von π gibt es hier immer einen Lift ϕ. Hat man nur einen Lift, so ist $Hom_B(\Omega^1_{B/A}, I/I^2) = 0$, also $\Omega^1_{B/A} = 0$ wegen der Isomorphie $\Omega^1_{B/A} \cong I/I^2$ (siehe 1.5).

Corollar 4.7 $f : Y \to X$ ist genau dann unverzweigt, wenn f formal unverzweigt und lokal von endlichem Typ ist.

Dies folgt aus 4.5 und 3.8.

Betrachte nun ein kommutatives Diagramm von Ringhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\varphi"] & & C \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Lemma 4.8 Ist C formal glatt über B, so ist die Einschränkungsabbildung

$$\varphi^* : \; Der_A(C, M) \; \to \; Der_A(B, M)$$

für alle C-Moduln M surjektiv.

Beweis: Wir benutzen die Konstruktion aus dem Beweis von 1.5: Wir haben eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{rcl} 0 \to M \to C * M & \stackrel{\pi}{\to} & C \to 0 \\ (c, m) & \mapsto & c \end{array}$$

wobei $C * M$ $(= C \oplus M$ als abelsche Gruppe) ein Ring ist durch die Multiplikation

$$(c, m) \cdot (c', m') \; = \; (cc', cm' + c'm) \, .$$

Weiter wird M ein Ideal von Quadrat null. Für jede A-Derivation $D : B \to M$ erhalten wir nach Voraussetzung in dem folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] & C \\ B \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi_D"] & C * M \arrow[u, "\pi"'] \arrow[from=1-1, "s_D"] \end{tikzcd}$$

$$b \longmapsto (\varphi(b), D(b)) \, ,$$

in dem ψ_D ein A-Algebren-Homomorphismus ist, einen Schnitt s_D von π, und nach Lemma 4.6 die A-Derivation

$$D' = s_D - s_0 : \; C \; \to \; M \, ,$$

wobei $s_0 : C \to C{*}M$, $c \mapsto (c, 0)$, der kanonische Schnitt von π ist. Dies liefert die gewünschte Surjektivität, da die Einschränkung von D' auf B gleich D ist (wegen $s_D\varphi = \psi_D$).

Corollar 4.9 (a) Ist C formal glatt über B, so ist die Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r, "\alpha"] & \Omega^1_{C/A} \arrow[l, bend left, "r"] \arrow[r] & \Omega^1_{C/B} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

zerfallend exakt (d.h., es gibt r wie angegeben mit $r\alpha = id$).

(b) Ist C formal étale über B, so ist

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \; \stackrel{\sim}{\to} \; \Omega^1_{C/A}$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Nach 4.8 ist

$$\begin{array}{rcl} Der_A(C, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C & \stackrel{\alpha^*}{\to} & Der_A(B, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C) \\ \| & & \| \\ Hom_C(\Omega^1_{C/A}, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C) & \to & Hom_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C) \\ f & \mapsto & f\alpha \end{array}$$

surjektiv.

(b): Dies folgt sofort aus (a) und 4.5, denn offenbar gilt

Bemerkung 4.10 $f : Y \to X$ ist genau dann formal étale, wenn f formal glatt und unverzweigt ist.

Wir kommen nun zu hinreichenden Kriterien für formale Glattheit.

Satz 4.11 Betrachte ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, two heads] & & B/\mathfrak{b} =: C \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

wobei B formal glatt über A ist. Dann ist C genau dann formal glatt über A, wenn die Sequenz

$$0 \to \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \overset{\alpha}{\to} \Omega^1_{B/A} \otimes C \to \Omega^1_{C/A} \to 0 \tag{4.11.1}$$

zerfallend exakt ist.

Beweis Sei C/A formal glatt; dann existiert der Ringhomomorphismus s, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] \arrow[dr, dashed, "s"] & B/\mathfrak{b} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B/\mathfrak{b}^2 \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht Damit erhalten wir wiederum zwei Liftungen in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} B/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, shift left, "id"] \arrow[dr, shift right, "s\pi"'] & B/\mathfrak{b} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B/\mathfrak{b}^2 \, . \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

Nach 4.6 ist also

$$D \;=\; id - s\pi \in Der_A(B/\mathfrak{b}^2, \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2)\,.$$

Weiter gilt $D|_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2} = id$ (wegen $\pi|_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2} = 0$). Wir erhalten damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[d, hook] \arrow[dr, equal] & \\ \tilde{D} : B \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "d"'] & B/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "D"] & \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \\ & \Omega^1_{B/A} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

in dem $\tilde{D}$ eine Derivation ist und daher der B-Modul-Homomorphismus ψ wegen der universellen Eigenschaft von $(\Omega^1_{B/A}, d)$ existiert. Das induzierte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[d, hook] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha"'] & \\
B/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \\
\Omega^1_{B/A} \otimes_B B/\mathfrak{b} \arrow[ur, "\overline{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

zeigt, dass $\overline{\psi}\alpha = id$.

Umgekehrt betrachte ein kommutatives Rechteck

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, two heads] \arrow[drr, dashed, "\varphi"] & C \arrow[r] & R/I \\
A \arrow[u] \arrow[rr] & & R . \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd} \qquad I^2 = 0$$

Es existiert die Liftung φ, da B/A formal glatt ist. Wegen der Kommutativität des oberen Dreiecks gilt $\varphi(\mathfrak{b}) \subseteq I$, wegen $I^2 = 0$ also $\varphi(\mathfrak{b}^2) = 0$. Zerfällt die Sequenz (4.11.1), so ist die Abbildung

$$\begin{tikzcd}
Hom_B(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, I) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, equal] & Hom_B(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2, I) \\
Der_A(B, I) &
\end{tikzcd}$$

surjektiv. Daher gibt es ein $D \in Der_A(B, I)$ mit $D|_{\mathfrak{b}} = \varphi|_{\mathfrak{b}}$ (fasse $\varphi|_{\mathfrak{b}}$ als Abbildung $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \to I$ auf). Der Lift $\varphi - D$ (Konstruktion aus 4.6) verschwindet dann auf $\mathfrak{b}$, faktorisiert also über $C = B/\mathfrak{b}$. Dies zeigt, dass auch C/A formal glatt ist.

Corollar 4.12 Sei X noethersch und $f : Y \to X$ lokal von endlichem Typ. Dann sind äquivalent:

(a) f ist formal étale (bzw. lokal formal glatt).

(b) f ist lokal von der Gestalt

(4.12.1) $$C \;=\; A[x_1, \ldots, x_n]/ < f_1, \ldots, f_m >$$

wobei $m = n$ ist und die Matrix

(4.12.2) $$\left(\overline{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}} \right) \in M_{m\times n}(C)$$

invertierbar ist (bzw. wobei $m \leq n$ ist und die Matrix (4.12.2) ein Rechtsinverses besitzt).

Hierbei bezeichne $\overline{g}$ das Bild von $g \in A[X_1, \ldots, X_n]$ in C, und "f ist lokal..." bedeutet: Für jedes $y \in Y$ gibt es affine offene Umgebungen $V = \mathrm{Spec}(C)$ von y und $U = \mathrm{Spec}(A)$ von $x = f(g) \in X$ mit $f(V) \subseteq U$, so dass der induzierte Morphismus $A \to C$ die Eigenschaft ... hat.

Zum Beweis benutzen wir:

Lemma 4.13 $A[x_1, \dots, x_n]$ ist formal glatt über A. Allgemeiner ist $\mathbb{A}^n_X$ formal glatt über X, für jedes Schema X.

Beweis In einem kommutativen Rechteck

$$\begin{tikzcd} A[x_1,\dots,x_n] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"] & R/I \\ A \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd} \qquad I^2 = 0$$

finden wir den gewünschten Lift ϕ, indem wir Urbilder $r_1, \dots, r_n \in R$ von $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ unter π wählen und für ϕ den eindeutig bestimmten A-Morphismus mit $\phi(x_i) = r_i$.

Allgemeiner ist für ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n_X \arrow[d] & S_0 \arrow[l] \arrow[d, hook, "i"] \\ X & S \arrow[l] \end{tikzcd}$$

mit einer Nilimmersion i und affinem S die Abbildung

$$\begin{tikzcd} Hom_X(S, \mathbb{A}^n_X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, equal] & Hom_X(S_0, \mathbb{A}^n_X) \arrow[d, equal] \\ \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n \arrow[r, two heads] & \Gamma(S_0, \mathcal{O}_{S_0})^n \end{tikzcd}$$

surjektiv.

Beweis von 4.12: (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $B = A[x_1, \dots, x_n]$ und $C = b/\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} =< f_1, \dots, f_m >$, so dass $(\overline{\partial f_i/\partial x_j})$ ein Rechtsinverses besitzt. Dann ist die kanonische Sequenz in dem folgenden Diagramm zerfallend exakt:

$$\bar{f} \longmapsto \overline{df} = \sum_j \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} dx_i$$

(4.12.3)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "\alpha"] & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r] & \Omega^1_{C/A} \arrow[r] & 0 \\ & \bigoplus_{j=1}^m Ce_j \arrow[u, two heads] \arrow[r, shift left, "\hat{\alpha}"] & \bigoplus_{i=1}^n Cdx_i \arrow[u, "\wr"'] \arrow[l, shift left, "r"] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{f_j} \\ e_j \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Hier wird $\hat{\alpha}$ durch die $(m \times n)$-Matrix $(\overline{\partial f_i/\partial x_j})^t$ beschrieben. Diese besitzt nach Voraussetzung ein Linksinverses; dies liefert r mit $r\hat{\alpha} = id$, also auch ein Linksinverses von α. Nach 4.11 und 4.13 ist C also formal glatt über A.

Ist $m = n$ und $(\overline{\partial f_i / \partial x_j})$ invertierbar, so ist $\hat{\alpha}$ ein Isomorphismus, also auch α, also $\Omega^1_{C/A} = 0$. Nach 4.5 ist dann C/A formal unverzweigt, nach Bemerkung 4.10 also auch formal êtale. Gilt dies nun überall lokal, so ist $f : Y \to X$ auch formal étale, denn für eine Nilimmersion $S_0 \to S$ verkleben sich die lokal existierenden Morphismen wegen der Eindeutigkeit zu dem gewünschten Morphismus $S \to Y$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $f : Y \to X$ formal glatt und lokal von endlichem Typ. Dann ist f lokal von der Gestalt $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A)$, wobei $C = B/\mathfrak{b}$ mit $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ und einem endlich erzeugten Ideal $\mathfrak{b}$. Nach 4.13 und 4.11 ist die Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[r] & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r] \arrow[l, bend right] \arrow[d, equal, "\wr"] & \Omega^1_{C/A} \arrow[r] & 0 \\ & & C^n & & \end{tikzcd}$$

zerfallend exakt. Nach dem folgenden Lemma ist $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$ also ein endlich erzeugter projektiver C-Modul, und für $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(C) \subseteq \mathrm{Spec}(B)$ ist $(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2)_\mathfrak{q}$ ein freier $C_\mathfrak{q}$-Modul. Seien $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{b}$ derart, dass die Bilder der f_i eine Basis von $(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2)_\mathfrak{q}$ bilden. Nach dem Nakayama-Lemma wird $\mathfrak{b}_\mathfrak{q}$ dann von $f_1, \ldots, f_m$ erzeugt. Nach dem folgenden Lemma gibt es also ein $g \in B - \mathfrak{b}$, so dass $\mathfrak{b}_g$ von $f_1, \ldots, f_m$ erzeugt wird und $(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2)_{\overline{g}}$ ein freier $C_{\overline{g}}$-Modul ist, wobei die Bilder von $f_1, \ldots, f_m$ eine Basis bilden. Es folgt, dass die Matrix $(\overline{\partial f_i / \partial x_j})$ mit Koeffizienten in $C_{\overline{g}}$ ein Rechtsinverses besitzt (siehe das Diagramm (4.12.3)). Andererseits ist

$$\begin{aligned} C_{\overline{g}} &\cong (A[x_1, \ldots, x_n]/ < f_1, \ldots, f_m >)_{\overline{g}} \\ &\cong A[x_1, \ldots, x_n/x_{n+1}]/ < f_1, \ldots, f_m, g x_{n+1} - 1 >, \end{aligned}$$

und die entsprechende Jacobi-Matrix ist

$$\left(\begin{array}{c|c} \overline{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}} & 0 \\ \hline 0 & \overline{g} \end{array} \right),$$

besitzt also ein Rechtsinverses, da $\overline{g}$ eine Einheit in $C_{\overline{g}}$ ist. $\mathrm{Spec}(C_{\overline{g}}) \to \mathrm{Spec}(A)$ ist also von der Form in (b).

Ist zusätzlich $f : Y \to X$ formal étale, so ist $\Omega^1_{C/A} = 0$, also notwendigerweise $m = n$ und die Matrix (4.12.4) invertierbar.

Bemerkung 4.14 Man kann durch zusätzliche Überlegungen zeigen, dass aus 4.12 (b) folgt, dass f sogar formal glatt ist (nicht nur lokal formal glatt).

Lemma/Definition 4.15 Sei A ein Ring. Ein A-Modul P heißt **projektiv**, wenn er die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(a) Für jedes Diagramm von A-Modul-Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\pi"] & N \\ & P \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

mit surjektiven π gibt es einen Morphismus $\beta' : P \to M$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\pi"] & N \\ & P \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ul, "\beta'"] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

(b) Für jeden Epimorphismus $M \twoheadrightarrow N$ von A-Moduln ist $Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, N)$ surjektiv.

(c) Für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

ist

$$0 \to Hom_A(P, M') \to Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, M'') \to 0$$

exakt, d.h., der Funktor $Hom_A(P, -)$ ist exakt.

(d) P ist direkter Faktor eines freien Moduls, d.h., es gibt einen A-Modul Q, so dass

$$P \oplus Q = F$$

ein freier A-Modul ist.

Beweis der Äquivalenz: (a) $\Leftrightarrow$ (b) ist klar, und (b) $\Leftrightarrow$ (c) gilt, da in (c) immer die Sequenz

$$0 \to Hom_A(P, M') \to Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, M'')$$

exakt ist (Linksexaktheit des kovarianten Hom-Funktors $Hom_A(P, -)$, siehe Alg. Geo. I, 3.A.8).

(a) $\Rightarrow$ (d): Für jeden A-Modul P haben wir einen surjektiven A-Modul-Homomorphismus

$$F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P$$

mit einem freien Modul. Gilt (a) für P, und betrachten wir $\beta = id_P$, so erhalten wir einen Morphismus $s : P \to F$ mit $\pi s = id_P$, also einen Schnitt von π. Hierdurch erhalten wir eine Zerlegung

$$\begin{array}{rcl} P \oplus \ker(\pi) & \overset{\sim}{\to} & F \\ (p, q) & \mapsto & s(p) + q\,, \end{array}$$

also (d).

Umgekehrt gilt (a) für jeden freien A-Modul F: Ist etwa $F = \bigoplus\limits_{i \in I} Ae_i$, also F frei mit Basis $(e_i \mid i \in I)$, und haben wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\pi"] & N \\ & F\,, \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

so können wir ein Urbild $m_i \in M$ von $\beta(e_i) \in N$ wählen, für jedes $i \in I$, und erhalten wegen der universellen Eigenschaft von freien Modul einen eindeutig bestimmten Morphismus $\beta' : F \to M$ mit $\beta'(e_i) = m_i$, und dann gilt $\pi\beta' = \beta$.

Gilt nun (d) und haben wir ein Diagramm wie in (a), so erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] & N \\ & F = P \otimes Q \arrow[u, "\gamma=\beta+0"'] \end{tikzcd},$$

also mit $\gamma(p,q) = \beta(p)$, und nach dem eben Bewiesenen einen Morphismus $\gamma' : F \to M$ mit $\pi\gamma' = \gamma$, und $\beta' = \gamma|_p$ erfüllt (a).

Lemma 4.16 Sei A ein Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul.

(a) Ist A ein lokaler Ring und M projektiv, so ist M frei.

(b) Sei A noethersch und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Ist $M_\mathfrak{p}$ frei, so gibt es ein $f \in A - \mathfrak{p}$, so dass M_f ein freier A_f-Modul ist.

Beweis (a): Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ das maximale Ideal und $k = A/\mathfrak{m}$. Wähle $m_1, \ldots, m_n \in M$ derart, dass die Bilder in $M/\mathfrak{m}M$ eine k-Basis bilden. Dann ist nach dem Nakayama-Lemma der Morphismus

$$\begin{array}{rcl} \pi : A^n & \to & M \\ \text{Basiselement } e_i & \mapsto & m_i \end{array}$$

surjektiv. Mit $N = \ker(\pi)$ haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to N \xrightarrow{i} A^n \xrightarrow{\pi} M \to 0\,.$$

Da M projektiv ist, spaltet diese, d.h., π hat einen Schnitt s (siehe Beweis von 4.15). Die Abbildung $r : R^n \to N$ mit $r(x) = x - s\pi(x) \in \ker(\pi) = N$ ist dann ein Linksinverses von i, d.h., $ri = id_N$. Hieraus folgt, dass N endlich erzeugt ist (r ist surjektiv) und dass die Sequenz

$$0 \to N \otimes_A k \xrightarrow{i \otimes id} A^n \otimes_A k \xrightarrow{\pi \otimes id} M \otimes_A k \to 0$$

exakt bleibt ($i \otimes id$ hat das Linksinverse $r \otimes id$). Da $\pi \otimes id$ nach Konstruktion ein Isomorphismus ist, folgt $N \otimes_A k = N/\mathfrak{m}N = 0$. Mit dem Nakayama-Lemma folgt $N = 0$.

(b): *1. Schritt*: Ist $M_\mathfrak{p} = 0$, so gibt es ein $f \in A - \mathfrak{p}$ mit $M_f = 0$.

Denn: Sind $m_1, \ldots, m_n \in M$ Erzeugende, so gibt es für jedes i ein $f_i \in A - \mathfrak{p}$ mit $f_i m_i = 0$, und die Behauptung folgt mit $f = f_1 \cdots f_n$.

2. Schritt: Sei $\varphi : M \to N$ ein Morphismus von endlich erzeugten A-Moduln. Ist $\varphi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv), so gibt es ein $f \in A - \mathfrak{p}$, so dass $\varphi_f : M_f \to N_f$ injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv ist).

Denn: Wende den 1. Schritt auf $\ker(\varphi)$ und $coker(\varphi)$ an.

3. Schritt: Sei nun in der Situation von (b) $(\frac{m_1}{s_1}, \ldots, \frac{m_n}{s_n})$ eine $A_\mathfrak{p}$-Basis von $M_\mathfrak{p}$ ($m_i \in M, s_i \in A - \mathfrak{p}$). Dann ist auch $(m_1, \ldots, m_n)$ eine $A_\mathfrak{p}$-Basis, und mit dem 2. Schritt folgt, dass der Morphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A^n & \to & M \\ \text{Basiselement } e_i & \mapsto & m_i \end{array}$$

einen Isomorphismus $A_f^n \xrightarrow{\sim} M_f$ für geeignetes $f \in A - \mathfrak{p}$ induziert.

Corollar 4.17 Für einen noetherschen Ring A und einen endlich erzeugten A-Modul M sind äquivalent.

(a) Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ist $M_{\mathfrak{p}}$ ein freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul.

(b) Für alle maximalen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ist $M_{\mathfrak{p}}$ eine freier $A_{\mathfrak{p}}$-Modul.

(c) Auf $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist $\tilde{M}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c): Nach 4.16 (b) hat jedes maximale $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ eine offene Umgebung $D(f)$, so dass $\tilde{M}|_{D(f)}$ ein freier $\mathcal{O}_{D(f)}$-Modul ist (nämlich M_f ein freier A_f-Modul). Diese Umgebungen überdecken aber ganz X, denn für $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ beliebig erhält $\overline{\{\mathfrak{q}\}} = V(\mathfrak{q})$ ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$, und für jede offene Umgebung $D(f)$ von $\mathfrak{p}$ gilt $\mathfrak{q} \in D(f)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) ist trivial.

Satz 4.18 Sei X ein noethersches Schema: Ist $f : Y \to X$ étale, so ist f lokal von endlichem Typ und formal étale.

Beweis Die erste Eigenschaft gilt per Definition. Sei nun $S_0 \hookrightarrow S$ eine Nilimmersion mit S affin. Das Diagramm

(4.18.1)
$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & Y \times_X S \arrow[l] \arrow[d, "f'"] & S_0 \arrow[l] \arrow[d, "i"] \\
X & S \arrow[l] \arrow[r, equal] & S \arrow[ul, dashed, "s"']
\end{tikzcd}$$

zeigt, dass es genügt, die formale Flachheit von f' zu zeigen; d.h., ohne Einschränkung ist $X = S$. Betrachte dann das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & Y \times_S S_0 =: Y_0 \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "f_0"'] \\
S & S_0 \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[u, bend right, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

Da i eine Nilimmersion ist, ist auch der Basiswechsel i' eine Nilimmersion (Beweis: selbst). Wegen (4.18.1) hat f_0 einen Schnitt s_0, und wir haben zu zeigen, dass f einen Schnitt s besitzt. Ohne Einschränkung sei S und damit auch S_0 zusammenhängend. Als Nilimmersion ist i' ein Homöomorphismus, und da f_0 étale ist (als Basiswechsel von f) induziert der Schnitt s_0 nach 3.13 einen Isomorphismus von Schemata

$$S_0 \xrightarrow{\sim} s_0(S_0) =: U_0\,,$$

wobei $U_0 \subseteq Y_0$ ein offenes und abgeschlossenes Unterschema von Y ist. Damit ist $U := i'(U_0)$ ein offenes und abgeschlossenes Unterschema von Y. Wir haben zu zeigen, dass

(4.18.2)
$$U \underset{\sim}{\xrightarrow{f}} S$$

ein Isomorphismus ist (dann erhalten wir einen Schnitt von f). Jedenfalls ist (4.18.2) ein Homöomorphismus der unterliegenden topologischen Räume. Weiter haben wir für $y \in U$ und $s = f(y) \in S$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y,y}/J_s\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{X_0,y} \\ \mathcal{O}_{S,s} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_{S,s}/J_s \ = \mathcal{O}_{S_0,s} \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

wobei $J \subseteq \mathcal{O}_S$ die Idealgarbe zu i ist. Da J_s nilpotent ist, folgt mit dem Nakayama-Lemma, dass

$$A = \mathcal{O}_{S,s} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} = B$$

surjektiv ist. Sei $\mathfrak{a} := \ker(A \to B)$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq J_s$ ist $\mathfrak{a}$ nilpotent, und da B flach über A ist (étale Morphismen sind flach), ist die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{a} \otimes_A B & \to & B & \overset{\sim}{\to} & B & \to & 0 \\ & & \| \wr & & & & & & \\ & & \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 & & & & & & \end{array}$$

exakt, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$. Aus dem Nakayama-Lemma und der Nilpotenz von $\mathfrak{a}$ folgt dann $\mathfrak{a} = 0$, d.h., $A \overset{\sim}{\to} B$, d.h., $U \overset{\sim}{\to} S$.

Bemerkung 4.19 Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung von 4.18 gilt.

Proposition 4.20 Sei $f : Y \to X$ formal glatt, wobei X noethersch und f lokal von endlichem Typ ist

(a) $\Omega^1_{Y/X}$ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von lokal endlichem Rang.

(b) Jeder Punkt $y \in Y$ besitzt eine affine offene Umgebung V derart, dass es Schnitte $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ gibt, für die $df_1, \dots, df_m$ eine $\mathcal{O}_V$-Basis von $\Omega^1_{Y/X|V}$ ist.

(c) Sind V und $f_1, \dots, f_m$ wie in (b), so ist der assoziierte Morphismus

$$V \to \mathbb{A}^m_X$$

formal étale und lokal von endlichem Typ.

Beweis: Ohne Einschränkung (durch Lokalisierung in X und Y) sind $Y = \mathrm{Spec}(C)$ und $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin, mit

$$C = A[x_1, \dots, x_n]/ < f_1, \dots, f_m > .$$

Setze $B = A[x_1, \dots, x_n]$ und $\mathfrak{b} =< f_1, \cdots, f_m >$. Nach Satz 4.11 haben wir eine zerfallende exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "\beta"] & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[l, bend left, "r"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \Omega^1_{C/A} \arrow[r] & 0\,. \\ & & C^n & & \end{tikzcd}$$

Also ist $\Omega^1_{C/A}$ ein direkter Faktor von C^n: Wegen $r\beta = id$ ist $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C = \beta(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2) \oplus \ker(r)$, und π induziert einen Isomorphismus $\ker(r) \overset{\sim}{\to} \Omega^1_{C/A}$ (Beweis: selbst). Dies heißt, dass $\Omega^1_{C/A}$

ein endlich erzeugter projektiver C-Modul ist (siehe 4.15), also $\Omega^1_{Y/X} = \widetilde{\Omega^1_{C/A}}$ lokal frei von endlichem Rang (siehe 4.17). Dies zeigt (a).

(b): Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von C. Dann haben wir eine Surjektion

$$C^n_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow (\Omega^1_{C/A})_{\mathfrak{q}}$$

wobei nach (a) und 4.16 (a) der rechte $C_{\mathfrak{q}}$-Modul frei von einem endlichen Rang m ist. Mit dem Nakayama-Lemma folgt, dass es $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass die Bilder von $dx_{i_s}, \dots, dx_{i_m}$ eine Basis des rechten Moduls bilden, also auch eine Basis von $\Omega^1_{Y/X}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{q}$ (Beweis von 4.16 (b)). Wir erhalten die Behauptung mit $f_j =$ Bild von x_{i_j} in C.

(c): Definiere den A-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} B' = A[Y_1, \dots, Y_m] & \xrightarrow{\beta} & C \\ Y_i & \mapsto & f_i\,. \end{array}$$

Dann ist nach Voraussetzung der induzierte Morphismus

$$\begin{array}{rcl} \Omega^1_{B'/A} \otimes_{B'} C & \xrightarrow{\sim} & \Omega^1_{C/A} \\ \text{Basiselement } dY_i & \mapsto & \text{Basiselement } df_i \end{array}$$

ein Isomorphismus. Dies impliziert, dass für alle C-Moduln M die Abbildung

(4.20.1) $$\beta^* : \ Der_A(C, M) \xrightarrow{\sim} Der_A(B', M)$$

ein Isomorphismus ist.

Wir zeigen nun, dass C formal étale über B' ist. Betrachte ein kommutatives Diagramm (ohne φ)

(4.20.2) $$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & R/I \\ B' \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\psi"] & R \arrow[u, two heads, "\pi"'] \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd} \qquad I^2 = 0$$

Da C formal glatt über A ist, existiert der gestrichelte Ringhomomorphismus φ mit $\pi\varphi = \psi_0$ und $\varphi\beta\alpha = \tilde{\psi} = \psi\alpha$. Dann machen ψ und $\varphi\beta$ beide das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\psi_0\beta"] \arrow[dr, shift left, "\psi"] \arrow[dr, shift right, "\varphi\beta"'] & R/I \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & R \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Nach Lemma 4.6 ist also

$$D = \ \varphi\beta - \psi \in Der_A(B', I)\,.$$

Nach dem Isomorphismus (4.20.1) gibt es ein $D' \in Der_A(C, M)$ mit $D = D'\beta$. Dann folgt

$$(\varphi - D')\beta = \psi\,,$$

d.h., wenn wir in (4.20.2) φ durch $\varphi' = \varphi - D'$ ersetzen, erhalten wir die Kommutativität des oberen Teils von (4.20.2), also einen Lift für C/B'. Also ist C/B' formal glatt. Andererseits folgt aus der exakten Sequenz

$$\Omega^1_{B'/A} \otimes_{B'} C \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B'} \to 0$$

dass $\Omega^1_{C/B'} = 0$ ist. Also ist C/B' auch formal unverzweigt (Satz 4.5). Zusammen folgt, dass C/B' formal étale ist (Bemerkung 4.10).

Definition 4.21 Sei X noethersch und $f : Y \to X$ lokal von endlichem Typ. Dann heißt f glatt, wenn f lokal von der Form

$$V \xrightarrow{g} \mathbb{A}^n_U \to U$$

mit étalem g ist.

Bemerkung 4.22 Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata, wobei X noethersch ist.

(a) Nach Satz 4.18 und Bemerkung 4.19 gilt dann: f ist genau dann étale, wenn f formal étale und lokal von endlichem Typ ist.

(b) Zusammen mit 4.20 und Bemerkung 4.14 folgt hieraus: f ist genau dann glatt, wenn f formal glatt und lokal von endlichem Typ ist.

Insbesondere haben wir also die Jacobi-Kriterien aus 4.12 für étale bzw. glatte Morphismen, falls diese lokal von endlichem Typ sind.

5 Abelsche Kategorien und Komplexe

Erinnerung 5.1 Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **additiv**, wenn gilt
(i) Die Hom-Mengen $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ sind abelsche Gruppen, und die Verknüpfungen

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f,g) & \mapsto & gf \end{array}$$

sind bilinear.
(ii) $\mathcal{C}$ besitzt ein Nullobjekt 0 (Für jedes Objekt A in $\mathcal{C}$ ist $Hom_{\mathcal{C}}(A,0) = \{0\}$ und $Hom_{\mathcal{C}}(0,A) = \{0\}$).
(iii) In $\mathcal{C}$ existieren endliche Produkte.

Bemerkung 5.2 Ist $\mathcal{C}$ additiv, und ist $A \times B$ das Produkt von A und B, so ist $A \times B$ mit den Morphismen $i_A = (id_A, 0) : A \to A \times B$ und $i_B = (0, id_B) : B \to A \times B$ auch die Summe von A und B.

Erinnerung 5.3 Eine additive Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **abelsch**, wenn gilt:
(i) Jeder Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{A}$ hat einen Kern $\ker(f)$ und einen Kokern $\operatorname{coker}(f)$.
(ii) Der kanonische Morphismus

$$im(f) \ \to \ coim(f)$$

zwischen Bild und Kobild von f ist ein Isomorphismus.

Bemerkung 5.4 (a) Man hat einen kanonischen Mono-Morphismus $i : \ker(f) \to A$, so dass für jedes Objekt X in $\mathcal{A}$ die Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \ \to \ Hom_{\mathcal{A}}(X, \ker(f)) \ \stackrel{i_*}{\to} \ Hom_{\mathcal{A}}(X,A) \ \stackrel{f_*}{\to} \ Hom_{\mathcal{A}}(X,B)$$

exakt ist. Diese Eigenschaft charakterisiert $ker(f) \to A$.
(b) Dual hat man $\pi : B \to \operatorname{coker}(f)$ und eine exakte Sequenz

$$0 \ \to \ Hom_{\mathcal{A}}(\operatorname{coker}(f), Y) \ \to \ Hom_{\mathcal{A}}(B,Y) \ \to \ Hom_{\mathcal{A}}(A,Y)$$

für jedes Y in $\mathcal{A}$. Diese Eigenschaft charakterisiert $B \to \operatorname{coker}(f)$.
(c) Es ist per Definition $im(f) = \ker(B \to \operatorname{coker}(f))$ und $coim(f) = \operatorname{coker}(\ker(f) \to A)$.
(d) Für einen Monomorphismus $i : A \to B$ schreibe auch B/A für $coker(i)$.
(e) Die Bildung von Kern, Kokern und Bild ist in der folgenden Weise funktoriell: Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] & B' \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

induziert kanonische Morphismen $\tilde{\alpha} : \ker(f) \to \ker(f')$, $\tilde{\beta} : \mathrm{coker}(f) \to \mathrm{coker}(f')$ und $im(f) \to im(f')$. Wir erhalten nämlich ein eindeutig bestimmtes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker(f') \arrow[r, "i'"] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "\pi'"] & \mathrm{coker}(f') \\
\ker(f) \arrow[r, "i"] \arrow[u, "\tilde{\alpha}"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\alpha"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "\beta"'] & \mathrm{coker}(f) \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

aufgrund der universellen Eigenschaften von Kern und Kokern (beachte zum Beispiel, dass $f'(\alpha i) = 0$). Dies zeigt die Behauptung für Kern und Kokern; die Behauptung für das Bild folgt, da $im(f) = \ker(\pi)$ und $im(f') = \ker(\pi')$.

(f) Beispiele von abelschen Kategorien sind die Kategorien Mod_R der Moduln über einem beliebigen (nicht notwendig kommutativen) Ring R, mit den üblichen Kernen, Kokernen und Bildern. Weitere Beispiele sind die Kategorie $P(X)$ von abelschen Prägarben und die Kategorie $Sh(X)$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X (mit den Prägarben-Kernen, -Kokernen und -Bildern bzw. den Garben-Kernen, -Kokernen und -Bildern).

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Erinnerung 5.5 (a) Eine Sequenz

(5.5.1) $$\ldots \to A^{n-1} \overset{d^{n+1}}{\to} A^n \overset{d^n}{\to} A^{n+1} \to \ldots$$

heißt **Komplex**, wenn $d^n d^{n-1} = 0$ für alle n, also $im(d^{n-1}) \subseteq \ker(d^n)$ für alle n.

(b) Für einen Komplex $A^{\cdot}$ wie in (5.5.1) heißt

$$H^n(A^{\cdot}) = \ker(d^n)/im(d^{n-1})$$

die n-te **Homologie** von $A^{\cdot}$, und $A^{\cdot}$ heißt **exakt** bei n, wenn $H^n(A^{\cdot}) = 0$.

Bemerkung 5.6 Für jeden Morphismus $f : A \to B$ ist die Sequenz

$$0 \to \ker(f) \to A \overset{f}{\to} B \to \mathrm{coker}(f) \to 0$$

ein exakter Komplex (d.h., exakt an allen Stellen).

Lemma 5.7 (Schlangenlemma) Für ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

(5.7.1) $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "\pi'"] & C' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0
\end{tikzcd}$$

hat man eine exakte Sequenz

(5.7.2) $$0 \to \ker(f) \to \ker(g) \to \ker(h) \overset{\partial}{\to} \mathrm{coker}(f) \to \mathrm{coker}(g) \to \mathrm{coker}(h) \to 0\,.$$

Beweisskizze: 1) Mit Hilfe von Bemerkung 5.4 erhält man sofort exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \ker(f) & \to & \ker(g) & \to & \ker(h) & \\ & \mathrm{coker}(f) & \to & \mathrm{coker}(g) & \to & \mathrm{coker}(h) & \to 0\,. \end{array}$$

2) Man erhält aus (5.7.1) ein induziertes Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & \mathrm{coker}(f) \arrow[r] & \mathrm{coker}(g) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{coker}(h) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & A/im(f) \arrow[r, "\overline{i'}"] \arrow[u, "\rho"] & B'/im(f) \arrow[r, "\overline{\pi'}"] \arrow[u] & C' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & B/A \arrow[r, "\overline{\pi}", "\sim"'] \arrow[u, "\overline{g}"'] & C \arrow[u, "h"'] & \\
 & 0 \arrow[r] & \ker(g)/\ker(f) \arrow[r] \arrow[u] & \ker(h) \arrow[u, "\iota"'] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Hieraus ergibt sich $\partial : \ker(h) \to \mathrm{coker}(f)$ als

$$\text{“}\ \partial = \ \rho\overline{i'}^{-1}\overline{g}\,\overline{\pi}^{-1}\iota\ \text{”}\ ,$$

d.h., man beachte, dass $\overline{\pi'}\overline{g}\,\overline{\pi}^{-1}\iota = 0$, so dass $\overline{g}\,\overline{\pi}^{-1}\iota$ als $\overline{i'}k$ mit einem eindeutig bestimmten Morphismus $k : \ker(h) \to A/im(f)$ faktorisiert, und setzt dann $\partial = \rho k$.

3) Ähnlich folgt nun die Exaktheit von (5.7.2) bei $\ker(h)$ und $\mathrm{coker}(f)$.

Alternativer Beweis: Man benutzt das Einbettungstheorem von Mitchell, das besagt, dass man jede abelsche Kategorie mit einem volltreuen und exakten Funktor in eine Kategorie Mod_R für einen Ring R einbetten kann. Dann kann man das übliche Schlangenlemma in Mod_R benutzen.

Lemma 5.8 (Variante) Hat man nur ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "\pi'"] & C' & \\
 & A \arrow[r, "i"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

so erhält man eine exakte Sequenz

$$(5.8.1) \qquad \ker(f) \ \to \ \ker(g) \ \to \ ker(h) \ \overset{\delta}{\to} \ \mathrm{coker}(f) \ \to \ \mathrm{coker}(g) \ \to \ coker(h)\,.$$

Beweis Da i' ein Monomorphismus ist, ist

$$ker(i) \ \hookrightarrow \ A \ \overset{f}{\to} \ A'$$

der Nullmorphismus, und da π ein Epimorphismus ist, ist die Komposition

$$C \ \overset{h}{\to} \ C' \ \to \ \mathrm{coker}(\pi')$$

auch null.

Dies liefert ein induziertes Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & im(i') \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A/ker(i) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{f}"] & B \arrow[r] \arrow[u, "g"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{h}"] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Nach dem Schlangenlemma haben wir also eine exakte Sequenz

(5.8.2) $$0 \to \ker(\tilde{f}) \to \ker(g) \to \ker(\tilde{h}) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\tilde{f}) \to \operatorname{coker}(g) \to \operatorname{coker}(\tilde{h}) \to 0\,.$$

Dabei gilt offenbar $\ker(\tilde{f}) = \ker(f)/ker(i), \ker(\tilde{h}) = \ker(h), \operatorname{coker}(\tilde{f}) = \operatorname{coker}(f)$, und wir haben einen Monomorphismus $\operatorname{coker}(\tilde{h}) \hookrightarrow \operatorname{coker}(h)$. Dies liefert sofort die exakte Sequenz (5.8.1).

Definition 5.9 Ein Morphismus von Komplexen $f : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ in A ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d^n"] & B^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[u, "f^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[u, "f^n"] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[u, "f^{n+1}"] & \cdots\,.
\end{tikzcd}$$

Die Komposition mit einem weiteren Morphismus $g : B^{\cdot} \to C^{\cdot}$ von Komplexen ist der Morphismus $gf : A^{\cdot} \to C^{\cdot}$ mit $(gf)^n = g^n f^n$.

Lemma 5.10 (a) Hierdurch wird eine abelsche Kategorie $C(\mathcal{A})$ definiert, die Kategorie der Komplexe in A.

(b) Eine Sequenz

$$A^{\cdot} \xrightarrow{f} B^{\cdot} \xrightarrow{g} C^{\cdot}$$

von Komplexen ist genau dann exakt, wenn

$$A^n \xrightarrow{f^n} B^n \xrightarrow{g^n} C^n$$

für alle n exakt ist.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist die Zuordnung

$$\begin{array}{rcrcl} H^n & : & C(\mathcal{A}) & \to & \mathcal{A} \\ & & A^{\cdot} & \mapsto & H^n(A^{\cdot}) \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Beweis: (a), (b): selbst (Kern und Kokern wird "komponentenweise" genommen, zum Beispiel ist $\ker(f)^n = \ker f^n \hookrightarrow A^n$).

(c) Ist $F : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ ein Morphismus von Komplexen, so erhalten wir wegen der Funktorialität von Kern und Bild kanonische kommutative Diagramme

(5.10.1) $$\begin{tikzcd}
im(d_B^{n-1}) \arrow[r, hook] & \ker(d_B^n) \\
im(d_A^{n-1}) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \ker(d_A^n)\,, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

und hieraus wiederum der kanonisch induzierte Morphismus

$$\begin{tikzcd} H^n(B^\cdot) \\ H^n(A^\cdot) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

der Kokerne in (5.10.1).

Satz 5.11 (a) Sei

$$0 \to A^\cdot \xrightarrow{f} B^\cdot \xrightarrow{g} C^\cdot \to 0$$

eine exakte Sequenz von Komplexen. Dann hat man eine kanonische exakte Sequenz (genannt **lange exakte Kohomologiesequenz**)

(5.11.1) $$\ldots \to H^{n-1}(C^\cdot) \xrightarrow{\delta} H^n(A^\cdot) \xrightarrow{f_*} H^n(B^\cdot) \xrightarrow{g_*} H^n(C^\cdot) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^\cdot) \to \ldots$$

(Hier steht f_* für $H^n(f)$, entsprechend für g_*). Die Morphismen δ werden Verbindungsmorphismen genannt.

(b) Ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A'^\cdot \arrow[r, "f'"] & B'^\cdot \arrow[r, "g'"] & C'^\cdot \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A^\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\alpha"'] & B^\cdot \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\beta"'] & C^\cdot \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"'] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Komplexen, mit exakten Zeilen, so ist das Diagramm

(5.11.2)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{n-1}(C'^\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & H^n(A'^\cdot) \arrow[r, "f'_*"] & H^n(B'^\cdot) \arrow[r, "g'_*"] & H^n(C'^\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & H^{n+1}(A'^\cdot) \arrow[r] & {} \\ \cdots \arrow[r] & H^{n-1}(C^\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\gamma_*"'] & H^n(A^\cdot) \arrow[r, "f_*"] \arrow[u, "\alpha_*"'] & H^n(B^\cdot) \arrow[r, "g_*"] \arrow[u, "\beta_*"'] & H^n(C^\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\gamma_*"'] & H^{n+1}(A^\cdot) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"'] & {} \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis (a): Für jeden Komplex $A^\cdot$ hat man kanonische exakte Sequenzen

$$0 \to H^n(A^\cdot) \to A^n/im(\partial^{n-1}) \xrightarrow{\overline{\partial^n}} \ker(\partial^{n+1}) \to H^{n+1}(A^\cdot) \to 0\,,$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei der mittlere Morphismus von $\partial^n : A^n \to A^{n+1}$ induziert wird.

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H^{n+1}(A^\cdot) \arrow[r] & H^{n+1}(B^\cdot) \arrow[r] & H^{n+1}(C^\cdot) & \\ 0 \arrow[r] & \ker(\partial_A^{n+1}) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \ker(\partial_B^{n+1}) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \ker(\partial_C^{n+1}) \arrow[u, two heads] & \\ & \mathrm{coker}(\partial_A^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{coker}(\partial_B^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{coker}(\partial_C^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ & H^n(A^\cdot) \arrow[r] \arrow[u, hook] & H^n(B^\cdot) \arrow[r] \arrow[u, hook] & H^n(C^\cdot) \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

mit exakten Spalten und mittleren Zeilen folgt nun mit 5.8 (Variante des Schlangenlemmas) die Existenz des Verbindungsmorphismus $\delta : H^n(C^\cdot) \to H^{n+1}(A^\cdot)$ und die Exaktheit von (5.11.1).

(b) folgt aus einer entsprechenden Funktorialitätsaussage im Schlangenlemma (nur die Kommutativität der Quadrate $(*)$ ist zu zeigen).

Corollar 5.12 Sei $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ eine exakte Sequenz von Komplexen. Sind zwei der Komplexe exakt (man sagt auch *azyklisch*), so auch der dritte.

Beweis Dies folgt sofort aus der langen exakten Kohomologiesequenz.

Definition 5.13 Ein Morphismus $f : A^\cdot \to B^\cdot$ heißt **Quasi-Isomorphismus**, wenn $H^n(f) : H^n(A^\cdot) \to H^n(B^\cdot)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.

Corollar 5.14 Sind in der Situation von 5.11 (b) zwei der Morphismen α, β, γ Quasiisomorphismen, so auch der dritte.

Beweis Dies folgt aus dem Diagramm (5.11.2) und dem folgenden Resultat.

Lemma 5.15 (Fünferlemma) Sei

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "a'"] & B' \arrow[r, "b'"] & C' \arrow[r, "c'"] & D' \arrow[r, "d'"] & E' \\
A \arrow[r, "a"] \arrow[u, "\alpha"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[u, "\beta"'] & C \arrow[r, "c"] \arrow[u, "\gamma"'] & D \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"'] & E \arrow[u, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

ein Morphismus exakter Sequenzen in $\mathcal{A}$. Sind α, β, δ und ϵ Isomorphismen, so auch γ. Genauer gilt

(a) Ist α ein Epimorphismus und sind β und δ Monomorphismen, so ist γ ein Monomorphismus.

(b) Ist ϵ ein Monomorphismus und sind β und δ Epimorphismen, so ist γ ein Epimorphismus.

Beweis Es genügt, (a) und (b) zu zeigen. Weiter genügt es, (a) zu zeigen, denn (b) ist dual dazu. Aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r] & \mathrm{coker}(\beta) & \\
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, "a"] & A' \arrow[r] \arrow[u, "a'"'] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

folgt mit Lemma 5.8 (Variante des Schlangenlemmas), dass

$$\mathrm{coker}(a) \hookrightarrow \mathrm{coker}(a')$$

ein Monomorphismus ist. Weiter ist mit δ auch der induzierte Morphismus

$$\ker(d) \hookrightarrow \ker(d')$$

ein Monomorphismus. Wir erhalten also ein induziertes kommutatives exaktes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(a') \arrow[r] & C' \arrow[r] & \ker(d') \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(a) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\tilde{\beta}"'] & C \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"'] & \ker(d) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\tilde{\delta}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

mit Monomorphismen $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\delta}$. Nun folgt aus dem Schlangenlemma $\ker(\gamma) = 0$.

Definition 5.16 Ein Morphismus von Komplexen $f : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ heißt **nullhomotop** (Bez. $f \sim 0$), wenn es für alle $n \in \mathbb{Z}$ Morphismen

$$s^n : A^n \to B^{n-1}$$

gibt mit

$$d^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n = f^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & B^n \arrow[r] & B^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[u, "f^n"'] \arrow[ul, "s^n"] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul, "s^{n+1}"] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Zwei Morphismen $f, g : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ heißen **homotop** (Bez. $f \sim g$), wenn $f - g$ nullhomotop ist.

Homotope Morphismen induzieren *denselben* Morphismus in der Homologie:

Lemma 5.17 Ist $f \sim g : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$, so ist $H^n(f) = H^n(g) : H^n(A^{\cdot}) \to H^n(B^{\cdot})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis Es genügt zu zeigen:

$$f \sim 0 \quad \Rightarrow \quad H^n(f) = 0\,.$$

Sei (s^n) wie in der Definition,

$$d_B^{n-1}s^n + s^{n+1}d_A^n = f\,.$$

Dann ist $f|_{\ker(d_A^n)} = d_A^{n-1}s^n$, hat also Bild in $im(d_B^{n-1})$, und die Behauptung folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & im(d_B^{n-1}) \arrow[d] \\
\ker(d_A^n) \arrow[r, "f^n"] \arrow[d] \arrow[ur, dashed] & \ker(d_B^n) \arrow[d] \\
H^n(A^{\cdot}) \arrow[r, "H^n(f)"] & H^n(B^{\cdot})\,.
\end{tikzcd}$$

Lemma 5.18 (a) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Gilt $f \sim g$ und $f' \sim g'$ in $Hom(A^{\cdot}, B^{\cdot})$, so ist $f + f' \sim g + g'$.

(c) Gilt $f \sim g$ in $Hom(A^{\cdot}, B^{\cdot})$, so gilt $hf \sim hg$ und $fk \sim gk$ für $h \in Hom(B^{\cdot}, C^{\cdot})$ und $k \in Hom(D^{\cdot}, A^{\cdot})$.

Beweis selbst!

Bemerkung 5.19 Die Eigenschaften in 5.18 erlauben es, die folgende Kategorie $K(\mathcal{A})$ **der Komplexe in $\mathcal{A}$ bis auf Homotopie** zu bilden:

$$\begin{aligned} \text{Objekte von } K(A) &= \text{Objekte von } C(A) = \text{Komplexe in } A \\ Hom_{K(\mathcal{A})}(A^{\cdot}, B^{\cdot}) &= Hom_{C(A)}(A^{\cdot}, B^{\cdot})/\sim . \end{aligned}$$

Wegen 5.18 induziert die Verknüpfung in $C(\mathcal{A})$ eine wohldefinierte Verknüpfung der Homotopieklassen, d.h., in $K(\mathcal{A})$.

Definition 5.20 Ein Morphismus $f : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ von Komplexen heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es einen Morphismus $g : B^{\cdot} \to A^{\cdot}$ gibt mit $gf \sim id_{A^{\cdot}}$ und $fg = id_{B^{\cdot}}$ (d.h., wenn f ein Isomorphismus in $K(\mathcal{A})$ wird).

Corollar 5.21 Eine Homotopieäquivalenz ist ein Quasiisomorphismus.

Beweis In der Situation von 5.20 ist nach 5.17 $H^n(g)H^n(f) = H^n(id_{A^{\cdot}}) = id_{H^n(A^{\cdot})}$ und entsprechend $H^n(f)H^n(g) = id_{H^n(B^{\cdot})}$.

6 Abgeleitete Funktoren

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Lemma/Definition 6.1 (1) Ein Objekt I in $\mathcal{A}$ heißt **injektiv**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Für jedes Diagramm von Morphismen i und f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ I & \end{tikzcd}$$

mit einem Monomorphismus i gibt es einen Morphismus $g : B \to I$, der das Diagramm kommutativ macht.

(b) Für jeden Monomorphismus

$$I \overset{i}{\hookrightarrow} B$$

gibt es eine sogenannte Retraktion, d.h., einen Morphismus $r : B \to I$ mit $ri = id_I$.

(c) Der Funktor $Hom_{\mathcal{A}}(-, I)$ ist exakt.

(2) Projektive Objekte in $\mathcal{A}$ werden dual definiert. Also ist ein Objekt P projektiv, wenn es für jeden Epimorphismus $\pi : B \twoheadrightarrow C$ und jeden Morphismus $f : P \to C$ einen Morphismus $g : P \to B$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \\ & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Äquivalent ist, dass jeder Epimorphismus $\pi : B \twoheadrightarrow P$ einen Schnitt besitzt, d.h., einen Morphismus $s : P \to B$ mit $\pi s = id_P$, bzw., dass der Funktor $Hom_{\mathcal{A}}(P, -)$ exakt ist.

Beweis der Äquivalenz (für Injektive):

(a) $\Rightarrow$ (c): Für jede exakte Sequenz in $\mathcal{A}$

$$0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$$

und jedes Objekt D in $\mathcal{A}$ ist immer

$$0 \to Hom_{\mathcal{A}}(C, D) \overset{\beta^*}{\to} Hom_{\mathcal{A}}(B, D) \overset{\alpha^*}{\to} Hom_{\mathcal{A}}(A, D)$$

exakt. Der Funktor $Hom_{\mathcal{A}}(-, I)$ ist also genau dann exakt, wenn $\alpha^* : Hom_{\mathcal{A}}(B, I) \to Hom_{\mathcal{A}}(A, I)$ surjektiv ist. Dies bedeutet aber genau (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial (betrachte $f = id_I$).

(b) $\Rightarrow$ (a): In der Situation von (a) ist mit i auch der Morphismus

$$(f, i) : A \hookrightarrow I \oplus B$$

ein Monomorphismus (da $A \to I \oplus B \to I$ gleich i ist), und auch $i' : I \to I \oplus B \to (I \oplus B)/A$ ein Monomorphismus, wie aus dem exakten kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C \oplus B)/A \arrow[r, equal] & (C \oplus B)/A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[u, "i'"] & C \oplus B \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & A \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & B \arrow[u, equal] &
\end{tikzcd}$$

mit dem Schlangenlemma folgt.

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\
I \arrow[r, hook, "i'"'] & (I \oplus B)/A \arrow[l, dashed, bend right, "r"']
\end{tikzcd}$$

(in dem $(I \oplus B)/A$ gerade die Fasersumme $I \oplus_A B$ von I und B über A ist; vergleiche Alg. Geo. II, 1.A.7). Gilt (b), so gibt es ein $r : (I \oplus B)/A \to I$ mit $ri' = id_I$. Dann gilt (a) mit $g = rf'$.

Bemerkung 6.2 In der Kategorie Mod_R von R-Moduln für einen Ring R sind die projektiven Objekte gerade die projektiven R-Moduln im Sinne von Definition 4.15.

Definition 6.3 $\mathcal{A}$ hat **genügend viele Injektive** (bzw. **Projektive**), wenn es für jedes Objekt X in $\mathcal{A}$ einen Monomorphismus $i : X \hookrightarrow I$ mit einem injektiven Objekt I gibt (bzw. einen Epimorphismus $\pi : P \twoheadrightarrow X$ mit einem projektiven Objekt P).

Satz 6.4 Ist R ein Ring mit Eins, so hat die Kategorie Mod_R alle R-Moduln genügend viele Injektive und Projektive.

Die Existenz von genügend vielen Projektiven ist nach Bemerkung 6.2 und 4.15 klar, da jeder R-Modul M eine Surjektion $F \twoheadrightarrow M$ mit einem freien R-Modul F besitzt.

Satz 6.5 Ist X ein topologischer Raum, so hat die Kategorie $Sh(X)$ der abelschen Garben auf X genügend viele Injektive (aber im Allgemeinen nicht genügend viele Projektive). Dasselbe gilt für die Kategorie $P(X)$ der abelschen Prägarben.

Satz 6.6 Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, so hat die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln genügend viele Injektive.

Die Behauptungen über Injektive folgen mit einer Methode von Grothendieck:

Definition 6.7 Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Objekten aus $\mathcal{A}$ heißt ein System von Erzeugern von $\mathcal{A}$, falls der Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \underline{Ab} \\ A & \rightsquigarrow & \prod\limits_{i \in I} Hom_{\mathcal{A}}(U_i, A) \end{array}$$

treu ist (d.h., dass für alle Objekte A, B in $\mathcal{A}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{A}}(A,B) & \to & Hom(\prod\limits_{i\in I} Hom_{\mathcal{A}}(U_i,A), \prod\limits_{i\in I} Hom_{\mathcal{A}}(U_i,B)) \\ f & \mapsto & f_* \end{array}$$

injektiv ist).

Beispiele 6.8 (a) Ist R ein Ring mit Eins, so ist $U = R$ ein Erzeuger für Mod_R, denn für jeden R-Modul M ist kanonisch

$$\begin{array}{rcl} Hom_R(R,M) & \xrightarrow{\sim} & M \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

(b) Sei X ein topologischer Raum. Für jede offene Menge $U \overset{j_U}{\hookrightarrow} X$ sei $(j_U)_!\underline{\mathbb{Z}}$ die Garbe, die zur Prägarbe

$$j^P_{U!}\underline{\mathbb{Z}}: \quad V \mapsto \begin{cases} 0 & V \nsubseteq U \\ \mathbb{Z} & V \subseteq U \end{cases}$$

assoziiert ist. Dann ist $(j_{U!}\underline{\mathbb{Z}})_{U\subseteq X \text{ offen}}$ eine Familie von Erzeugern für $Sh(X)$, denn es ist für jede abelsche Garbe F auf X

$$Hom_X(j_{U!}\underline{\mathbb{Z}}, F) \cong Hom_U(\underline{\mathbb{Z}}, F_U) \cong F(U)\,,$$

(vergleiche Alg. Geo. II, Übungsaufgabe 15). Entsprechend ist $(j^P_{U!}\underline{\mathbb{Z}})_{U\subseteq X \text{ offen}}$ eine Familie von Erzeugern für $P(X)$.

(c) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, so ist

$$(j_{U!}\mathcal{O}_U)_{U\subseteq X \text{ offen}}$$

eine Familie von Erzeugern für die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Definition 6.9 Man sagt die abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ erfüllt die Eigenschaft
$(AB3)$, wenn in $\mathcal{A}$ beliebige direkte Summen $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ existieren (da in $\mathcal{A}$ Kokerne existieren, folgt, dass beliebige direkte Limiten existieren, siehe Alg. Geo. II, 1.A.21),
$(AB4)$, wenn $(AB3)$ gilt und die Bildung direkter Summen ein exakter Funktor ist,
$(AB5)$, wenn $(AB3)$ gilt und die Bildung induktiver Limiten ein exakter Funktor sind.
Die Eigenschaften $(AB3^*), (AB4^*)$ und $(AB5^*)$ werden dual definiert.

Definition 6.10 Eine abelsche Kategorie heißt Grothendieck-Kategorie, wenn sie $(AB5)$ erfüllt und eine Familie von Erzeugern besitzt.

Die Kategorien im Beispiel 6.8 sind Grothendieck-Kategorien, denn die Eigenschaft $(AB5)$ gilt für sie, wie man leicht sieht, und die zweite Eigenschaft gilt nach 6.8. Daher folgen die Sätze 6.4, 6.5 und 6.7 aus:

Satz 6.11 Eine Grothendieck-Kategorie hat genügend viele Injektive.

Beweisidee: Wegen $(AB3)$ besitzt $\mathcal{A}$ einen Erzeuger U (für eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ bilde $U = \bigoplus_{i\in I} U_i$) Für den Ring mit Eins $R = Hom_{\mathcal{A}}(U,U)$ betrachtet man dann den treuen Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \to & Mod_R \\ A & \rightsquigarrow & Hom_{\mathcal{A}}(U,A)\,. \end{array}$$

Sei nun $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven.

Konvention 6.12 Ein Objekt A in $\mathcal{A}$ wird auch als Komplex

$$\ldots \to 0 \to A \to 0 \to \ldots$$

aufgefasst. Dies liefert eine Einbettung (einen volltreuen Funktor)

$$\mathcal{A} \hookrightarrow C(\mathcal{A})\,.$$

Definition 6.13 Sei A ein Objekt in $\mathcal{A}$. Eine Auflösung (bzw. eine injektive Auflösung) von A ist ein Quasiisomorphismus

$$\varepsilon : A \to I^{\cdot} \tag{6.13.1}$$

wobei $I^{\cdot} : \ldots \to 0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$ ein Komplex in $\mathcal{A}$ (bzw. ein Komplex mit injektiven Komponenten) ist.

Offenbar ist (6.13.1) dasselbe wie eine exakte Sequenz

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots\,.$$

Satz 6.14 (a) Jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ besitzt eine injektive Auflösung.

(b) Ist $\varepsilon : A \to I^{\cdot}$ eine beliebige Auflösung und $\eta : B \to J^{\cdot}$ ein Komplex mit injektiven J^n, und ist $u : A \to B$ ein Morphismus, so gibt es einen Morphismus $f : I^{\cdot} \to J^{\cdot}$ von Komplexen, so dass

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] & J^{\cdot} \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\varepsilon"] & I^{\cdot} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert (d.h., es ist $f^0\varepsilon = \eta u$). Die Homotopieklasse $[f]$ von f ist eindeutig bestimmt.

Beweis (a) Sei bereits

$$0 \overset{d^{-2}}{\to} A \overset{d^{-1}}{\to} I^0 \overset{d^0}{\to} \ldots I^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} I^n \qquad (I^i \text{ injektiv})$$

konstruiert, exakt an den Stellen $i < n$. Sei $C^n = \operatorname{coker}(d^{n-1})$; dann gibt es nach Voraussetzung über $\mathcal{A}$ einen Monomorphismus

$$C^n \hookrightarrow I^{n+1}$$

mit einem Injektiven I^{n+1}. Ist $d^n : I^n \overset{\text{kan.}}{\twoheadrightarrow} C^n \hookrightarrow I^{n+1}$ die Komposition, so ist

$$0 \to A \to I^0 \to \dots \quad \to I^n \to I^{n+1}$$

exakt.

(b) Die Existenz von f^0 ergibt sich daraus, dass ε ein Monomorphimus ist und J^0 ein injektives Objekt. Sei nun $n \geq 0$ und bereits ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta"] & J^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "d_J^{n-1}"] & J^n \\
A \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\varepsilon"] & I^0 \arrow[u, "f^0"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n \arrow[u, "f^n"']
\end{tikzcd}$$

konstruiert und $\overline{f^n} : C^n = \operatorname{coker}(\partial_I^{n-1}) \to D^n = \operatorname{coker}(\partial_J^{n-1})$ der induzierte Morphismus. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
d_J^n : & J^n \arrow[r, two heads] & D^n \arrow[r, "\overline{d_J^n}"] & J^{n+1} \\
d_I^n : & I^n \arrow[u, "f^n"'] \arrow[r, two heads] & C^n \arrow[u, "\overline{f^n}"'] \arrow[r, hook, "\overline{d_I^n}"] & I^{n+1}
\end{tikzcd}$$

ist der von d_I^n induzierte Morphismus $\overline{d_I^n}$ ein Monomorphismus. Wegen der Injektivität von J^{n+1} gibt es also einen Morphismus $f^{n+1} : I^{n+1} \to J^{n+1}$, der das Diagramm kommutativ ergänzt.

Für die letzte Aussage genügt es zu zeigen

$$u = 0 \quad \Rightarrow \quad f \sim 0 \,.$$

Setze $J^{-2} = 0$, $f^{-1} = u = 0 : I^{-1} = A \to B = J^{-1}$ und $s^{-1} = s^0 = 0$. Seien bereits $s^i : I^i \to I^{i-1}$ konstruiert $0 \leq i \leq n$, mit $f^i = ds^i + s^{i+1}d$ für $0 \leq i \leq n-1$.

$$\begin{tikzcd}
J^{n-2} \arrow[r] & J^{n-1} \arrow[r] & J^n & \\
\cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[ul, "s^{n-1}"] \arrow[u, "f^{n-1}"'] \arrow[r] & I^n \arrow[ul, "s^n"] \arrow[u, "f^n"'] \arrow[r] & I^{n+1} \,.
\end{tikzcd}$$

Dann ist $(f^n - ds^n)d = f^n d - ds^n d = f^n d - df^{n-1} = 0$; $f^n - ds^n$ faktorisiert also über $C^n = \operatorname{coker}(d_I^{n-1})$

$$\begin{tikzcd}
& J^n & & \\
d_I^n : & I^n \arrow[u, "f^n - ds^n"] \arrow[r, two heads] & C^n \arrow[ul, "\tilde{g}"] \arrow[r, hook] & I^{n+1} \,. \arrow[ull, dashed, "s^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Da J^n injektiv ist, existiert ein Morphismus $s^{n+1} : I^{n+1} \to J^n$, der das Diagramm kommutativ ergänzt. Dann gilt

$$s^{n+1} d_I^n = f^n - ds^n \,.$$

Corollar 6.15 Sind $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\cdot$ und $A \xrightarrow{\eta} J^\cdot$ zwei injektive Auflösungen von A, so gibt es eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Homotopieäquivalenz $f : I^\cdot \to J^\cdot$, die

$$\begin{tikzcd} & J^\cdot \\ A \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\ & I^\cdot \arrow[uu, "f"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Proposition 6.16 Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, so gibt es ein kommutativ exaktes Diagramm von injektiven Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 & 0 \\ C \arrow[u] \arrow[r] & K^\cdot \arrow[u] \\ B \arrow[u] \arrow[r] & J^\cdot \arrow[u] \\ A \arrow[u] \arrow[r] & I^\cdot \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Beweis selbst (Man kann $J^n = I^n \oplus K^n$ wählen).

Definition 6.17 Ein (kovarianter) Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heißt additiv, wenn er direkte Summen respektiert, d.h., wenn für je zwei Objekte A_1, A_2 in $\mathcal{A}$ der Morphismus

$$F(i_1) + F(i_2) : F(A_1) \oplus F(A_2) \to F(A_1 \oplus A_2)$$

ein Isomorphismus ist, $i_\nu : A_\nu \to A_1 \oplus A_2$ die kanonischen Morphismen ($\nu = 1, 2$).

Lemma 6.18 (a) F ist additiv genau dann, wenn $F(u)+F(v) = F(u+v)$ für alle Morphismen $u, v \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.

(b) Ist F additiv, so respektiert F Nullobjekte und -morphismen.

Beweis: (b): Nullobjekte N sind dadurch gekennzeichnet, dass der kanonische Morphismus $id + id : N \oplus N \xrightarrow{\sim} N$ ein Isomorphismus ist (hieraus folgt nämlich zunächst, dass N initial ist, also ein Nullobjekt, da Letzteres existiert). Ist nun F additiv, so folgt, dass $id + id : F(N) \oplus F(N) \xrightarrow{\sim} F(N)$ ein Isomorphismus ist, woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite ergibt sich, da jeder Nullmorphismus eine Faktorisierung $A \to 0 \to B$ besitzt.

(a): selbst: Benutze (den Beweis von) 5.2 und die Faktorisierung

$$u + v : \; A \xrightarrow{\text{diag.}} A \oplus A \xrightarrow{u+v} B$$

Definition 6.19 Ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heißt linksexakt (bzw. rechtsexakt), wenn für jede exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to C$$

in $\mathcal{A}$ die Sequenz

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

(bzw. $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$) exakt ist. F heißt exakt, wenn F links- und rechtsexakt ist.

Lemma 6.20 Ist F linksexakt, so ist F additiv.

Beweis: Betrachte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "i_1"] & A_1 \oplus A_2 \arrow[l, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \arrow[l, bend left, "i_2"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es gilt $p_\nu i_\nu = id$ und $i_1 p_1 + i_2 p_2 = id_{A_1 \oplus A_2}$ (vergleiche 5.2). Die Sequenz ist daher exakt. Dann ist die Sequenz

$$0 \to F(A_1) \xrightarrow{F(i_1)} F(A_1 \oplus A_2) \xrightarrow{F(p_2)} F(A_2) \to 0$$

auch exakt: F ist linksexakt, und wegen $F(p_2)F(i_1) = id$ ist $F(p_2)$ ein Epimorphismus. Es folgt, dass

$$F(i_1) + F(i_2) : F(A_1) \oplus F(A_2) \to F(A_1 \oplus F_2)$$

ein Isomorphismus mit Inversem $(F(p_1), F(p_2))$ ist.

Bemerkung 6.21 Jeder additive Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien lässt sich wie folgt zu einem Funktor $F : C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{B})$ der Komplexkategorien ausdehnen:

$$\begin{tikzcd} F(C^\cdot): \arrow[d, "F(f^\cdot)"'] & \cdots \arrow[r] & F(C^{n-1}) \arrow[r, "F(d^{n+1})"] \arrow[d] & F(C^n) \arrow[r, "F(d^n)"] \arrow[d, "F(f^n)"] & F(C^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "F(f^{n+1})"] & \cdots \\ F(D^\cdot): & \cdots \arrow[r] & D(D^{n-1}) \arrow[r] & F(D^n) \arrow[r] & F(D^{n+1}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Es gilt $(F(d^n)F(d^{n-1})) = F(d^n d^{n-1}) = F(0) = 0$, da F additiv ist. Dabei gilt offenbar

$$f^\cdot \sim g^\cdot \quad \Rightarrow \quad F(f^\cdot) \sim F(g^\cdot)$$

(wieder wegen der Additivität). Analoges gilt für kontravariante Funktoren.

Definition 6.22 (rechtsabgeleitete Funktoren) Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien. Die Kategorie $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive. Dann ist der i-te rechtsabgeleitete Funktor $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $(i \in \mathbb{Z})$ wie folgt definiert:
(i) Für ein Objekt A in $\mathcal{A}$ wähle eine injektive Auflösung $A \to I^\cdot$ und setze

$$R^iF(A) \;:=\; H^i(F(I^\cdot))\,,$$

dies ist also die i-te Kohomologie von

$$\ldots \to F(I^{i-1}) \to F(I^i) \to F(I^{i+1}) \to \ldots \quad .$$

(ii) Für einen Morphismus $u : A \to B$ in $\mathcal{A}$ wähle eine Fortsetzung

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & J^\cdot \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[r] & I^\cdot \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

auf injektiver Auflösungen und definiere

$$R^iF(u) : R^iF(A) \to R^iF(B)$$

durch

$$R^iF(u) = H^i(F(f')) : R^iF(A) = H^i(F(I^\cdot)) \to H^i(F(J^\cdot)) = R^iF(B)\,,$$

dies ist also induziert durch

$$\begin{tikzcd} F(I^{i-1}) \arrow[r] \arrow[d] & F(I^i) \arrow[r] \arrow[d, "F(f^i)"] & F(I^{i+1}) \arrow[d] \\ F(J^{i-1}) \arrow[r] & F(J^i) \arrow[r] & F(J^{i+1})) \,. \end{tikzcd}$$

Bemerkung 6.23 (a) Nach Corollar 6.15 ist $R^nF(A)$ bis auf kanonische Isomorphie in $\mathcal{B}$ festgelegt, denn der Morphismus $f : I^\cdot \to J^\cdot$ in 6.15, zwischen zwei verschiedenen injektiven Auflösungen von A, hat ein eindeutig bestimmte Homotopieklasse $[f]$, damit ist für $F(f) : F(I^\cdot) \to F(J^\cdot)$ auch $[F(f)]$ eindeutig, induziert also nach 5.17 einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $H^n(FI^\cdot) \to H^n(FJ^\cdot)$ (wir schreiben auch FX für $F(X)$ und Ff für $F(f)$). Fixieren wir eine injektive Auflösung $A \to I_A^\cdot$ für jedes A in $\mathcal{A}$, so erhalten wir mit 6.14 und denselben Argumenten weiter für jeden Morphismus $u : A \to B$ eine bis auf Homotopie eindeutige Fortsetzung $f : I_A^\cdot \to I_B^\cdot$, die einen eindeutigen Morphismus

$$R^n(u) : R^nF(A) = H^n(FI_A^\cdot) \overset{f_*}{\to} H^n(FI_B^\cdot) = R^nF(B)$$

induziert. Aus demselben Grund gilt auch

$$\begin{aligned} R^n(vu) &= R^n(v)R^n(u) \qquad \text{für } v : B \to C, \\ R^n(id_A) &= id_{R^nF(A)}\,, \end{aligned}$$

d.h., R^nF wird ein Funktor (Man spricht auch von einem Pseudo-Funktor, da man die $I_A^\cdot$ wählen muss).

(b) Nach Voraussetzung ist $I^n = 0$ für $n < 0$; daher ist immer

(6.23.1) $$R^nF = 0 \quad \text{für } n < 0\,.$$

(c) Wegen der Linksexaktheit von F ist weiter

$$0 \to FA \overset{F\varepsilon}{\to} FI^0 \overset{Fd^0}{\to} FI^1$$

exakt; dies induziert eine kanonische Isomorphie

(6.23.2) $$FA \overset{\sim}{\to} \ker Fd^0 = H^0(FI^\cdot) = R^0FA\,,$$

die einen Isomorphismus von Funktoren

$$F \xrightarrow{\sim} R^0 F \tag{6.23.3}$$

liefert.

(d) $R^i F$ ist additiv, denn für injektive Auflösungen $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\cdot$ und $B \xrightarrow{\eta} J^\cdot$ ist

$$A \oplus B \xrightarrow{\varepsilon \oplus \eta} I^\cdot \oplus J^\cdot$$

eine injektive Auflösung von $A \oplus B$.

(e) Ist I ein injektives Objekt in $\mathcal{A}$, so ist

$$R^n F I = 0 \quad \text{für} \quad n > 0\,,$$

denn es ist $I \xrightarrow{id} I$ eine injektive Auflösung von I.

(f) Duales gilt für kontravariante bzw. rechtsexakte Funktionen und deren (Links-)Ableitungen.

Beispiele/Definition 6.24 (a) Der Hom-Funktor

$$Hom_{\mathcal{A}}(B, -) : \ \mathcal{A} \to Ab$$

ist linksexakt. Seinen n-ten rechtsabgeleiteten Funktor bezeichnet man mit

$$Ext^n_{\mathcal{A}}(B, -) : \ \mathcal{A} \to Ab\,,$$

$Ext^n_{\mathcal{A}}(B, A)$ heißt die n-te Ext-Gruppe von A und B (also $Ext^0_{\mathcal{A}}(A, B) = Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$).

Für $\mathcal{A} = Mod_R$ schreibt man auch $Ext^n_R(N, M)$ für R-Moduln M und N. Ist R kommutativ mit Eins, so ist $Hom_R(N, M)$ in kanonischer Weise ein R-Modul ($(r \cdot f)(n) = r \cdot f(n)$), d.h., $Hom_R(N, -)$ lässt sich als Funktor $Mod_R \to Mod_R$ auffassen. Aus der Konstruktion folgt, dass auch die $Ext^n_R(N, M)$ dann in kanonischer Weise R-Moduln sind.

(b) Für $\mathcal{A} = Sh(X)$, die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum X, schreibt man auch $Ext^n_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ für Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf X.

(c) Der globale Schnittfunktor

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & Sh(X) & \to & Ab \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \Gamma(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X) \end{array}$$

ist ebenfalls linksexakt. Sein n-ter abgeleiteter Funktor wird mit $H^n(X, -)$ bezeichnet (Es ist also $H^n(X, -) = R^n \Gamma$). $H^n(X, \mathcal{F})$ heißt die n-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$ (und nach 6.23 (c) gilt $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$). Wegen der funktoriellen Isomorphie

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} Hom_X(\underline{\mathbb{Z}}, \mathcal{F})$$

hat man eine kanonische Isomorphie von Funktoren

$$H^n(X, -) \xrightarrow{\sim} Ext^n_X(\mathbb{Z}, -)\,.$$

(d) Sei G eine Gruppe und Mod_G die Kategorie der G-Moduln. Diese besitzt genügend viele Injektive (dies folgt z.B. aus der Gleichheit $Mod_G = Mod_{\mathbb{Z}[G]}$, wobei $\mathbb{Z}[G]$ der Gruppenring ist), und der Funktor

$$Mod_G \to Ab, \quad M \mapsto M^G = \{m \in M \mid \sigma m = m \quad \forall\, \sigma \in G\}$$

ist linksexakt. Sein n-ter rechtsabgeleiteter Funktor wird mit $H^n(G,-)$ bezeichnet; $H^n(G,M)$ heißt die n-te Kohomologie des G-Moduls M (so dass $H^0(G,M) = M^G$). Wegen der funktoriellen Isomorphie (G operiere trivial auf $\mathbb{Z}$)

$$\begin{array}{rcl} M^G & \stackrel{\sim}{\to} & Hom_G(\mathbb{Z},M) := Hom_{Mod_G}(\mathbb{Z},M) = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M) \\ m & \mapsto & f \text{ mit } f(1) = m \end{array}$$

ist andererseits

$$H^n(G,M) \cong Ext^n_G(\mathbb{Z},M) := Ext^n_{Mod_G}(\mathbb{Z},M) = Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)\,.$$

Analoges gilt für die Kohomologie von pro-endlichen Gruppen und diskreten G-Moduln.

Wir kommen nun zu den langen exakten Kohomologiesequenzen

Satz 6.25 Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor. Die Rechtsableitungen $(R^nF)_{n\geq 0}$ liefern einen universellen δ-Funktor von A nach B.

Dabei definiert man:

Definition 6.26 (a) Seien A und B abelsche Kategorien. Eine Folge $(F^n)_{n\geq 0}$ von Funktoren $F^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zusammen mit Morphismen

$$\delta^n : F^n(A'') \to F^{n+1}(A')$$

für jede exakte Sequenz

(6.26.1) $$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

heißt δ-Funktor, wenn gilt:
(i) Für jede exakte Sequenz (6.26.1) ist die Sequenz

(6.26.2) $$0 \longrightarrow F^0A' \longrightarrow F^0A \longrightarrow F^0A'' \xrightarrow{\delta^0} F^1A' \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow F^nA \longrightarrow F^nA'' \xrightarrow{\delta^n} F^{n+1}A' \longrightarrow F^{n+1}A \longrightarrow \cdots$$

exakt.
(ii) Für jeden Morphismus von exakten Sequenzen

(6.26.3) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & A'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

ist das Diagramm

(6.26.4)
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F^nB' \arrow[r] & F^nB \arrow[r] & F^nB'' \arrow[r, "\delta^n"] & F^{n+1}B' \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^nA' \arrow[r] \arrow[u] & F^nA \arrow[r] \arrow[u] & F^nA'' \arrow[r, "\delta^n"'] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & F^{n+1}A' \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

(b) Ein Morphismus $(F^n, \delta^n) \to (F'^n, \delta'^n)$ von δ-Funktoren ist eine Familie $\varphi^n : F^n \to F'^n$ von Morphismen von Funktoren, die mit den δ^n kommutiert, d.h., es kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
F^nA'' \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "\varphi^n_{A''}"'] & F^{n+1}A' \arrow[d, "\varphi^{n+1}_{A'}"] \\
F'^nA'' \arrow[r, "\delta'^n"] & F'^{n+1}A'
\end{tikzcd}$$

(c) Ein δ-Funktor (F^n, δ^n) von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ heißt universell, wenn sich für jeden δ-Funktor (G^n, δ^n) von $\mathcal{A}$ nach B jeder Morphismus von Funktoren

$$f^0 : F^0 \to G^0$$

auf eindeutige Weise zu einem Morphismus

$$f^n : F^n \to G^n \qquad (n \geq 0)$$

von δ-Funktoren fortsetzen lässt.

Beweis von 6.25 Sei $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine exakte Sequenz in A und

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^\cdot \arrow[r] & J^\cdot \arrow[r] & K^\cdot \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein exaktes kommutatives Diagramm, wobei ε, η und ρ injektive Auflösungen sind (Dieses existiert nach 6.16). Die exakten Sequenzen

(6.25.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^n \arrow[r, hook, "i^n"] \arrow[d, equal] & J^n \arrow[r, "p^n"] \arrow[dl, dashed, "\exists s^n"] & K^n \arrow[r] & 0 \\
& I^n & & &
\end{tikzcd}$$

zerfallen alle, d.h., es gibt ein $s^n : J^n \to I^n$ mit $s^n i^n = id_{I^n}$, da I^n injektiv ist. Daher gibt es auch einen Schnitt von p^n, d.h., ein $t^n : K^n \to J^n$ mit $p^n t^n = id_{K^n}$: für $id_{J^n} - i^n s^n$ gilt $(id_{J^n} - i^n s^n) i^n = i^n - i^n s^n i^n = 0$; daher gibt es ein t^n mit $id_{J^n} - i^n s^n = t^n p^n$. Aus $p^n t^n p^n = p^n - p^n i^n s^n = p^n$ folgt $p^n t^n = id_{K^n}$, da p^n ein Epimorphismus ist. Aus dem Zerfallen von (6.25.1) folgt nun, dass auch

$$0 \to FI^n \to FJ^n \to FK^n \to 0$$

exakt ist. Aus der exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \to FI^\cdot \to FJ^\cdot \to FK^\cdot \to 0$$

folgt dann mit 1.19 (a) eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(FI^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^n(FJ^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^n(FK^\cdot) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H^{n+1}(FI^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R^nFA' \arrow[r] & R^nFA \arrow[r] & R^nFA'' \arrow[r] & R^{n+1}A' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir behaupten nun, dass sich ein Morphismus von kurzen exakten Sequenzen wie in (6.26.3) zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & L^\cdot \arrow[rr] & & M^\cdot \arrow[rr] & & N^\cdot \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & B' \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \arrow[ur] \arrow[rr] & & B'' \arrow[ur] \arrow[rr] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & I^\cdot \arrow[rr] \arrow[uu, "f"'] & & J^\cdot \arrow[rr] \arrow[uu, "g"'] & & K^\cdot \arrow[rr] \arrow[uu, "h"'] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[uu] & & A \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[uu] & & A'' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[uu] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

von injektiven Auflösungen fortsetzen lässt. Sei nämlich f eine Fortsetzung von $A' \to B'$. Dann existiert in dem folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & L^0 \arrow[rr] & & M^0 \\
B' \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \arrow[ur] & \\
 & I^0 \arrow[rr] \arrow[uu, "f^0"'] & & J^0 \arrow[uu, dashed, "g^0"'] \\
A' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[uu] & & A \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

der Morphismus g^0, der das Diagramm kommutativ macht. Dies folgt aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(I^0 \oplus A)A' = I^0 \oplus_{A'} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & J^0 \arrow[d, dashed, "g^0"] \\
(L^0 \oplus B)/B' = L^0 \oplus_{B'} B \arrow[r, hook] & M^0
\end{tikzcd}$$

und der Injektivität von J^0. Die Morphismen g^n für $n \geq 1$ werden nun iterativ konstruiert, durch Betrachtung der Kokerne von $A' \to I^0$, $A \to J^0$, $B \to M^0$ und $B' \to L^0$, und entsprechend für die weiteren n, vergleiche den Beweis von 6.14 (b).

Damit wird $(R^nF)_{n\geq 0}$ zu einem δ-Funktor. Dass es auch ein universeller δ-Funktor wird, folgt aus

Lemma 6.27 Ein δ-Funktor $(F^n)_{n\geq 0}$ zwischen abelschen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist universell, wenn die F^n **auslöschbar** (éffacable) für $n > 0$ sind, d.h., wenn es für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ und jedes $n > 0$ einen Monomorphismus $A \overset{u}{\hookrightarrow} M$ gibt, so dass $R^nF(u) = 0$ ist (beachte, dass R^nF nach Bemerkung 6.23 (e) für $n > 0$ auslöschbar ist: ist $A \hookrightarrow I$ eine Monomorphismus in ein injektives Objekt, so ist $R^nF \hookrightarrow R^nFI = 0$ null für $n > 0$).

Beweis Seien bereits Morphismen $f^i : F^i \to F'^i$ für $i \leq n$ konstruiert, die mit den δ^i für $i < n$ kompatibel sind. Für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ wähle einen Monomorphismus $u : A \hookrightarrow M$ mit $F^{n+1}(u) = 0$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F^nM \arrow[r] \arrow[d, "f^n_M"] & F^n(M/A) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "f^n_{M/A}"] & F^{n+1}A \arrow[r, "0"] \arrow[d, dashed, "f^{n+1}_A"] & F^{n+1}M \\
R^nF'M \arrow[r] & F'^n(M/A) \arrow[r, "\delta'^n"] & F'^{n+1}A \arrow[r] & F'^{n+1}M
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen definiert in eindeutiger Weise einen Morphismus f^{n+1}_A wie angedeutet.

Ist $A \overset{v}{\to} N$ ein zweiter Monomorphismus mit $F^{n+1}(v) = 0$, so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, hook, "v"'] & M \arrow[d, hook] \\
N \arrow[r, hook, "\tilde{u}"] & N \oplus_A M = (N \oplus M)/A
\end{tikzcd}$$

also

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & A/M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & N \oplus_A M \arrow[r] & N \oplus_A M/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

entsprechend für N und dies zeigt, dass f^{n+1}_A von u unabhängig ist (die Morphismen f^{n+1}_A für u, v und $A \to N \oplus_A M$ stimmen alle überein). Ist $\varphi : A \to B$ ein Morphismus, so finden wir entsprechend ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook, "v"] & N
\end{tikzcd}$$

mit Monomorphismen u, v, so dass $F^{n+1}(u) = 0 = F^{n+1}(v)$. Dies zeigt, dass $(f^{n+1}_A)_{A\in ob(\mathcal{A})}$ ein Morphismus von Funktoren ist.

Definition 6.28 Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor. Ein Objekt J in $\mathcal{A}$ heißt F-azyklisch, wenn $R^nFJ = 0$ für $n > 0$ (zum Beispiel ist jedes injektive Objekt immer azyklisch nach 6.23 (e)).

Satz 6.29 Sei

$$0 \to A \to J^0 \to J^1 \to J^2 \to \dots$$

eine exakte Sequenz mit F-azyklischen Objekten J^i. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$R^nFA \overset{\sim}{\to} H^n(F(J^\cdot))$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis Es gibt eine kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & J^0 \arrow[r] \arrow[u, hook, "f^0"'] & J^1 \arrow[r] \arrow[u, hook, "f^1"'] & J^2 \arrow[r] \arrow[u, hook, "f^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

wobei die obere Zeile eine injektive Auflösung ist und die Morphismen f^n Monomorphismen sind. Man erhält nämlich das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r] & I^0 \oplus_{J^0} J^1 \\
J^0 \arrow[r] \arrow[u, hook] & J^1 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \qquad ,$$

in dem der rechte vertikale Morphismus notwendigerweise ein Monomorphismus ist, und wähle einen Monomorphismus $I^0 \oplus_{J^0} J^1 \hookrightarrow I^1$ mit injektiven I^1. Dieses Verfahren wird iteriert. Hierbei ist f eindeutig bis auf Homotopie nach 6.14. Wir erhalten also kanonische Morphismen

$$H^n(f^\cdot) : H^n(FI^\cdot) \to H^n(FJ^\cdot) = R^nFA\,.$$

Wir behaupten, dass diese Isomorphismen sind. Sei $K^n = \mathrm{coker}(f^n)$ und

$$0 \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to K^3 \to \dots$$

die induzierte exakte Sequenz. Diese ist exakt nach Corollar 5.12. Weiter sind die K^i F-azyklisch, denn es gilt

Lemma 6.30 Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakt mit A und B F-azyklisch. Dann ist auch C F-azyklisch.

Beweis: Dies folgt aus der langen exakten Kohomologiesequenz.

Sei nun $C^n = \mathrm{coker}(K^{n-1} \to K^n) = \ker(K^{n+1} \to K^{n+2})$. Dann sind also die Sequenzen

$$0 \to C^n \to K^{n+1} \to C^{n+1} \to 0$$

exakt, mit $C^{-1} = 0$, $C^0 = K^0$. Induktiv folgt, dass alle C^n F-azyklisch sind. Daher sind alle Sequenzen

$$0 \to FC^n \to FK^{n+1} \to FC^{n+1} \to 0$$

exakt und es folgt, dass $FK^\cdot$ exakt ist. Andererseits ist

$$0 \to FJ^\cdot \to FI^\cdot \to FK^\cdot \to 0$$

exakt, da $R^1FJ^n = 0$ für alle n. Daher ist

$$FJ^\cdot \to FI^\cdot$$

ein Quasiisomorphismus, und die Behauptung folgt.

7 Garbenkohomologie

Sei X ein topologischer Raum.

Definition 7.1 Eine (abelsche) Garbe $\mathcal{F}$ auf X heißt welk, wenn die Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für alle Inklusionen $V \subseteq U$ von offenen Mengen surjektiv sind.

Beispiel 7.2 Sei X irreduzibel. Dann ist jede konstante Garbe $\underline{A}$ welk auf X: jede offene Menge $U \subseteq X$ ist zusammenhängend, daher ist $\underline{A}(U) = A$ für $U \neq \emptyset$ und jede Restriktion $\underline{A}(U) \to \underline{A}(V)$ ein Isomorphismus für $U, V \neq \emptyset$.

Proposition 7.3 Ist $\mathcal{F}$ eine welke Garbe auf X, so ist $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ für $n > 0$ (d.h., $\mathcal{F}$ ist azyklisch für Kohomologie, d.h., für $\Gamma(X, -)$).

Zum Beweis benötigen wir die folgenden drei Lemmas:

Lemma 7.4 Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, so ist jeder injektive $\mathcal{O}_X$-Modul J welk.

Beweis Für $j_U : U \subseteq X$ offen sei $(j_U)_!(\mathcal{O}_X|_U) =: \mathcal{O}^U$ die Fortsetzung von $\mathcal{O}_{X|_U}$ durch 0. Dann hat man einen Monomorphismus

$$\mathcal{O}^V \hookrightarrow \mathcal{O}^U \qquad \text{für} \quad V \subseteq U\,.$$

Da J injektiv ist, ist die induzierte Abbildung

$$(7.4.1) \qquad Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}^U, J) \twoheadrightarrow Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}^V, J)$$

surjektiv. Nun gilt aber

Lemma 7.5 Sei $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ offen, dann gibt es für $\mathcal{O}_U$-Moduln $\mathcal{F}$ auf U und $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{G}$ kanonische Isomorphismen

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}, j^{-1}\mathcal{G})\,,$$

funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ (d.h., $j_!$ ist linksadjungiert zu j^{-1}).

Beweis: Die Abbildung

$$(7.5.1) \qquad \begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \overset{\sim}{\to} & Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}, \mathcal{G}|_U) \\ \varphi & \mapsto & \varphi|_U \quad (\text{beachte: } j_!\mathcal{F}|_U = \mathcal{F}) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus: Die Umkehrabbildung bildet $\psi \in Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}, \mathcal{G}|_U)$ auf den folgenden Morphismus φ ab:

Es sei daran erinnert (Alg. Geo. II, Übungsaufgabe 15), dass $j_!\mathcal{F}$ die Garbe ist, die zur Prägarbe $j_!^P\mathcal{F}$ mit

$$j_!^P\mathcal{F}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & , \ \text{falls } V \subseteq U, \\ 0 & , \ \text{sonst,} \end{cases}$$

assoziiert ist. Definiere nun den Morphismus $\varphi^P : j_!^P\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben durch

$$\varphi_V^P = \begin{cases} \psi_V & V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\varphi : j_!\mathcal{F} = (j_!^P\mathcal{F})^+ \to \mathcal{G}$ als den (durch die universelle Eigenschaft der assoziierten Garbe) induzierten Morphismus. Dann sieht man leicht, dass dies eine Umkehrabbildung für (7.5.1) liefert.

Damit identifiziert sich (7.4.1) mit einer Surjektion

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, J|_U) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & Hom_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, J|_V) \arrow[d, equal] \\ J(U) \arrow[r, two heads] & J(V) \end{tikzcd}$$

J ist also welk.

Lemma 7.6 Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von abelschen Garben auf X.

(a) Ist $\mathcal{F}$ welk, so ist für jedes offene $U \subseteq X$ die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U) \to 0$$

exakt.

(b) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk, so auch $\mathcal{H}$.

Beweis (a): Sei $s \in \mathcal{H}(U)$. Die Menge

$$E = \{(V,t) \mid V \subseteq U \text{ offen }, t \in \mathcal{G}(V) \text{ mit } t \mapsto s|_V\}$$

ist dann bezüglich der (partiellen) Ordnung

$$(V,t) \leq (V',t') \;\Leftrightarrow\; V \subseteq V' \text{ und } t = t'|_V$$

offenbar induktiv geordnet. Nach Zorns Lemma besitzt E also ein maximales Element (V_0, t_0). Angenommen es ist $V_0 \neq U$. Sei $x \in U - V_0$. Da der Garbenmorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ein Epimorphismus ist, existiert eine offene Umgebung W von x in U und ein Schnitt $r \in \mathcal{G}(U)$ mit $r \mapsto s|_W$. Dann ist

$$r|_{V_0 \cap W} - t_0|_{V_0 \cap W} \in \mathcal{F}(V_0 \cap W)\,.$$

Da $\mathcal{F}$ welk ist, gibt es ein $r' \in \mathcal{F}(W)$ mit

$$r'|_{V_0 \cap W} = r|_{V_0 \cap W} - t_0|_{V_0 \cap W}\,.$$

Ersetzen wir r durch $r - r'$, so können wir also annehmen, dass

$$r|_{V_0 \cap W} = t_0|_{V_0 \cap W}\,.$$

Nach der Garbeneigenschaft gibt es also ein $t_1 \in \mathcal{G}(V_0 \cup W)$ mit

$$t_1|_{V_0} = t_0 \quad \text{und} \quad t_1|_W = r\,,$$

also auch $t_1 \mapsto s|_{V_0 \cap W}$, im Widerspruch zur Maximalität von (V_0, t_0). Es ist also $V_0 = U$, woraus (a) folgt.

(b): Sei $V \subseteq U$ offen. Da $\mathcal{F}$ welk ist, haben wir nach (a) ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathcal{H}(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{G}(V) \arrow[r] & \mathcal{H}(V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Die mittlere Restriktion $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ ist surjektiv, da $\mathcal{G}$ welk ist. Hieraus folgt die Surjektivität von $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(V)$.

Beweis von Proposition 7.3: Wir beweisen durch Induktion nach n, dass $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ für $n > 0$, falls $\mathcal{F}$ welk ist. Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$$

mit einer injektiven Garbe $\mathcal{I}$. Dann ist $H^i(X, \mathcal{I}) = 0$ für alle $i > 0$ (siehe 6.23 (e)). Aus der exakten Kohomologiesequenz

$$\mathcal{I}(X) \to \mathcal{G}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{I}) = 0\,,$$

in der die erste Abbildung nach Lemma 7.6 (a) surjektiv ist, folgt dann $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Für $n > 1$ folgen aus der langen exakten Kohomologiesequenz Isomorphismen

$$H^{n-1}(X, \mathcal{G}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} H^n(X, \mathcal{F})\,,$$

und nach 7.4 und 7.6 (b) ist $\mathcal{G}$ welk. Dies liefert den Induktionsschritt.

Corollar 7.7 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geeigneter Raum. Die Rechtsableitungen des Funktors

$$\begin{array}{rrcl} \Gamma_{\mathcal{O}_X}: & (\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) & \to & \underline{Ab} \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \Gamma(X, \mathcal{F}) \end{array}$$

stimmen mit den Kohomologiefunktoren $H^n(X, -)$ überein.

Beweis Ist $\mathcal{F} \to J^{\cdot}$ eine Auflösung des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$ durch injektive $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist $R^n\Gamma_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} = H^n(J^{\cdot}(X))$ nach Definition, und dies ist nach 7.4 (die J^n sind welke Garben), 7.3 (welke Garben sind azyklisch) und 6.29 (die Kohomologie kann mit azyklischen Auflösungen berechnet werden) gleich $H^n(X, \mathcal{F})$.

Bemerkung 7.8 Ist $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, so faktorisiert Γ_{G_X} in 7.7 über Mod_A und daher auch alle $R^i\Gamma_{\mathcal{O}_X}$. Daher sind alle Kohomologiegruppen $H^n(X, \mathcal{F})$ in $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ in natürlicher Weise A-Moduln.

Satz 7.9 (Grothendieck) Sei X ein noetherscher topologischer Raum der (kombinatorischen) Dimension d. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle Garben $\mathcal{F}$ und alle $i > d$.

Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 7.10 Sei $i : Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $j : U = X \smallsetminus Y \hookrightarrow X$ das offene Komplement. Für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf X gibt es eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \to j_! j^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} i_* i^{-1}\mathcal{F} \to 0\,,$$

funktoriell in $\mathcal{F}$.

Beweis α und β sind die Adjunktionsabbildungen (siehe Alg. Geo. II, 6.7 für β und Alg. Geo II, Übungsaufgabe 17 für α). Die Exaktheit folgt nun durch Betrachtung der Halme. Für $x \in X$ ist nämlich

$$\begin{array}{ccll}
(j_! j^{-1}\mathcal{F})_x & \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha_x}} & \mathcal{F}_x & \text{für } x \in U \\
(j_! j^{-1}\mathcal{F})_x & = & 0 & \text{für } x \notin U \\
\mathcal{F}_x & \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta_x}} & (i_* i^{-1}\mathcal{F})_x & \text{für } x \in Y \\
0 & = & (i_* i^{-1}\mathcal{F})_x & \text{für } x \notin Y
\end{array}$$

Lemma 7.11 Ist $i : Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so gibt es für Garben $\mathcal{F}$ auf Y kanonische, funktorielle Isomorphismen

$$H^n(X, i_*\mathcal{F}) \cong H^n(Y, \mathcal{F})\,.$$

Beweis Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\cdot$ eine injektive Auflösung auf Y. Dann ist $i_*\mathcal{F} \hookrightarrow i_*I^\cdot$ eine welke Auflösung von $i_*\mathcal{F}$, da i_* exakt ist (betrachte die Halme) und für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ der Funktor f_* offenbar welke Garben in welke Garben überführt. Es folgt $H^n(X, i_*\mathcal{F}) = H^n(i_*J^\cdot(X)) = H^n(J^\cdot(Y)) = H^n(Y, \mathcal{F})$.

Lemma/Definition 7.12 (Godement-Auflösung) Für eine (abelsche) Garbe $\mathcal{F}$ auf X und $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathcal{C}(U, \mathcal{F}); = \{s : U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid s(x) \in \mathcal{F}_x\} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

die Gruppe der "diskontuierlichen Schnitte von $\mathcal{F}$ über U".

(a) Dann ist

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) :\ U \mapsto \mathcal{C}(U, \mathcal{F})$$

eine welke Garbe auf X, und der kanonische Morphismus

$$\begin{array}{rlcl}
\varepsilon = & \varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{F}) \\
& s \in \mathcal{F}(U) & \mapsto & (x \mapsto s_x)
\end{array}$$

ist ein Monomorphismus von Garben.

(b) Setze $\mathcal{C}^0(\mathcal{F}) = \mathcal{C}(\mathcal{F})$ und definiere den Komplex

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \to \dots$$

induktiv wie folgt: Sei $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon = d^{-1}} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \to \dots \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^{n-1}} \mathcal{C}^n(\mathcal{F})$ bereits definiert, mit ε wie in (a). Dann sei

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{G}^n = & \operatorname{coker}(d^{n-1})\,, \\
\eta^n = & \varepsilon_{\mathcal{G}^n} : \mathcal{G}^n \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^n) =: \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{F})\,,\ \text{und} \\
d^n : & \mathcal{C}^n(\mathcal{F}) \overset{\text{can}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{G}^n \overset{\eta^n}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{F})
\end{array}$$

die Komposition. Dann ist $\mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{F})$ eine welke Auflösung von $\mathcal{F}$ und heißt die Godement Auflösung.

Alle Behauptungen sind klar.

In $\mathcal{S}(X)$ existieren induktive Limiten. Dies folgt aus allgemeinen Gründen (siehe 6.9); eine explizite Beschreibung ist wie folgt: Ist $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein induktives System in $\mathcal{S}(X)$ und $\mathcal{F}' = \varinjlim_\alpha{}^P \mathcal{F}_\alpha$ der Prägarbenlimes, d.h., $\mathcal{F}'(U) = \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha(U)$, so ist $(\mathcal{F}')^+$ der Garbenlimes (die universelle Eigenschaft folgt sofort aus den Definitionen).

Proposition 7.13 Sei X ein noetherscher topologischer Raum und $(\mathcal{F}_\alpha)$ ein induktives System von abelschen Garben auf X.

(a) Es gibt kanonische Isomorphismen

$$\varinjlim_\alpha H^n(X, \mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha)\,.$$

(b) Sind alle $\mathcal{F}_\alpha$ welk, so auch $\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha$.

Beweis $\mathcal{F} := \varinjlim_\alpha{}^P \mathcal{F}_\alpha$ ist bereits eine Garbe: das Garbenaxiom ist wegen der Quasikompaktheit von jedem offenen $U \subseteq X$ nur auf *endlichen* Überdeckungen zu überprüfen; aber der direkte Limes vertauscht mit endlichen Summen. Bilden wir also den direkten Limes über die exakten Sequenzen

$$0 \to \mathcal{F}_\alpha(U) \to \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_\alpha(U_i) \to \prod_{i\cdot j=1} \mathcal{F}_\alpha(U_i \cap U_j)$$

so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_{i=1}^n \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j=1}^n \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

also die Garbeneigenschaft für $\mathcal{F}$. Dies zeigt (a) für $n = 0$.

(b): Da der induktive Limes auf abelschen Gruppen exakt ist, ist für ein System $(\mathcal{F}_\alpha)$ welker Garben die Abbildung

$$(\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha)(U) = \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha(U) \to \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha(V) = (\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha)(V)$$

für $V \subseteq U$ offen surjektiv.

Hiermit zeigen wir nun (a) für alle n:

Seien $\mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{F}_\alpha)$ die Godement-Auflösungen, dann ist

(7.13.1) $$\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha \to \varinjlim_\alpha \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{F}_\alpha)$$

eine welke Auflösung von $\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha$. Denn erstens ist $\varinjlim_\alpha$ ein exakter Funktor auf Garben (Man betrachtet die Halme und verwendet, dass zwei induktive Limiten miteinander vertauschen. Genauer hat man für $x \in X$ Isomorphismen

$$(\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha)_x = \varinjlim_{U \ni x}((\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha)(U)) = \varinjlim_{U \ni x}(\varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha(U)) \overset{(*)}{=} \varinjlim_\alpha(\varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}_\alpha(U)) = \varinjlim_\alpha(\mathcal{F}_\alpha)_x\,,$$

wobei U über die offenen Umgebungen von x läuft. Die Vertauschung der Limiten ist die Gleichheit $(*)$). Daher ist (7.13.1) exakt. Weiter sind die Garben $\varinjlim_\alpha \mathcal{C}^n(\mathcal{F}_\alpha)$ nach (b) welk.

Nach 7.3 und 6.29 ist also

$$\begin{aligned} H^n(X, \varinjlim_\alpha \mathcal{F}_\alpha) &= H^n((\varinjlim_\alpha \mathcal{C}^\cdot(\mathcal{F}_\alpha))(X)) &&= H^n(\varinjlim_\alpha(\mathcal{C}^\cdot(\mathcal{F}_\alpha)(X))) \\ &\overset{(*)}{=} \varinjlim_\alpha H^n(\mathcal{C}^\cdot(\mathcal{F}_\alpha)(X)) &&= \varinjlim_\alpha H^n(X, \mathcal{F}_\alpha)\,, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit $(*)$ aus der Exaktheit des direkten Limes folgt.

Beweis von Satz 7.9 Wir führen Induktion über $d = \dim X$. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X, einen abgeschlossenen Teilraum $i : Y \hookrightarrow X$ und das offene Komplement $j : U = X - Y \hookrightarrow X$ setze

$$\mathcal{F}_Y = i_* i^{-1}\mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_U = j_! j^{-1}\mathcal{F}\,.$$

Dann haben wir nach 7.10 eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0\,.$$

Also genügt es zu zeigen:

$$H^n(X, \mathcal{F}_U) = \ 0 \ = H^n(X, \mathcal{F}_Y) \quad \text{für } n > d\,.$$

Nach 7.11 ist $H^n(X, \mathcal{F}_Y) \cong H^n(Y, i^*\mathcal{F})$; weiter ist $\dim Y \leq d$. Durch Betrachtung der endlich vielen irreduziblen Komponenten $Y_1, \ldots, Y_N$ von X und Induktion über die Anzahl derselben können wir weiter annehmen, dass X irreduzibel ist ($X - Y_N$ hat weniger irreduzible Komponenten).

Schritt 1: Ist X irreduzibel von der Dimension 0, so besteht X nur aus einem Punkt, und der Schnittfunktor $\Gamma(X, -)$ ist exakt (Ist $X = \{x\}$, so gilt $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}_x$). Hieraus folgt, dass $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ für $n > 0$. Sei also $d > 0$.

Schritt 2: Sei

$$B = \bigcup_{U \subseteq X \text{ offen}} \mathcal{F}(U)\,.$$

Für jede endliche Teilmenge $B' \subseteq B$ sei $\mathcal{F}_{B'} \subseteq \mathcal{F}$ die Untergarbe, die von allen $s \in B'$ erzeugt wird: Für $s \in B'$, $s \in \mathcal{F}(U)$, setze

$$\begin{array}{rccc} F_s = & im(\mathbb{Z}_U & \to & \mathcal{F}) \\ & 1 & \mapsto & s \end{array}$$

(Beachte $Hom_X(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) = Hom_U(\mathbb{Z}, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U)$). Damit sei

$$\mathcal{F}_{B'} = \sum_{s \in B'} \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}\,.$$

Dann ist

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{B'} \mathcal{F}_{B'}\,,$$

und wegen 7.13 (a) genügt es, die Garben $\mathcal{F}_{B'}$ zu betrachten.

Schritt 3: Für $s \in B - B'$ haben wir dann eine exakte Sequenz

$$(7.9.1) \qquad 0 \to \mathcal{F}_{B'} \to \mathcal{F}_{B' \cup \{s\}} \to \mathcal{G} \to 0\,,$$

wobei $\mathcal{G}$ von einem Schnitt erzeugt wird (nämlich vom Bild von s). Mittels der langen exakten Kohomologiesequenz für (7.9.1) und Induktion können wir also annehmen, dass $\mathcal{F}$ von einem Schnitt erzeugt wird, dass wir also eine exakte Sequenz

$$(7.9.2) \qquad 0 \to \mathcal{R} \to \mathbb{Z}_U \to \mathcal{F} \to 0$$

für ein $U \subseteq X$ offen haben.

Schritt 4: Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_Y \to 0$$

für $Y = X - U$ abgeschlossen in X, und eine exakte Kohomologiesequenz

$$(7.9.3) \qquad H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \xrightarrow{\delta} H^n(X, \mathbb{Z}_U) \to H^n(X, \mathbb{Z})\,.$$

Da X als irreduzibel vorausgesetzt ist, ist $\mathbb{Z}$ eine welke Garbe (Beispiel 7.2), also $H^n(X, \mathbb{Z}) = 0$ für $n > 0$. Ist $U \neq \emptyset$, so ist weiter $\dim Y < d$ wegen der Irreduzibilität von X, also $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \cong H^{n-1}(Y, \mathbb{Z}) = 0$ für $n - 1 > d - 1$ nach Induktion. Wegen (7.9.3) ist also $H^n(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ für $n > d > 0$.

Schritt 5: Betrachte die Sequenz (7.9.2). Ist $\mathcal{R} = 0$, so sind wir nach Schritt 4 fertig. Sei $\mathcal{R} \neq 0$. Für jedes $x \in U$ ist dann $\mathcal{R}_x \subseteq \mathbb{Z}$, und es gibt ein $x \in U$ mit $\mathcal{R}_x \neq 0$. Sei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl > 0 mit $m \in \mathcal{R}_x$ für ein $x \in U$. Dann existiert ein offenes $V \subset U$ mit $\mathcal{R}|_V = m\mathbb{Z}|_V$ als Untergarbe der Garbe $\mathbb{Z}_{U|V} = \mathbb{Z}|_V$. Die exakte Sequenz

$$(7.9.4) \qquad 0 \to \mathcal{R}_V \to \mathcal{R} \to \mathcal{R}_Z \to 0$$

für $Z = X - V$ zeigt dann wegen $\mathcal{R}_V \cong \mathbb{Z}_V$ und Schritt 4 $H^n(X, \mathcal{R}_V) = 0$ für $n > d$. Wegen $\dim Z < d$ gilt per Induktion, dass $H^n(X, \mathcal{R}_Z) \cong H^n(Z, \mathcal{R}|_Z) = 0$ für $n > d - 1$. Mit der langen exakten Kohomologiesequenz zu (7.9.4) folgt nun

$$H^n(X, \mathcal{R}) = 0 \quad \text{für } n > d$$

und mit der Kohomologiesequenz zu (7.9.2) und Schritt 4 dann

$$H^n(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } n > d\,.$$

Definition 7.14 Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, dann ist $f_* : Sh(X) \to Sh(Y)$ linksexakt; $R^i f_*$ seien die abgeleiteten Funktoren. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X heißt $R^i f_* \mathcal{F}$ das i-te **höhere direkte Bild** von $\mathcal{F}$.

Proposition 7.15 (a) $R^i f_* \mathcal{F}$ ist die Garbe assoziiert zur Prägarbe

$$Y \underset{\text{offen}}{\supseteq} V \leadsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}) .$$

(b) Welke Garben auf X sind f_*-azyklisch (also kann $R^i f_* \mathcal{F}$ mit welken Auflösungen von $\mathcal{F}$ berechnet werden).

Beweis Vorüberlegung: Für $U' \subset U$ offen in X hat man kanonische Restriktionshomomorphismen

$$H^i(U, \mathcal{F}|_U) \to H^i(U', \mathcal{F}|_{U'}) ,$$

die die Zuordnung $U \mapsto H^i(U, \mathcal{F}|_U)$ zu einer abelschen Prägarbe auf X machen. Ist nämlich $F \hookrightarrow I^\cdot$ eine injektive Auflösung, so ist $I^\cdot$ auch eine welke Auflösung, und damit trivialerweise auch für jedes offene $U \subseteq X$

$$\mathcal{F}|_U \hookrightarrow I^\cdot|_U$$

eine welke Auflösung. Wir erhalten dann die obige Restriktionsabbildung als den Homomorphismus

$$H^i(U, \mathcal{F}|_U) = H^i(I^\cdot(U)) \to H^i(I^\cdot(U')) = H^i(U', \mathcal{F}|_{U'}) ,$$

der von dem Morphismus von Komplexen $I^\cdot(U) \to I^\cdot(U')$ induziert wird. Die behaupteten Eigenschaften folgen.

(a): Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\cdot$ eine injektive Auflösung auf X. Dann ist

$$R^n f_* \mathcal{F} \ = \ H^n(f_* I^\cdot)$$

die Garbe, die zum Prägarben Quotienten

$$V \mapsto \ker^P(f_* I^n \to f_* I^{n+1})(V)/im^P(f_* I^{n-1} \to f_* I^n)(V)$$

assoziiert ist. Dies ist aber gerade die Prägarbe

$$V \mapsto \ker(I^n(f^{-1}(V)) \to I^{n+1}(f^{-1}(V)))/im(I^{n-1}(f^{-1}(V)) \to I^n(f^{-1}(V)))$$
$$= H^n(I^\cdot(f^{-1}(V))) = H^n(f^{-1}(V), \mathcal{F}) .$$

(b) folgt nun aus (a) und 7.3 ($H^n(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = 0$ für $n > 0$ falls $\mathcal{F}$ welk ist).

Corollar 7.16 Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von geringten Räumen. Für $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ kann $R^n f_* \mathcal{F}$ als n-te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$f_* : (\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \to (\mathcal{O}_Y\text{-Moduln})$$

berechnet werden und hat daher eine kanonische $\mathcal{O}_Y$-Modul-Struktur.

Beweis Injektive $\mathcal{O}_X$-Modul sind nach 7.4 welk, nach 7.15 (b) also f_*-azyklisch. Die Behauptung folgt also wie in 7.7.

8 Čech-Kohomologie und die Kohomologie affiner Schemata

Sei X ein topologischer Raum.

Lemma/Definition 8.1 Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{P}$ eine abelsche Prägarbe auf X.

(a) Für jedes $(n+1)$-Tupel $(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$ setze

$$U_{i_0,\dots,i_n} := U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}\,,$$

und für $n \geq 0$ definiere die abelsche Gruppe

$$\mathrm{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := \prod_{\underline{i}\in I^{n+1}} \mathcal{P}(U_{\underline{i}})$$

und den Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} d^n : \mathrm{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) & \to & \mathrm{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \\ s = (s_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I^{n+1}} & \mapsto & (\sum\limits_{j=1}^{n+1} (-1)^j s_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{n+1}|U_{i_0,\dots,i_{n+1}}})_{(i_0,\dots,i_{n+1})} \end{array}$$

Dann ist $d^{n+1}d^n = 0$, d.h., wir erhalten einen Komplex $\mathrm{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$, den **Čech-Komplex** zu $\mathfrak{U}$ und $\mathcal{P}$.

(b) Für $n \geq 0$ heißt $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := H^n(\mathrm{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{P}))$ die n-te **Čech-Kohomologiegruppe** von $\mathcal{P}$ zur Überdeckung $\mathfrak{U}$.

Beweis dass $d^{n+1}d^n = 0$: selbst.

Bemerkung 8.2 Ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe, so haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F})\,,$$

da die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \overset{d^0}{\to} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

exakt ist.

Satz 8.3 Für abelsche Garben $\mathcal{F}$ auf X gibt es kanonische Homomorphismen

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})\,,$$

die funktoriell in $\mathcal{F}$ sind.

Beweis Sei $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ die Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{C}^n(\mathfrak{U}|_U, \mathcal{F})$$

mit den offensichtlichen Restriktionen, wobei $\mathfrak{U}|_U = (U_i \cap U)_{i\in I}$ als Überdeckung von U. Man sieht leicht, dass dies eine Garbe ist, wenn $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. Wir erhalten einen Komplex von Garben

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \dots \tag{8.3.1}$$

Lemma 8.4 Für jede Garbe $\mathcal{F}$ ist der Komplex (8.3.1) exakt, d.h., $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ ist eine Auflösung von $\mathcal{F}$.

Beweis Es genügt, für genügend kleine Umgebungen V jedes Punktes $x \in X$ zu zeigen, dass der folgende Komplex exakt ist

$$0 \to \mathcal{F}(V) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i \cap V) \xrightarrow{d^0} \prod_{I\times I} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1} \cap V) \xrightarrow{d^1} \dots \tag{8.4.1}$$

Dieser Komplex identifiziert sich aber mit

$$0 \to Hom(\mathbb{Z}_V,\mathcal{F}) \to \prod_{i\in I} Hom(\mathbb{Z}_{U_i\cap V},\mathcal{F}) \to \prod_{I\times I} Hom(\mathbb{Z}_{U_{i_0,i_1}},\mathcal{F}) \to \dots\,,$$

beziehungsweise mit dem Komplex

$$0 \to Hom(\mathbb{Z}_V,\mathcal{F}) \to Hom(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{U_i\cap V},\mathcal{F}) \to Hom(\bigoplus_{I\times I} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}},\mathcal{F}) \to \dots\,,$$

der durch Anwenden von $Hom(-,\mathcal{F})$ auf den offensichtlichen Komplex

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}_V \leftarrow \bigoplus_I \mathbb{Z}_{U_i\cap V} \overset{\partial_0}{\leftarrow} \bigoplus_{I\times I} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}\cap V} \overset{\partial_1}{\leftarrow} \dots \tag{8.4.2}$$

entsteht. Wir zeigen, dass dieser Komplex nullhomotop ist, falls $V \subseteq U_j$ für ein $j \in I$; dann folgt auch, dass (8.4.1) nullhomotop und damit exakt ist. Aber eine 'kontrahierende Homotopie' für (8.4.2) ist durch die folgenden Morphismen

$$s_m : \bigoplus_{I^m} \mathbb{Z}_{U_{\underline{i}}\cap V} \to \bigoplus_{I^{m+1}} \mathbb{Z}_{U_{\underline{i}}\cap V}$$

für $m \geq 0$ gegeben (wobei $j \in I$ mit $V \subseteq U_j$):

$$\begin{aligned} s_0(1_V) &= 1_{U_j\cap V} \\ s_m(1_{U_{i_j\cdots i_{m-1}}\cap V}) &= 1_{U_{j i_0\cdots i_{m-1}}\cap V} \qquad (m > 0) \end{aligned}$$

(mit der offensichtlichen Bedeutung der Schnitte $1_{U_{\underline{i}}}$ von $\mathbb{Z}_{U_{\underline{i}}}$). Damit gilt nämlich (nachrechnen!)

$$\partial_m s_{m+1} + s_m \partial_{m-1} = id \qquad (m \geq 0)\,,$$

d.h., $id \sim 0$, d.h., (8.4.2) ist nullhomotop.

Wir führen den Beweis von 8.3 weiter. Ist $\mathcal{F} \hookrightarrow J^\cdot$ eine injektive Auflösung, so erhalten wir nach 6.14 (b) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & J^\cdot \\ \mathcal{F} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})\,, \arrow[uu, "f"'] \end{tikzcd} \tag{8.3.2}$$

wobei der Morphismus f (von Komplexen von Garben) bis auf Homotopie eindeutig ist. Letzterer induziert die gewünschten kanonischen Morphismen

$$\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = H^n(\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})(X)) \to H^n(J^\cdot(X)) = H^n(X,\mathcal{F})\,.$$

Die Funktorialität folgt ebenfalls aus 6.14 (durch Verbindung der Konstruktion in 6.22 (ii) mit den Diagrammen (8.3.2)).

Lemma 8.5 Ist $\mathcal{F}$ eine welke Garbe auf X, so ist $\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$ für $n > 0$.

Beweis Ist $\mathcal{F}$ welk, so ist offenbar jedes $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ welk. Nach 8.4 ist $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ also eine welke Auflösung von $\mathcal{F}$. Damit ist

$$\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = H^n(\mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})) = H^n(\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})(X)) \overset{(1)}{=} H^n(X,\mathcal{F}) \overset{(2)}{=} 0$$

für $n > 0$, wobei die Gleichheiten (1) und (2) nach 7.3 und 6.29 gelten.

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 8.6 (Verschwindungssatz von Serre) Sei X ein affines Schema und $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist

$$H^n(X,\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{für} \quad n > 0\,.$$

Hierzu zeigen wir zunächst:

Proposition 8.7 Sei $\mathfrak{U} = (U_1,\ldots,U_m)$ eine Überdeckung von X durch endlich viele offene Standardmengen. Dann ist

$$\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{für} \quad n > 0\,.$$

Beweis Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $U_i = D(f_i) = \mathrm{Spec}(A_{f_i})$ für $f_i \in A$ $(i = 1,\ldots,m)$. Dann ist $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen A-Modul M, sowie

$$\begin{aligned} U_{i_0\ldots i_n} &= \mathrm{Spec}(A_{f_0\ldots f_n}) \\ \mathcal{F}(U_{i_0\ldots i_n}) &= M_{f_0\ldots f_n}\,. \end{aligned}$$

Sei nun

$$Y = U_1 \amalg \cdots \amalg U_m = \mathrm{Spec}(B)$$

für $B = A_{f_1} \times \ldots \times A_{f_m}$. Dann ist

$$\coprod_{\underline{i}\in I^{n+1}} U_{\underline{i}} = Y \times_X \ldots \times_X Y \qquad (n+1 \text{ Faktoren})\,,$$

denn es ist

$$A_{f_{i_0}\cdots f_{i_n}} = A_{f_{i_0}} \otimes_A \ldots \otimes_A A_{f_{i_n}}\,.$$

Weiter gilt

$$\mathrm{C}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = M \otimes_A \underbrace{B \otimes_A \ldots \otimes_A B}_{(n+1)\mathrm{mal}},$$

denn es ist

$$M_{f_{i_0}\cdots f_{i_n}} = M \otimes_A A_{f_{i_o}\cdots f_{i_n}} = M \otimes_A A_{f_{i_0}} \otimes_A \ldots \otimes_A A_{f_{i_n}}\,.$$

$C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist also isomorph zum Komplex

$$M \otimes_A B \xrightarrow{d^0} M \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d^1} M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d^2} \ldots\,, \tag{8.7.1}$$

wobei

$$d^n(m \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i m \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \otimes \ldots \otimes b_n\,.$$

Es genügt also zu zeigen:

Lemma 8.8 Der Komplex (8.7.1) ist exakt.

Wir zeigen eine etwas allgemeinere Tatsache.

Definition 8.9 Ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ (von kommutativen Ringen mit Eins) heißt **treuflach**, wenn gilt:
(i) φ ist flach, (d.h., der Funktor $- \otimes_A B$ von Mod_A nach Mod_B ist exakt), und
(ii) für jeden A-Modul M folgt aus $M \otimes_A B = 0$ auch $M = 0$.

Beispiel 8.10 Der Ringhomomorphismus

$$\varphi : A \to B = A_{f_1} \times \ldots \times A_{f_m}$$

aus dem Beweis von 8.7 ist treuflach: Die Flachheit ist klar (jede Lokalisierung $A \to A_{f_i}$ ist flach), und ist für einen A-Modul M der Modul $M \otimes_A B = M_{f_1} \times \ldots \times M_{f_m}$ null, also $M_{f_i} = 0$ für alle i, so ist $M = 0$, da $\mathrm{Spec}(A)$ von den $D(f_i)$ überdeckt wird.

Daher folgt Lemma 8.8 aus:

Lemma/Definition 8.11 Für einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ und einen A-Modul M definiere den Komplex

$$C(M, \varphi) : 0 \to M \to M \otimes_A B \xrightarrow{d^0} M \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d^1} M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d^2} \ldots$$

mit

$$d^n(m \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i m \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \otimes \ldots \otimes b_n\,.$$

Beweis dass $d^{n+1}d^n = 0$: selbst.

Satz 8.12 Ist $\varphi : A \to B$ ein treuflacher Ringhomomorphismus, so ist $C(M, \varphi)$ für jeden A-Modul M exakt.

Beweis 1. Fall: Es gebe einen Ringhomomorphismus $\psi : B \to A$ mit $\psi\varphi = id_A$. Definiere dann

$$s^n : M \otimes_A B^{\otimes(n+1)} \to M \otimes_A B^{\otimes n}$$

durch

$$s^n(m \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_n) = \psi(b_0)m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_n \,.$$

Dann ist (s^n) eine kontrahierende Homotopie, d.h.,

$$s^{n+1}d^n + d^{n+1}s^n = id \,,$$

so dass $C(M,\varphi)$ exakt ist.

2. Fall: Sei A' eine A-Algebra und

$$\begin{array}{rcl} \varphi' = \varphi \otimes id_{A'} : A' \cong A \otimes_A A' & \to & B \otimes_A A' =: B' \\ a' & \mapsto & 1 \otimes a' \end{array}$$

der Basiswechsel (die Skalarerweiterung) von φ mit A'. Dann ist

$$C^\cdot(M \otimes_A A', \varphi') \cong C^\cdot(M,\varphi) \otimes_A A' \,,$$

denn es ist

$$(M \otimes_A B \otimes_A \ldots \otimes_A B) \otimes_A A' \cong (M \otimes_A A') \otimes_{A'} B' \otimes_{A'} \ldots \otimes_{A'} B' \,.$$

Ist $A \to A'$ treuflach, so ist $C^\cdot(M,\varphi)$ genau dann exakt, wenn $C^\cdot(M,\varphi) \otimes_A A'$ exakt ist, denn aus der Flachheit folgt eine Isomorphie

$$H^n(C^\cdot(M,\varphi) \otimes_A A') \cong H^n(C^\cdot(M,\varphi)) \otimes_A A' \,.$$

Sei nun $A \to B$ treuflach und $A' = B$. Dann wird φ' der Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \varphi' : & B & \to & B \otimes_A B \\ & b & \mapsto & 1 \otimes b \,. \end{array}$$

Für den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & B \otimes_A B & \to & B \\ & b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_1 b_2 \end{array}$$

gilt $\psi\varphi' = id$; also ist $C^\cdot(M \otimes_A B, \varphi')$ exakt nach Fall 1. Nach den obigen Überlegungen ist also $C^\cdot(M,\varphi)$ exakt.

Satz 8.6 (Serres Satz) folgt nun aus 8.7. und

Lemma 8.13 Die Garbe $\mathcal{F}$ auf $X = \mathrm{Spec}(A)$ erfülle die Eigenschaft

(E1) Für alle Überdeckungen $\mathfrak{U} = (U_1, \ldots, U_r)$ durch endlich viele offene Standardmengen gilt $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $n > 0$.

Dann ist $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $n > 0$.

Beweis Wir führen Induktion über $n \geq 1$. Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow J^\cdot$ eine injektive Auflösung, so dass $H^j(X,\mathcal{F}) = H^i(J^\cdot(X))$ für alle j. Sei $s \in \ker(J^1(X) \to J^2(X))$. Da die Sequenz $J^0 \to J^1 \to J^2$ exakt ist, und da X affines Schema und damit quasi-kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_1, \ldots, U_r)$ von X durch offene Standardmengen U_i, so dass

(8.13.1) $$s|_{U_i} \in im(J^0(U_i) \to J^1(U_i)) \quad \text{für alle } i.$$

Wir haben ein kommutatives Diagramm (und Elemente $s, s_0 \ldots$, die unten definiert werden).

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d] & J^0(X) \arrow[r] \arrow[d, "w_0"'] & J^1(X) \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & J^2(X) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "w_1"'] & \mathrm{C}^0(\mathfrak{U}, J^0) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{t_0}{,}t_0"'] & \mathrm{C}^0(\mathfrak{U}, J^1) \arrow[d, "s_0"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "t_1"'] & \mathrm{C}^1(\mathfrak{U}, J^0) \arrow[r] \arrow[d, "s_1"'] & \mathrm{C}^1(\mathfrak{U}, J^1) & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{C}^2(\mathfrak{U}, J^0) & &
\end{tikzcd}
$$

Die erste (nicht-triviale) Spalte ist wegen (E1) (und Bemerkung 8.2) exakt. Da J^0 injektiv ist, ist J^0 nach 7.4 (angewandt auf $(X, \mathbb{Z})$) welk; nach Lemma 8.5 ist also auch die zweite Spalte exakt.

Eine Diagrammjagd zeigt nun, dass $s \in im(J^0(X) \to J^1(X))$: Nach (8.13.1) ist das Bild

$$s_0 = (s|_{U_i}) \in C^1(\mathfrak{U}, J^1)$$

von s Bild eines Elements $t_0 \in C^1(\mathfrak{U}, J^0)$. Dessen Bild s_1 in $C^1(\mathfrak{U}, J^0)$ wird auf $0 \in C^1(\mathfrak{U}, J^1)$ abgebildet (das Bild von s_0), kommt also von einem Element $t_1 \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ (wegen der Exaktheit der dritten Zeile – Linksexaktheit des Schnittfunktors). Weil t_1 auf $0 \in C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ abgebildet wird, ist t_1 Bild eines Elements $w_1 \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ (Injektivität von $C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathfrak{U}, J^0)$ und Exaktheit der 1. Spalte). Dann wird $\tilde{t_0} = t_0 - w_1$ ebenfalls auf s_0 abgebildet, aber auf $0 \in C^1(\mathfrak{U}, J^0)$, kommt also von einem Element $w_0 \in J^0(X)$. Wegen der Exaktheit der 2. und 3. Spalte wird w_0 auf s abgebildet. Dies zeigt die Behauptung für $n = 1$.

Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ bewiesen, und sei $\mathcal{F} \hookrightarrow J$ eine Einbettung in eine injektive Garbe. Dann haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F} \to J \to \mathcal{F}' \to 0\,. \tag{8.13.2}$$

Wir behaupten, dass $\mathcal{F}'$ ebenfalls (E1) erfüllt: Sei $\mathfrak{U}$ nämlich eine Überdeckung wie in (E1). Dann ist die assoziierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathrm{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, J) \xrightarrow{\beta} \mathrm{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to 0 \tag{8.13.3}$$

exakt. Wegen der Linksexaktheit des Schnittfunktors ist nun die Surjektivität von β zu zeigen. Da alle $U_{\underline{i}}$ affin sind, ist aber noch dem eben Gezeigtem $H^1(U_{\underline{i}}, \mathcal{F}) = 0$, also

$$0 \to \mathcal{F}(U_{\underline{i}}) \to J(U_{\underline{i}}) \to \mathcal{F}'(U_{\underline{i}}) \to H^1(U_{\underline{i}}, \mathcal{F}) = 0$$

exakt. Aus der exakten Sequenz (8.13.3) folgt nun $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') = 0$ für $n > 0$, also Eigenschaft (E1) für $\mathcal{F}'$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $H^{n-1}(X, \mathcal{F}') = 0$. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz zu (8.13.2)

$$0 = H^{n-1}(X, \mathcal{F}') \to H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, J) = 0$$

folgt nun $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$.

Bemerkung 8.14 Ein konzeptionellerer Beweis ergibt sich durch die Benutzung von sogenannten Spektralsequenzen.

Corollar 8.15 Sei X ein Schema, und sei $\mathfrak{U} = (U_1, \dots, U_r)$ eine offene Überdeckung von X derart, dass

$$U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n} \text{ affin für alle } i_0, \dots, i_n \in I, \text{ alle } n$$

(zum Beispiel seien die U_i affin und X separiert, siehe 2.5. Dann ist für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ die kanonische Abbildung (siehe Satz 8.3)

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F}) \tag{8.15.1}$$

ein Isomorphismus für alle $n \geq 0$.

Beweis Wir wählen eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F} \to J \to \mathcal{F}' \to 0$$

mit injektivem J wie in (8.13.2). Dann ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, J) \to \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to 0$$

der Čech-Garbenkomplexe exakt: Da die Überdeckung $\mathfrak{U}$ endlich ist, folgt dies aus der Exaktheit der Komplexe

$$0 \to \mathcal{F}|_{U_{\underline{i}}} \to J|_{U_{\underline{i}}} \to \mathcal{F}'|_{U_{\underline{i}}} \to 0\,.$$

Mit den Methoden von §6 folgt nun leicht, dass man ein kommutatives Diagramm von Garben(-Komplexen)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & J \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, J) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1^\cdot \arrow[r] & I_2^\cdot \arrow[r] & I_3^\cdot \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen hat, wobei $\beta'\alpha', \beta\alpha$ und $\beta''\alpha''$ injektive Auflösungen von $\mathcal{F}, J$ und $\mathcal{F}'$ sind. Durch Übergang in globalen Schnitten erhalten wir ein kommutatives exaktes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U}, J) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1^\cdot(X) \arrow[r] & I_2^\cdot(X) \arrow[r] & I_3^\cdot(X) \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Die Exaktheit der oberen Zeile folgt wegen $H^1(U_{\underline{i}}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $\underline{i}$. Da $H^n(\mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U}, J)) = \check{H}^n(\mathfrak{U}, J) = 0 = H^n(\mathfrak{U}, J) = H^n(I_2^\cdot(X))$, folgt mit den langen exakten Kohomologiesequenzen ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \check{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{H}^{n+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{H}^{n+1}(\mathfrak{U},J) = 0 \arrow[d, equal] \\
& H^n(\mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F}'')) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathrm{C}^\cdot(\mathfrak{U},J)) \arrow[d] \\
& H^n(I_3^\cdot(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{n+1}(I_1^\cdot(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{n+1}(I_2^\cdot(X)) \arrow[d, equal] \\
{} \arrow[r] & H^n(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^{n+1}(X,J) = 0
\end{tikzcd}
,
$$

wobei die vertikalen Abbildungen die kanonischen von (8.15.1) sind. Hieraus folgt nun induktiv die Behauptung.

9 Kohärente und ample Modulgarben

Definition 9.1 Sei X ein noethersches Schema. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ heißt **kohärent**, wenn eine (ohne Einschränkung endliche) affine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X existiert und endlich erzeugte $\mathcal{O}_X(U_i)$-Moduln M_i mit $\mathcal{M}|_{U_i} \cong \tilde{M}$.

Bemerkung 9.2 Für nicht-noethersche Schemata X ist die Definition von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln komplizierter, siehe EGA I, 0, (5.3.1).

Lemma 9.3 Sei A ein noetherscher Ring und M ein A-Modul. Für $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist dann der quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul $\tilde{M}$ genau dann kohärent, wenn M ein endlich erzeugter A-Modul ist.

Beweis Für die nicht-triviale Richtung zeigt man wie im Beweis von Alg. Geo II, 2.8 (dies ist der Spezialfall $M = A$), dass M die aufsteigende Kettenbedingung für Untermoduln besitzt. Dies ist aber – für noethersches A – äquivalent dazu, dass M endlich erzeugt ist.

Hieraus folgt sofort:

Corollar 9.4 Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{M}$ ist kohärent.

(b) Für jedes affine offene $U \subseteq X$ existiert ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U)$-Modul M mit $\mathcal{M}|_U \cong \tilde{M}$.

Beweis der nicht-trivialen Richtung (a) $\Rightarrow$ (b): Ist $\mathcal{M}$ kohärent, so ist $\mathcal{M}$ insbesondere quasi-kohärent, für affines offene $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$ existiert also jedenfalls ein $A = \mathcal{O}_X(U)$-Modul M mit $\mathcal{M}|_U \cong \tilde{M}$, und nach 9.3 ist M endlich erzeugt.

Die folgenden Aussagen sind nun leicht zu zeigen.

Proposition 9.5 Sei X ein noethersches Schema.

(a) Ist $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Morphismus von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln, so sind $\ker\varphi, im\,\varphi$ und $\operatorname{coker}\varphi$ kohärent.

(b) Ist $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ eine exakte Sequenz von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln, und sind $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}''$ kohärent, so ist $\mathcal{M}$ kohärent.

Proposition 9.6 (a) Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von noethersches Schemata und ist N ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul, so ist $f^*\mathcal{N}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

(b) Ist $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion, wobei Y (und daher auch X) noethersch ist, und ist $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist $i_*\mathcal{M}$ kohärent als $\mathcal{O}_Y$-Modul.

Beweis dieser Aussagen: selbst!

Wir kommen nun zu amplen Moduln. Sei X ein Schema und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

Erinnerung 9.7 (Alg. Geo. II, 8.8): Man sagt, dass $\mathcal{M}$ von globalen Schnitten erzeugt wird, wenn die folgenden *äquivalenten* Bedingungen gelten:

(a) Es gibt eine Familie $(s_i)_{i\in I}$ von globalen Schnitten $s_i \in \mathcal{M}(X)$, so dass für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{M}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von den Bildern $s_{i,x}$ der s_i erzeugt wird.

(b) $\mathcal{M}$ ist Quotient eines freien $\mathcal{O}_X$-Moduls, d.h., es gibt einen Epimorphismus $\mathcal{O}_X^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ (von $\mathcal{O}_X$-Moduln).

Beispiele 9.8 (a) Ist A ein Ring und $X = \mathbb{P}^n_A$, so wird $\mathcal{O}_X(1)$ von globalen Schnitten erzeugt (Alg. Geo. II, 8.11).

(b) Ist $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata und wird der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ von den globalen Schnitten $s_i, i \in I$, erzeugt, so wird $f^*\mathcal{M}$ von den globalen Schnitten $f^*(s_i)$ erzeugt (Alg. Geo. II, 8.10).

Definition 9.9 Sei X ein noethersches Schema. Ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ auf X heißt **ampel**, wenn für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$ für jedes $n \geq n_0$ von globalen Schnitten erzeugt wird.

Beispiel 9.10 Ist X affin, so ist jeder invertierbare $\mathcal{O}_X$-Modul ampel, da jeder (quasi-) kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul von globalen Schnitten erzeugt wird.

Definition 9.11 Sei A ein Ring und X ein A-Schema. Eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf X heißt **sehr ampel** bezüglich A (oder relativ zu A), wenn es eine Immersion $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$ von A-Schemata gibt, so dass $\mathcal{L} \cong j^*\mathcal{O}(1)$.

Bemerkung 9.12 (a) Insbesondere ist $\mathcal{O}(1)$ sehr ampel auf $\mathbb{P}^n_A$.

(b) Da $\mathcal{O}(1)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, werden sehr ample Garben von globalen Schnitten erzeugt (9.8 (a) und (b)).

(c) Die Eigenschaft "ample" ist absolut (hängt nur von ($\mathcal{L}$ und) X ab), während "sehr ampel" eine relative Eigenschaft ist (hängt noch von der Basis A ab).

Satz 9.13 (Serre) Sei A ein noetherscher Ring und sei X ein projektives A-Schema. Dann ist die zugehörige sehr ample Garbe $\mathcal{O}_X(1)$ ampel.

Beweis Vorbemerkung: Nach Definition haben wir eine abgeschlossene Immersion

$$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A =: P$$

(siehe Alg. Geo. II, 6.11), und dann sei $\mathcal{O}_X(1) := i^*\mathcal{O}_p(1)$. Wir bemerken noch, dass X noethersch ist, da X von endlichem Typ über dem noetherschen Schema Spec(A) ist.

Sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Nach 9.6 (b) ist $i_*\mathcal{F}$ ein kohärener $\mathcal{O}_p$-Modul, und weiter ist offenbar

$$i^*i_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

(über den Koadjunktionsmorphismus). Dies gilt nämlich für jede abgeschlossene Immersion: lokal haben wir $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ für ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ und einen $B/\mathfrak{b}$-Modul M, und die Isomorphie ist dann $M \otimes_B B/\mathfrak{b} \cong M$.

Damit ist

$$F \otimes \mathcal{O}_X(1) \cong i^*i_*\mathcal{F} \otimes i^*\mathcal{O}_p(1) \cong i^*(i_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_p(1))$$

wegen 9.8 (b) genügt es also, den Fall $X = P$ zu betrachten.

Sei also $X = Proj(R)$ für eine graduierte A-Algebra R, die von endlich vielen Elementen $y_1, \ldots y_N \in R_1$ erzeugt wird. Da $\mathcal{F}$ quasi-kohärent ist, gibt es einen graduierten R-Modul M, so dass $\mathcal{F} = \tilde{M}$ (siehe Alg. Geo. II, 8.A.3; hierbei ist $\tilde{M}$ die Konstruktion von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf $Proj(R)$, siehe Alg. Geo. II, 8.4). Da $\mathcal{F}$ kohärent ist, ist $\mathcal{F}(D_+(y_i)) = M_{(y_i)}$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(D_+(y_i)) = R_{(y_i)}$-Modul für $i = 1, \ldots, N$ (Lemma 9.3). Schreibt man die Erzeugenden in der Form m/y_i^n mit $m \in M$ homogen vom Grad n, so sieht man, dass es endlich viele homogene Elemente $m_1, \ldots, m_t \in M$ gibt, so dass für den von den m_j erzeugten (graduierten) R-Untermodul $M' \subset M$ gilt

$$\tilde{M'} = \tilde{M} = \mathcal{F}$$

(da $\tilde{M'}|_{D_+(Y_i)} = \tilde{M}|_{D_+(Y_i)}$ für alle i).

Nun erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus von graduierten R-Moduln

$$\begin{array}{ccc} R(-n_1) \oplus \ldots \oplus R(-n_t) & \twoheadrightarrow & M' \\ (r_1, \ldots, r_t) & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{t} r_j m_j \end{array}$$

wobei $n_j = \deg(m_j)$. Dieser liefert einen Epimorphismus

$$\mathcal{O}_X(-n_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(-n_t) \twoheadrightarrow \tilde{M'} = \mathcal{F}$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln, da $\widetilde{R(-n)} = \mathcal{O}_X(-n)$, nach Definition.

Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(n)$ hieraus wegen $\mathcal{O}_X(-n_j) \otimes \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(-n_j + n)$ einen Epimorphismus

$$\mathcal{O}_X(n'_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(n'_t) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$$

wobei $n'_j = n_j + n > 0$ für $n \geq n_0 = \max\{n_j\} + 1$. Wir behaupten, dass für $n \geq n_0$ der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}(n)$ von globalen Schnitten erzeugt ist (damit ist der Satz bewiesen). Hierfür genügt es offenbar zu zeigen, dass $\mathcal{O}_X(n)$ für $n > 0$ von globalen Schnitten erzeugt wird; dies folgt aber, da $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$ und da $\mathcal{O}_X(1)$ von globalen Schnitten erzeugt wird (für jedes projektive A-Schema X).

Bemerkung 9.14 (a) Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul. Man zeigt leicht, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathcal{L}$ ist ampel.

(ii) $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ist ampel für alle $m > 0$.

(iii) $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ist ampel für ein $m > 0$.

(b) Der folgende Satz von Serre ist schwieriger: Sei A ein noetherscher Ring, X ein Schema von endlichem Typ über A und $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{L}$ ist ampel.

(ii) $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ist sehr ampel bezüglich A für ein $m > 0$

(iii) Es gibt ein $m_0 > 0$, so dass $\mathcal{L}^{\otimes m}$ für alle $m \geq m_0$ sehr ampel bezüglich A ist.

Folglich ist X genau dann ein projektives A-Schema, wenn es eine ample Garbe auf X gibt.

10 Kohomologie projektiver Schemata

Sei A ein Ring (kommutativ, mit Eins), sei $R = A[X_0, \dots, X_d]$ als graduierter Ring und

$$P = \mathbb{P}^d_A = Proj(R)$$

der d-dimensionale projektive Raum über A. Wir wollen die Kohomologie $H^i(P, \mathcal{O}(n))$ für alle i und n berechnen, wobei $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_P(n) = \widetilde{R(n)}$ (siehe Alg. Geo. II, 8.5).

Die Homomorphismen von graduierten R-Moduln

$$R(n) \xrightarrow{\cdot X_i} R(n+1)$$

(Multiplikation mit X_i) induzieren $\mathcal{O}_P$-Modul-Homomorphismus

$$\mathcal{O}(n) = \widetilde{R(n)} \xrightarrow{\cdot X_i} \widetilde{R(n+1)} = \mathcal{O}(n+1)\,.$$

Durch die induzierten Morphismen $H^i(P, \mathcal{O}(n)) \to H^i(P, \mathcal{O}(n+1))$ wird

$$H^i(P) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^i(P, \mathcal{O}(n))$$

zu einem graduierten R-Modul. Sei $\mathfrak{U} = (U_j)_{j=0,\dots,d}$ mit $U_j = D_+(X_j)$ die affine offene Standardüberdeckung von $\mathbb{P}^d_A$. Da jeder Durchschnitt $U_{j_0\dots,j_n} = D_+(X_{j_0}\dots X_{j_n})$ affin ist, haben wir nach Corollar 8.15 kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^i(P) &\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(n)) \cong H^i(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(n))) \\ &\cong H^i(\dots \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \prod_{j_0,\dots,j_m} R_{X_{j_0}\dots X_{j_m},n} \to \dots) \\ &\cong H^i(\dots \to R_{X_{j_0}\dots X_{j_m}} \to \dots) \end{aligned}$$

(beachte, dass $\prod\limits_{j_0,\dots,j_n}$ ein endliches Produkt, also auch eine Summe ist). Da Lokalisieren exakt ist, folgt

$$\begin{aligned} H^i(P)_{X_d} &= H^i(\dots \to (R_{X_d})_{X_{j_0}\dots X_{j_m}} \to \dots) \\ &= H^i(C^{\cdot}(\mathfrak{U}|_{U_d}, \mathcal{O}_{U_d})) = \check{H}^i(\mathfrak{U}|_{U_j}, \mathcal{O}_{U_j}) = 0 \qquad \text{für } i \geq 1 \end{aligned}$$

nach Proposition 8.7. Wir haben also gezeigt:

Lemma 10.1 Ist $i \geq 1$, so gibt es für jedes $x \in H^i(P, \mathcal{O}(n))$ ein $m = m(x) \in \mathbb{N}$ mit $X_d^m \cdot x = 0$ in $H^i(P, \mathcal{O}(m+m))$.

Die exakte Sequenz von graduierten R-Moduln

$$0 \to R(-1) \to R \to R/X_dR \to 0$$

ergibt die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\cdot X_d} \mathcal{O} \to \widetilde{R/X_dR} \to 0\,,$$

und es ist offenbar $\widetilde{R/X_dR} = i_*\mathcal{O}_H$ für die abgeschlossene Immersion

$$i : H = V_+(X_d) = Proj(R/X_dR) \hookrightarrow Proj(R) = P\,,$$

wobei $H \cong \mathbb{P}_A^{d-1}$. Entsprechend erhält man nach Verschieben der Graduierung eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_P$-Moduln

$$0 \to \mathcal{O}_P(n-1) \to \mathcal{O}_P(n) \to i_*\mathcal{O}_H(n) \to 0\,. \tag{10.2.1}$$

Nach Lemma 7.11 haben wir weiter einen Isomorphismus

$$H^i(P, i_*\mathcal{O}_H(n)) \cong H^i(H, \mathcal{O}_H(n))\,.$$

Mit der langen exakten Kohomologiesequenz zu (10.2.1) erhalten wir sofort:

Lemma 10.2 Es gibt eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\delta} H^i(\mathbb{P}_A^d, \mathcal{O}(n-1)) \xrightarrow{\cdot X_d} H^i(\mathbb{P}_A^d, \mathcal{O}(n)) \to \ldots$$

Wir können nun beweisen:

Satz 10.3 Sei $P = \mathbb{P}_A^d$ für $d \geq 1$.

(a) Die kanonische Abbildung

$$R \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(P, \mathcal{O}(n))$$

ist ein Isomorphismus von graduierten R-Moduln.

(b) Es ist $H^i(P, \mathcal{O}(n)) = 0$ für $i \neq 0, d$.

(c) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von A-Moduln $H^d(P, \mathcal{O}(-d-1)) \cong A$.

(d) Die kanonische Paarung

$$\begin{array}{ccc} R_n \times H^d(P, \mathcal{O}(-n-d-1)) & \to & H^d(P, \mathcal{O}(-d-1)) \cong A \\ (f, x) & \mapsto & f \cdot x \end{array}$$

ist eine perfekte Paarung von endlich erzeugten freien A-Moduln.

Bemerkung 10.4 (a) Eine Paarung (A-bilineare Abbildung)

$$\phi : M \times N \to A$$

von A-Moduln heißt **perfekt**, wenn die induzierte A-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M & \to & Hom_A(N, A) \\ m & \mapsto & (n \mapsto \phi(m, n)) \end{array}$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Für $= 0$ gilt $P = \mathbb{P}_A^0 \cong \mathrm{Spec}(A)$, und es ist

$$H^0(\mathbb{P}_A^0, \mathcal{O}(n)) = H^0(\mathrm{Spec}(A), \tilde{A}) = \begin{cases} A & , \quad i = 0, \\ 0 & , \quad i \neq 0\,, \end{cases}$$

für alle $n \in Z$, wobei der Fall $i \neq 0$ aus Serres Satz 8.6 folgt.

Beweis von Satz 10.3: (a): Die Isomorphie

$$R_n \xrightarrow{\sim} H^0(P, \mathcal{O}(n)) \qquad \text{für } n \geq 0$$

wurde in Alg. Geo. II, Lemma 8.7 gezeigt.

(b): Wir führen Induktion über $d \geq 1$. Für $d = 1$ haben wir nach 10.4 (b) und Lemma 10.2 eine exakte Sequenz

$$0 = H^{i-1}(\mathbb{P}^0, \mathcal{O}(n+1)) \xrightarrow{\delta} H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\cdot X_1} H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n+1))$$

für alle $i \geq 2$. Für $i \geq 2$ ist also die Multiplikation mit X_1 injektiv auf $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$, und aus 10.1 folgt $H(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = 0$ für $i \geq 2$. Sei nun $d \geq 2$ und die Behauptung für $d-1$ bewiesen. Nach Lemma 10.2 und Induktionsvoraussetzung haben wir dann eine exakte Sequenz

$$0 = H^{i-1}(\mathbb{P}^{d-1}_A, \mathcal{O}(n)) \to H^i(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n-1)) \xrightarrow{\cdot X_d} H^i(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n))$$

für $i - 1 \neq 0, d-1$, also $i \neq 1, d$ und alle n. Die Multiplikation mit X_d ist also injektiv. Aus Lemma 10.1 folgt also $H^i(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n)) = 0$ für $i \neq 1, d$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Für $i = 1$ haben wir eine exakte Sequenz

$$H^0(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n-1)) \xrightarrow{\cdot X_d} H^0(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathbb{P}^{d-1}_A, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\delta}$$

$$H^1(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n-1)) \xrightarrow{\cdot X_d} H^1(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow \dots$$

wobei sich die Sequenz der ersten 3 Terme mit der exakten Sequenz

$$A[X_0, \dots, X_d] \xrightarrow{\cdot X_d} A[X_0, \dots, X_d] \xrightarrow{\alpha} A[X_0, \dots, X_{d-1}]$$

identifiziert, wobei $\alpha(X_i) = X_i$ für $i = 0, \dots, d-1$, und $\alpha(X_d) = 0$. Es folgt die Surjektivität von α und deswegen die Injektivität der Multiplikation mit X_d auf $H^1(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n-1))$, und wie oben folgt $H^1(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n-1)) = 0$, für alle n.

(c): *1. Schritt*: Wir zeigen durch Induktion über d, dass

$$H^d(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n)) \text{ für } n \geq -d \text{ und } d \geq 1\,.$$

Für $d = 1$ haben wir nach 10.2 eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n+1)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(\mathbb{P}^0, \mathcal{O}(n+1)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) \arrow[r, "\cdot X_1"] & H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n+1)) \\
A[X_0, X_1]_{n+1} \arrow[r, two heads] & A & &
\end{tikzcd}$$

für $n + 1 \geq 0$, d.h., $n \geq -1$, und es folgt wie oben, dass $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$ für $n \geq -1$. Ist $d \geq 2$ und gilt die Aussage für $d-1$, so folgt mit 10.1 und 10.2 eine exakte Sequenz

$$0 = H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(n+1)) \to H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\cdot X_d} H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(n+1))$$

also wie oben $H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(n)) = 0$ für $n \geq -d$ (da dann $n+1 \geq -d+1 = -(d-1)$).

2. Schritt: Nach 10.2 erhalten wir für $d \geq 1$ eine exakte Sequenz

$$H^{d-1}(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d)) \to H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-d)) \xrightarrow{\delta} H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1)) \xrightarrow{\cdot X_d} H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d))\,.$$

Nach dem 1. Schritt ist $H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d)) = 0$, denn es ist $-d \geq -d$. Weiter ist $H^{d-1}(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d)) = 0$, denn für $d \geq 2$ ist $d-1 \neq 0, d$, und wir können (b) anwenden, und für $d = 1$ ist $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$ nach (a). Hieraus ergibt sich ein Isomorphismus

$$H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-(d-1)-1)) \xrightarrow{\delta} H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1))\,.$$

Induktiv erhalten wir nun Isomorphismen

$$A \cong H^0(\mathbb{P}^0, \mathcal{O}(-1)) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} H^1(\mathbb{P}^1(\mathcal{O}(-2)) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} \ldots \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1))\,.$$

(d) Es genügt zu zeigen:

$$\phi_n : R_n \times H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d-1)) \to H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1))$$

ist eine perfekte Paarung von endlich erzeugten freien A-Moduln für $d \geq 0$ und alle $n \geq 0$. Denn für $d \geq 1$ und $n < 0$ ist $R_n = 0$ und auch $H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d-1)) = 0$, da $-n-d-1 \geq -d$ (Beweis von (c), 1. Schritt).

Wir führen Induktion über $n \geq 0$ und d: Für $d = 0$ oder $n = 0$ ist die Aussage offenbar richtig (wegen (c)). Seien also $d \geq 1$ und $n > 0$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm (10.3.1)

$$\begin{tikzcd}
R_{n-1} \arrow[d, hook, "\cdot X_d"] & \times & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d)) \arrow[r, "\phi_{n-1}"] & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1)) \arrow[d, equal] & \cong & A \arrow[d, equal] \\
R_n \arrow[d] & \times & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d-1)) \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[u, "\cdot X_d"'] & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1)) & \cong & A \arrow[d, equal] \\
(R/RX_d)_n & \times & H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-n-d)) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\delta"'] & H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-d)) \arrow[u, "\delta"', "\wr"] & \cong & A
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des oberen Teils bedeutet, dass $\phi_{n-1}(\alpha, X_d\beta) = \phi_n(X_d\alpha, \beta)$ und tatsächlich gilt

$$\phi_{n-1}(\alpha, X_d \cdot \beta) = \alpha \cdot (X_d \cdot \beta) = (X_d \cdot \alpha) \cdot \beta = \phi_n(X_d \cdot \alpha, \beta)\,.$$

Die Kommutativität des unteren Teils von (10.3.1) hat eine entsprechende Bedeutung und folgt, da die exakte Sequenz (10.2.1) und daher die Kohomologiesequenz in 10.2 mit der Operation von R_n verträglich ist: Für $\alpha \in R_n$ mit Bild $\overline{\alpha} \in (R/X_dR)_n = R_n/X_dR_{n-1}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_P(-n-d-1) \arrow[r, "\cdot X_d"] \arrow[d, "\cdot\alpha"] & \mathcal{O}_P(-n-d) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\alpha"] & O_H(-n-d) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\overline{\alpha}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_P(-d-1) \arrow[r, "\cdot X_d"] & \mathcal{O}_P(-d) \arrow[r] & \mathcal{O}_H(-d) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei $P = \mathbb{P}^n_A$ und $H = Proj(R/X_dR) = \mathbb{P}^{d-1}_A$. Dies liefert einen Morphismus der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz (6.25 und 6.26 (ii)) und insbesondere ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-n-d)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\cdot\overline{\alpha}"] & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d-1)) \arrow[d, "\cdot\alpha"] \\
H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-d)) \arrow[r, "\delta"] & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-d-1)) \,,
\end{tikzcd}$$

welches gerade die Kommutativität des unteren Teils von (10.3.1) impliziert.

Nach Induktionsvoraussetzung liefern die obere und die untere Zeile von (10.3.1) perfekte Paarungen endlich erzeugter freier A-Moduln. Weiter sind die linken beiden Spalten von (10.3.1) exakt, wegen der exakten Sequenz 10.2 und den bereits bewiesenen Tatsachen $H^d(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-n-d)) = 0$ (da $d > d-1$) und $H^{d-1}(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d)) = 0$ (da $d-1 \neq 0, d$ für $d > 1$ und $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-n)) = 0$ für $n > 0$). Es folgt, dass die mittlere Spalte eine zerfallende exakte Sequenz ist (da $H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d))$ frei ist), so dass

$$H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d-1)) \cong H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d)) \oplus H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-n-d))$$

frei ist.

Das Diagramm liefert nun einen Morphismus von exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{n-1} \arrow[r, "\cdot X_d"] \arrow[d, "f", "\wr"'] & R_n \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R_n/X_dR_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "h", "\wr"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d))^\vee \arrow[r] & H^d(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(-n-d-1))^\vee \arrow[r] & H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}, \mathcal{O}(-n-d))^\vee \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Hier entsteht die untere Sequenz durch Dualisieren aus der mittleren Spalte von (10.3.1), und die vertikalen Abbildungen entstehen wie in Bemerkung 10.4 (i) aus den Paarungen in (10.3.1).

Nach Induktionsvoraussetzung sind f und h Isomorphismen, also auch g, nach dem Fünferlemma 5.15. Q.E.D.

Der folgende Satz gilt für beliebige projektive A-Schemata.

Satz 10.5 (projektiver Verschwindungssatz von Serre) Sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A, und sei $\mathcal{O}_X(1)$ ein sehr ampler invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul (Definition 9.11). Sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul (Definition 9.1).

(a) $H^i(X, \mathcal{F})$ ist ein endlich erzeugter A-Modul für alle i, und null für $i >> 0$.

(b) Es gibt eine natürliche Zahl $m = m(\mathcal{F})$, so dass $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ für alle $i > 0$ und alle $n \geq m$ (wobei $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$).

Beweis Nach Voraussetzung gibt es eine abgeschlossene Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_A =: P$, so dass $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_A}(1)$. Dann haben wir kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^i(X, \mathcal{F}(n)) &\cong H^i(\mathbb{P}^N_A, i_*(\mathcal{F}(n))) \qquad \text{(nach 7.11)} \\ &\cong H^i(\mathbb{P}^N_A, (i_*\mathcal{F})(n))\,, \end{aligned}$$

wobei der letzte aus der Isomorphie

$$i_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\mathcal{O}_P(n)) \cong i_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P(n)$$

folgt, die Spezialfall der sogenannten Projektionsformel (folgendes Lemma 10.6) ist. Nach 9.6 ist $i_*\mathcal{F}$ kohärent, daher genügt es, den Fall $X = \mathbb{P}^N_A = P$ zu betrachten.

Für die Garben der Form $\mathcal{O}_P(m)$ folgen die Behauptungen von 10.5 aus 10.3 (für (b) beachte man, dass $H^i(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0$ für $i > 0$ und $i \neq N$, und $H^N(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0$ für $n \geq 0$ und $N \geq 1$, da dann $H^0(P, \mathcal{O}_P(-n - N - 1)) = 0$.

Als Nächstes zeigen durch Induktion über N

$$H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } i > N\,. \tag{10.5.1}$$

Für $N = 0$ ist $\mathbb{P}^N_A = \mathrm{Spec}(A)$, und die Behauptung folgt aus Serres Verschwindungssatz 8.6.

Sei nun $N > 0$. Durch Betrachtung des $A[X_0, \ldots, X_N]$-Moduls

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}(n))$$

folgt wie im Beweis von 10.3, dass es für jedes $x \in H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F})$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $X_d^m \cdot x = 0$ in $H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}(m))$.

Spezialfall: Sei $F \xrightarrow{\cdot X_N} \mathcal{F}(1)$ injektiv. Dann erhalten wir hieraus wie im Beweis von 10.3 eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\ldots \to H^i(\mathbb{P}^{N-1}_A, (k^*\mathcal{F})(n+1)) \xrightarrow{\delta} H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}(n)) \xrightarrow{\cdot X_N} H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}(n+1))$$

wobei $k : \mathbb{P}^{N-1}_A = Proj(A[X_0, \ldots, X_{N-1}]) \hookrightarrow \mathbb{P}^N_A$ die abgeschlossene Immersion ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^{i-1}(\mathbb{P}^{N-1}_A, (k^*\mathcal{F})(n+1)) = 0$ für $i - 1 > N - 1$, also $i > N$, und alle n. Es folgt die Injektivität von $\cdot X_N^m$ auf $H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F})$ und damit das Verschwinden dieser Gruppe für $i > N$.

Allgemeiner Fall: Nach Satz 9.13 gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{F}(m)$ von (endlich vielen) globalen Schnitten erzeugt wird. Dies liefert eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_P$-Moduln

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{O}_P(-m)^t \to \mathcal{F} \to 0\,,$$

wobei $\mathcal{F}'$ wieder kohärent ist. Dann ist $\mathcal{F}' \xrightarrow{\cdot X_N} \mathcal{F}'(1)$ injektiv (da dies auf $\mathcal{O}_P(-m)$ gilt) und mit der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\ldots \to H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}') \to H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{O}_P(-m))^t \to H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}) \to \ldots \tag{10.5.2}$$

und Satz 10.3 folgt die Behauptung (10.5.1) für $\mathcal{F}$, da sie für $\mathcal{O}_P(-m)$ und $\mathcal{F}'$ gilt.

Da die Behauptungen von Satz 5.10 für die Garben $\mathcal{O}_P(m)$ richtig sind, folgen sie nun für beliebige kohärente Garben $\mathcal{F}$ mit (10.5.1) und (10.5.2) und durch **absteigende** Induktion über i, beginnend bei $i = N + 1$ (zunächst findet am ein $m = m(\mathcal{F}, i)$ für jedes i mit $H^i(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}(n))$ für $n \geq m$, und wählt dann m für 5.10 als das Maximum aller $m(\mathcal{F}, i)$ für $i = 1, \ldots, N$).

Lemma 10.6 (Projektionsformel) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{G}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Sei f affin oder $\mathcal{G}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul von endlichem Rang. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})$$

von $\mathcal{O}_Y$-Moduln.

Beweis Der Morphismus ist induziert von den Abbildungen

$$\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \otimes_{\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))} f^*\mathcal{G}(f^{-1}(V))$$

für $V \subseteq Y$ offen, wobei $\mathcal{G}(V) \to f^*\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = (f_*f^*\mathcal{G})(V)$ die Adjunktionsabbildung ist. Für die Bijektivität können wir für affines f annehmen, dass $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affin sind, so dass $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen A-Modul M und $\mathcal{G} = \tilde{N}$ für einen B-Modul N. Dann entspricht der Morphismus in 10.6 dem Isomorphismus

$$M \otimes_B N \to M \otimes_A (A \otimes_B N)\,,$$

bei dem links M via $B \to A$ als B-Modul aufgefasst wird.

Ist $\mathcal{G}$ lokal frei von endlichem Rang, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathcal{G}$ frei ist und dann weiter, dass $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y$ ist, wo die Behauptung trivial ist.

Bemerkung 10.7 Mit ähnlichen Methoden kann man zeigen: Ist X projektiv über dem noetherschen Ring A, und ist $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul, so sind äquivalent:

(i) $\mathcal{L}$ ist ampel.

(ii) Für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $H^i(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ für alle $i > 0$ und alle $n \geq n_0$

(dies gilt sogar für X *eigentlich* über A, siehe Hartshorne, 'Algebraic Geometry', III Proposition 5.3).

11 Ext-Gruppen, Ext-Garben und Paarungen

Definition 11.1 (vergleiche 6.24) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $Mod_{\mathcal{O}_X}$ die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln. Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ sei $Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -)$ (bzw. $\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -)$) die n-te Rechtsableitung des Funktors

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -) & : & Mod_{\mathcal{O}_X} \to Mod_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \\ \text{(bzw. } \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -) & : & Mod_{\mathcal{O}_X} \to Mod_{\mathcal{O}_X}). \end{array}$$

Im zweiten Fall spricht man auch vom Garben-Hom bzw. Garben-Ext.

Wir benutzen öfter die folgende Tatsache.

Lemma 11.2 Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor zwischen abelschen Kategorien, der ein exaktes Linksadjungiertes $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ besitzt, so *erhält F Injektive*, d.h., ist I injektiv in $\mathcal{A}$, so ist FI injektiv in $\mathcal{B}$.

Beweis Betrachte ein Diagramm in $\mathcal{B}$. Für einen Monomorphismus $B_1 \hookrightarrow B_2$ ist die Abbildung

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{B}}(B_2, FI) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"] & Hom_{\mathcal{B}}(B_1, FI) \arrow[d, dash, "\wr"] \\ Hom_{\mathcal{A}}(GB_2, I) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{A}}(GB_1, I) \end{tikzcd}$$

surjektiv, da $GB_1 \hookrightarrow GB_2$ ein Monomorphismus und I injektiv ist.

Corollar 11.3 Ist J ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Garbe $J|_U$ ein injektiver $\mathcal{O}_U$-Modul ($\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$).

Beweis Für die Einbettung $j : U \hookrightarrow X$ ist $J|_U = j^{-1}J = j^*J$, aber $j^{-1} : Mod_{\mathcal{O}_X} \to Mod_{\mathcal{O}_U}$ hat das exakte Linksadjungierte $j_! : Mod_{\mathcal{O}_U} \to Mod_{\mathcal{O}_X}$ (Lemma 7.5).

Corollar 11.4 $\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto Ext^n_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

(mit den offensichtlichen Restriktionen, induziert von

$$Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U) \to Hom_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}|_V, \mathcal{G}|_V) \quad \text{für } U \supset V) \,.$$

Beweis Dies folgt mittels 11.3 genauso wie im Beweis von 7.15.

Corollar 11.5 Es ist $\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = \underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$.

Corollar 11.6 Ist $\mathcal{F}$ ein flacher $\mathcal{O}_X$-Modul (zum Beispiel ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul), so respektiert $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -)$ Injektive.

Beweis Der Funktor $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},-)$ hat das Linksadjungierte $-\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$: dies ist der funktorielle Isomorphismus

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F},\mathcal{G})\cong Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$$

aus Alg. Geo. II, 5.19. Weiter heißt nach Definition $\mathcal{F}$ genau dann flacher $\mathcal{O}_X$-Modul, wenn $\mathcal{E}\mapsto\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$ ein exakter Funktor ist. Letzteres gilt offenbar für freie $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$, und daher auch für lokal freie, da die Frage lokal auf X ist.

Corollar 11.7 Sei $\mathcal{F}$ ein lokal-freier $\mathcal{O}_X$-Modul von lokal endlichem Rang.

(a) $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},-)$ ist exakt; insbesondere ist $\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$ für $n>0$ und alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{G}$.

(b) Man hat kanonische Isomorphismen

$$Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\cong H^n(X,\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$$

für alle n und alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{G}$. Diese sind funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, und verträglich mit Restriktionen auf offenes $U\subseteq X$.

Beweis (a): Es ist kanonisch $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})\cong\mathcal{G}$ und $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m,\mathcal{G})\cong\mathcal{G}^m$; der Funktor $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},-)$ ist also exakt für freie $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ von endlichem Rang. Daher ist er auch exakt für lokal freies $\mathcal{F}$ mit lokal endlichem Rang, da die Frage lokal auf X ist. Hieraus folgt die zweite Aussage (für einen exakten Funktor verschwinden alle höherern Ableitungen).

(b): Sei $\mathcal{G}\hookrightarrow J^\cdot$ eine injektive Auflösung. Nach (a) und 11.6 ist dann

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\hookrightarrow\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},J^\cdot)$$

eine injektive Auflösung von $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Damit folgt

$$H^n(X,\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))=H^n(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},J^\cdot)(X))=H^n(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},J^\cdot))=Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\,.$$

Für eine exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{G}'\to\mathcal{G}\to\mathcal{G}''\to 0 \tag{11.8.1}$$

haben wir nach Eigenschaft rechtsabgeleiteter Funktoren eine lange exakte Sequenz

$$\ldots\to Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}')\to Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\to Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}'')\xrightarrow{\delta}Ext^{n+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}')\to\ldots, \tag{11.8.2}$$

funktoriell in $\mathcal{F}$ und in (11.8.1). Entsprechendes gilt für $\underline{Ext}^\cdot_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},-)$.

Es gilt aber auch:

Lemma 11.8 Ist

$$0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''\to 0 \tag{11.8.3}$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so hat man für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ eine kanonische lange exakte Sequenz

$$\ldots\to Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}'',\mathcal{G})\to Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\to Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}',\mathcal{G})\to Ext^{n+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}'',\mathcal{G})\to\ldots \tag{11.8.4}$$

funktoriell in $\mathcal{G}$ und in der exakten Sequenz (11.8.3). Entsprechendes gilt für $\underline{Ext}^{\cdot}(-,\mathcal{G})$.

Beweis Ist $\mathcal{G} \hookrightarrow J^{\cdot}$ eine injektive Auflösung, so ist die Sequenz von Komplexen

$$0 \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}'', J^{\cdot}) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, J^{\cdot}) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}', J^{\cdot}) \to 0$$

exakt (da alle J^i injektiv sind). Die assoziierte lange Kohomologiesequenz liefert (11.8.4). Der Fall von Ext-Garben ist analog.

Proposition 11.9 Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

(a) Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in X$ eine kanonische Isomorphie von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln

$$\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x \cong Ext^n_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)\,,$$

funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

(b) Ist $\mathcal{G}$ quasi-kohärenter (bzw. kohärenter) $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist $\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ quasi-kohärent (bzw. kohärent) für jedes n.

Beweis Beide Fragen sind lokal auf X; wir können also annehmen, dass $X = \mathrm{Spec}(A)$ für einen noetherschen Ring A und $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen endlich erzeugten A-Modul M. Beide Aussagen sind außerdem offenbar richtig für $n = 0$ und einen freien A-Modul (von endlichem Rang), da $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$.

Da M endlich erzeugt ist, gibt es eine exakte Sequenz

(11.9.1) $$0 \to M' \to A^r \to M \to 0\,,$$

und da A noethersch ist, ist M' wieder endlich erzeugt. Durch Wahl einer Surjektion $A^s \twoheadrightarrow M'$ erhalten wir also eine exakte Sequenz von A-Moduln

(11.9.2) $$A^s \to A^r \to M \to 0\,.$$

Sei

(11.9.3) $$\mathcal{O}_X^s \to \mathcal{O}_X^r \to \mathcal{F} \to 0$$

die exakte Sequenz der assoziierten $\mathcal{O}_X$-Moduln.

(a): Wir haben einen offensichtlichen Homomorphismus

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x \to Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)\,,$$

induziert durch $Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U) \to Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$ für alle offenen Umgebungen U von x. In der obigen Situation erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^r,\mathcal{G})_x \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^s,\mathcal{G})_x \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^r\mathcal{G}_x) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^s,\mathcal{G}_x)
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen (da die Hom-Funktoren linksexakt sind und die Halmabbildung exakt ist). Es folgt, dass die linke Abbildung ebenfalls ein Isomorphismus ist, also (a) für $n = 0$.

Sei nun $\mathcal{G} \hookrightarrow J^{\cdot}$ eine injektive Auflösung. Wegen der Exaktheit der Halmbildung ist dann $\mathcal{G}_x \hookrightarrow J_x^{\cdot}$ eine Auflösung von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln. Ist $\mathcal{G}_x \hookrightarrow I^{\cdot}$ eine Auflösung durch injektive $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & J_x^{\cdot} \arrow[dd, "h"] \\ G_x \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & I^{\cdot}\,, \end{tikzcd}$$

wobei h eindeutig bis auf Homotopie ist. Hieraus erhalten wir

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, J^{\cdot})_x \to Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, J_x^{\cdot}) \to Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, I^{\cdot})$$

und durch Nehmen der n-ten Kohomologie die Abbildung

(11.9.4) $$\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \overset{\alpha}{\to} Ext^n_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)\,.$$

Diese ist kanonisch, da h eindeutig bis auf Homotopie ist. Sei

(11.9.5) $$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{O}_X^r \to \mathcal{F} \to 0$$

die zu (11.9.1) assoziierte exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln. Da $Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^r, \mathcal{G}) = 0$ für $n > 0$ (11.7 (a)), und $Ext^n_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^r, \mathcal{G}_x) = 0$ für $n > 0$ (da $Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^r, -)$ exakt ist), erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^r, \mathcal{G})_x \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"', "\wr"] & \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G})_x \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha_2"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \underline{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"'] & 0 \\ Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^r, \mathcal{G}_x) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x', \mathcal{G}_x) \arrow[r, "\delta"] & Ext^1_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G} - x) \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Die Kommutativität von $(*)$ folgt leicht aus den Konstruktionen von 11.8 und (11.9.4). Nach dem Fall $n = 0$ sind α_1 und α_2 bijektiv, also gilt dies auch für α_3. Für $n \geq 1$ folgt der Induktionsschritt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \arrow[r, "\delta", "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] & \underline{Ext}^{n+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[d] \\ Ext^n_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x', \mathcal{G}_x) \arrow[r, "\delta", "\sim"'] & Ext^{n+1}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)\,. \end{tikzcd}$$

(b) Der Beweis ist ähnlich: Mit obigen Bezeichnungen haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}^r \to \mathcal{G}^s\,,$$

die zeigt, dass $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ für (quasi-) kohärentes $\mathcal{G}$ wieder (quasi-) kohärent ist, eine exakte Sequenz

$$\mathcal{G}^r \to \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \overset{\delta}{\to} \underline{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to 0\,,$$

die zeigt, dass $\underline{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ (quasi-) kohärent ist, und Isomorphismen für $n \geq 1$

$$\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}',\mathcal{G}) \xrightarrow[\sim]{\delta} \underline{Ext}^{n+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

die induktiv zeigen, dass $\underline{Ext}^n(\mathcal{F},\mathcal{G})$ für alle $n \geq 1$ (quasi-) kohärent ist.

Wir wollen nun Paarungen (bilineare Abbildungen)

$$H^m(X,\mathcal{F}) \times Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to H^{m+n}(X,\mathcal{G}) \tag{11.10.1}$$

von Modulen über $R = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ definieren. Eine solche Paarung (11.10.1) ist äquivalent zu einem R-Modulhomomorphismus

$$\psi : Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to Hom_R(H^m(X,\mathcal{F}), H^{m+1}(X,\mathcal{G})) \tag{11.10.2}$$

(vermöge $\varphi(a,b) = \psi(a)(b)$). In der letzteren Beschreibung kann man die Konstruktion sehr allgemein formulieren: **Satz 11.10** (Yoneda-Cartier) Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter

Funktor zwischen abelschen Kategorien, wobei $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive hat. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes System von Abbildungen

$$\psi^{n,m} : Ext^n_{\mathcal{A}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA, R^{m+n}FB)$$

mit den folgenden Eigenschaften:
(i) Für $n = 0$ ist die Abbildung durch Funktorialität der Rechtsableitungen gegeben:

$$\begin{array}{rrcl} \psi^{0,m}: & Hom_{\mathcal{A}}(A,B) & \to & Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA, R^mFB) \\ & f & \mapsto & f_* = R^mF(f)\,. \end{array}$$

(ii) Die Abbildungen sind funktoriell in A und B.
(iii) Ist $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, so ist

$$\begin{tikzcd} Ext^n_{\mathcal{A}}(A,B'') \arrow[r, "\psi^{n,m}"] \arrow[d, "\delta"] & Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA, R^{m+n}FB'') \arrow[d, "\delta_*"] \\ Ext^{n+1}_{\mathcal{A}}(A,B') \arrow[r, "\psi^{n+1,m}"] & Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA, R^{m+n+1}FB') \end{tikzcd}$$

kommutativ, mit den offensichtlichen Verbindungsmorphismen (rechts steht der von $\delta : R^{m+n}FB'' \to R^{m+n+1}FB'$ Morphismus).
(iv) Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, so ist

$$\begin{tikzcd} Ext^{n-1}_{\mathcal{A}}(A',B) \arrow[r, "(-1)^n\psi^{n-1,m+1}"] \arrow[d, "\delta"] & Hom_{\mathcal{B}}(R^{m+1}FA', R^{m+n}FB) \arrow[d, "\delta^*"] \\ Ext^n_{\mathcal{A}}(A'',B) \arrow[r, "\psi^{n,m}"] & Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA'', R^{m+n}FB) \end{tikzcd}$$

kommutativ, mit den offensichtlichen Verbindungshomomorphismen (rechts steht der von: $\delta : R^mFA'' \to R^{m+1}FA'$ Morphismus).

Die Eindeutigkeit folgt leicht: Für $n = 0$ ist $\psi^{n,m}$ durch (i) festgelegt. Ist B' ein Objekt in $\mathcal{A}$ und

$$(11.10.3) \qquad 0 \to B' \to I \to B'' \to 0$$

eine exakte Sequenz in $\mathcal{A}$ mit injektivem I, so ist der Verbindungsmorphismus

$$Ext^n_{\mathcal{A}}(A, B'') \xrightarrow{\delta} Ext^{n+1}_{\mathcal{A}}(A, B')$$

surjektiv für $n = 0$ und ein Isomorphismus für $n > 0$, so dass wegen der Eigenschaft (iii) die Abbildung $\psi^{n+1,m}$ in jedem Fall durch $\psi^{n,m}$ festgelegt ist Dasselbe Argument kann auch zur induktiven Konstruktion der $\psi^{n,m}$ benutzt werden: Die $\psi^{0,m}$ sind durch (i) festgelegt, und es gibt genau eine Abbildung $\psi^{1,m}$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\psi^{o,m} : Hom_{\mathcal{A}}(A, I) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{B}}(R^m FA, R^m FI) \arrow[d] \\
\psi^{o,m} : Hom_{\mathcal{A}}(A, B'') \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & Hom_{\mathcal{B}}(R^m FA, R^m FB'') \arrow[d, "\delta_*"] \\
\psi^{o,m} : Ext^1_{\mathcal{A}}(A, B') \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{B}}(R^m FA, R^{m+1} FB') \\
0 &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Dies folgt daraus, dass die linke Spalte exakt ist und die rechte Spalte jedenfalls ein Komplex.

Ist $\psi^{n,m}$ für $n \geq 1$ definiert, so folgt die Definition von $\psi^{n+1,m}$ aus dem Diagramm (iii), da für $B = I$ injektiv sowohl δ als auch δ_* Isomorphismen sind.

Man muss dann allerdings die Eigenschaft (iv) noch zeigen.

Ein eleganterer Beweis ergibt sich mit den folgenden **Standardkonstruktionen der Homologischen Algebra**.

Lemma/Definition 11.11 Seien $C^{\cdot}$ und $D^{\cdot}$ zwei Komplexe in einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$. Dann ist der *Hom-Komplex* $Hom^{\cdot}(C^{\cdot}, D^{\cdot})$ (von abelschen Gruppen) wie folgt definiert: Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere

$$Hom^n(C^{\cdot}, D^{\cdot}) = \prod_{m \in \mathbb{Z}} Hom_{\mathcal{C}}(C^m, D^{m+1})$$

und das Differential

$$d : Hom^n(C^{\cdot}, D^{\cdot}) \to Hom^{n+1}(C^{\cdot}, D^{\cdot})$$

durch

$$du ='' d \circ u + (-1)^{n+1} u \circ d'',$$

d.h., $d(u^m) = (du^m + (-1)^{n+1} u^{m+1} d)_{m \in \mathbb{Z}}$.

Beweis dass $d^2 = 0$: Für $u \in Hom^n(C^{\cdot}, D^{\cdot})$ ist

$$d^2(u) = d^2 u + (-1)^{n+1} dud + (-1)^{n+2}(dud + (-1)^{n+2} ud^2) = 0\,.$$

Bemerkung 11.12 (a) Für einen Komplex $(C^{\cdot}, d^{\cdot})$ kann die Familie $(d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Differentiale auch als ein Element $d \in Hom^1(C^{\cdot}, C^{\cdot})$ gedeutet werden, und man hat offensichtliche Kompositionsabbildungen

$$\begin{array}{rcl} Hom^m(C^{\cdot}, D^{\cdot}) \times Hom^n(D^{\cdot}, E^{\cdot}) & \to & Hom^{m+n}(C^{\cdot}, E^{\cdot}) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \,. \end{array}$$

Mit diesen Konventionen ist dann tatsächlich

$$d(u) = d \circ u + (-1)^{n+1} u \circ d$$

für $u \in Hom^n(C^{\cdot}, D^{\cdot})$.

(b) Es ist offenbar

$$\ker(d : Hom^0(C^{\cdot}, D^{\cdot}) \to H^1(C^{\cdot}, D^{\cdot})) = Hom_{C(\mathcal{C})}(C^{\cdot}, D^{\cdot})$$

(Gruppe der Homomorphismen von Komplexen) und

$$H^0(Hom^{\cdot}(C^{\cdot}, D^{\cdot})) = Hom_{K(\mathcal{C})}(C^{\cdot}, D^{\cdot})$$

(Gruppe der Homotopieklassen von Morphismen von Komplexen).

Definition 11.13 Für einen Komplex $C^{\cdot}$ in einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$ und $m \in \mathbb{Z}$ sei $C^{\cdot}[m]$ der Komplex mit

$$\begin{array}{rcl} (C^{\cdot}[m])^n & = & C^{n+m} \\ d_{C^{\cdot}[m]} & = & (-1)^m d_{C^{\cdot}} \,. \end{array}$$

Anschaulich entsteht $C^{\cdot}[m]$ aus $C^{\cdot}$, indem man um m Stellen nach links verschiebt und die Differentiale mit $(-1)^m$ multipliziert. Beispiel:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} C^{\cdot} & \ldots & \to & C^{-2} & \xrightarrow{d} & C^{-1} & \xrightarrow{d} & C^0 & \xrightarrow{d} & C^1 & \to & C^2 & \to \; \ldots \\ C^{\cdot}[1] & C^{-2} & \xrightarrow{-d} & C^{-1} & \xrightarrow{-d} & C^0 & \xrightarrow{-d} & C^1 & \xrightarrow{-d} & C^1 & \to & \ldots & \end{array}$$

Bemerkung 11.14 Offenbar gilt:

(a) Es ist $C^{\cdot}[m][n] = C^{\cdot}[m+n]$.

(b) Es ist kanonisch $Hom^{\cdot}(C^{\cdot}, D^{\cdot}[m]) = Hom^{\cdot}(C^{\cdot}, D^{\cdot})[m]$.

(c) Ist $\mathcal{C}$ abelsch, so ist kanonisch $H^n(C^{\cdot}[m]) = H^{n+m}(C^{\cdot})$.

Beweis von 11.10; Existenz: Betrachte $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und Objekte A, B in $\mathcal{A}$. Seien

$$A \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} I^{\cdot} \quad \text{und} \quad B \overset{\eta}{\hookrightarrow} J^{\cdot}$$

injektive Auflösungen in $\mathcal{A}$. Das Kompositum

$$\rho^{n,m} : Hom_{C(\mathcal{A})}(I^{\cdot}, J^{\cdot}[n]) \to Hom_{C(\mathcal{B})}(FI^{\cdot}, FJ^{\cdot}) \to Hom_{\mathcal{B}}(H^m(FI^{\cdot}), H^m(FJ^{\cdot}))$$

faktorisiert nach 5.17 über Homotopie und induziert daher einen Homomorphismus $(\rho^{n,m})_*$ in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^0(Hom^\cdot(I^\cdot, J^\cdot[n])) \arrow[r, "(\rho^{n,m})_*"] \arrow[d, equal, "11.14\ (c)"] & Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA, R^mFB) \\
H^n(Hom^\cdot(I^\cdot, J^\cdot)) \arrow[d, "\varepsilon^*"] & \\
H^n(Hom(A, J^\cdot)) = Ext^n_{\mathcal{A}}(A, B)\,, &
\end{tikzcd}$$

wobei ε^* der von ε induzierte Homomorphismus ist. Es gilt nun

Lemma 11.15 ε^* ist ein Isomorphismus.

Damit können wir dann definieren

$$\psi^{n,m} = \rho^{n,m}_* \circ (\varepsilon^*)^{-1} : Ext^n_{\mathcal{A}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{B}}(R^mFA, R^{m+n}FB)$$

Beweis von 11.15 Sei

$$0 \to A \hookrightarrow I^\cdot \to \tilde{I}^\cdot \to 0$$

exakt. Da $J^\cdot$ injektive Komponenten hat, ist dann auch

$$0 \to Hom^\cdot(\tilde{I}^\cdot, J^\cdot) \to Hom^\cdot(I^\cdot, J^\cdot) \to Hom(A, J^\cdot) \to 0 \tag{11.15.1}$$

exakt. Da $\tilde{I}^\cdot$ exakt ist, genügt es, zu zeigen:

Lemma 11.16 Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $C^\cdot$ ein exakter Komplex in $\mathcal{A}$, und $J^\cdot$ ein Komplex mit injektiven Komponenten, der nach unten beschränkt ist ($J^n = 0$ für $n << 0$). Dann ist $Hom^\cdot(C^\cdot, J^\cdot)$ exakt.

Beweis Wegen Bemerkung 11.14 (b) und (c) genügt es zu zeigen, dass

$$0 = H^0(Hom^\cdot(C^\cdot, J^\cdot)) = Hom_{C(A)}(C^\cdot, J^\cdot)/\sim\,.$$

Sei $J^n = 0$ für $n < N \in \mathbb{Z}$, und betrachte einen Morphismus von Komplexen $f : C^\cdot \to J^\cdot$ und den induzierten Morphismus g von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & J^N \arrow[r] & J^{N+1} \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & ker\ d^N \arrow[r] \arrow[u] & C^N \arrow[r] \arrow[u, "f^N"] & C^{N+1} \arrow[r] \arrow[u, "f^{N+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Satz 6.14 (b) ist g nullhomotop. Damit ist auch $f \sim 0$ (da $f^i = 0$ für $i < N$).

Mit der Definition $\psi^{n,m} = (\rho^{m,n})_*(\varepsilon^*)^{-1}$ folgen nun die Eigenschaften 11.10 (i) und (ii) leicht. Für 11.10 (iii) benutzen wir die folgende

Konstruktion 11.17 Sei

$$0 \to C^\cdot \xrightarrow{i} D^\cdot \xrightarrow{p} E^\cdot \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in einer abelschen Kategorie A, die *komponentenweise zerfällt*, d.h., für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^n \arrow[r, "i_n"] & D^n \arrow[l, bend left, "r_n"] \arrow[r, "p_n"] & E^n \arrow[l, bend left, "s_n"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

zerfallend exakt, d.h., es gibt die angegebenen Morphismen r_n (eine Retraktion für i_n) und s_n (einen Schnitt von p_n) mit

$$r_n i_n = id_{C^n} \quad , \quad p_n s_n = id_{E^n} \quad , \quad i_n r_n + s_n p_n = id_{D^n}.$$

Definiere den Morphismus von Komplexen (!)

$$\Delta : E^{\cdot} \to C^{\cdot}[1]$$

durch $\Delta^n = r_{n+1} d_n s_n : E^n \to C^{n+1}$. Dann gilt für den Verbindungsmorphismus

$$\delta = H^n(\Delta) : H^n(E^{\cdot}) \to H^n(C^{\cdot}[1]) = H^{n+1}(C^{\cdot}).$$

Beweis selbst! (Siehe die Konstruktion in 5.11).

Sei nun $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ exakt in A. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, hook, "\eta'"'] & B \arrow[r] \arrow[d, hook, "\eta"'] & B'' \arrow[r] \arrow[d, hook, "\eta''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J_1^{\cdot} \arrow[r] & J_2^{\cdot} \arrow[r] & J_3^{\cdot} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

wobei η', η und η'' injektive Auflösungen sind, und unten eine exakte Sequenz von Komplexen steht (siehe 6.16). Wegen der Injektivität der J_1^n haben wir zerfallende Sequenzen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J_1^n \arrow[r] & J_2^n \arrow[l, bend left, "r_n"] \arrow[r] & J_3^n \arrow[l, bend left, "s_n"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Sei $x \in Ext_A^n(A, B'')$, repräsentiert durch $f \in H^n(Hom^{\cdot}(I^{\cdot}, J_3^{\cdot})) = Hom_{K(A)}(I^{\cdot}, J_3^{\cdot}[n])$. Dann ist

$$\begin{tikzcd} Ext_A^n(A, B'') \arrow[r, "\Psi^{n,m}"] \arrow[d, equal] \arrow[ddd, bend right=60, "\delta"'] & Hom_B(R^m FA, R^{n+m} FB'') \arrow[d, equal] \\ Hom_{K(A)}(I^{\cdot}, J_3^{\cdot}[n]) \arrow[r, "\rho^{n,m}"] \arrow[d] & Hom(H^m(FI^{\cdot}), H^m(FJ_3^{\cdot}[n])) \arrow[d, "\delta_*"] \\ Hom_{K[A]}(I^{\cdot}, J_1^{\cdot}[n+1]) \arrow[r, "\rho^{n+1,m}"] \arrow[d, equal] & Hom(H^m(FI^{\cdot}), H^m(FJ_1^{\cdot}[n+1])) \arrow[d, equal] \\ Ext_A^{n+1}(A, B') \arrow[r, "\Psi^{n+1,m}"] & Hom_B(R^m FA, R^{m+n+1} FB') \end{tikzcd}$$

kommutativ. Dies ist klar für das obere und das untere Rechteck, und in der Mitte haben wir die Abbildungen

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (Ff)_* \arrow[d, mapsto] \\ \Delta \circ f \arrow[r, mapsto, "p"'] & F(\Delta)_* \circ Ff_* \ . \end{tikzcd}$$

Analog hat man für eine exakte Sequenz

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

ein Diagramm von injektiven Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, hook, "\varepsilon'"] & A \arrow[r] \arrow[d, hook, "\varepsilon"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, hook, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_1^\cdot \arrow[r, "i"] & I_2^\cdot \arrow[r, "p"] \arrow[l, bend left, "r^\cdot"] & I_3^\cdot \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s^\cdot"] & 0 \ , \end{tikzcd}$$

mit komponentenweisen Spaltungen. Wir erhalten eine exakte Sequenz mit Spaltungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Hom^\cdot(I_3^\cdot, J^\cdot) \arrow[r, shift left, "p^*"] & Hom^\cdot(I_2^\cdot, J^\cdot) \arrow[l, shift left, "s^*"] \arrow[r, shift left] & Hom^\cdot(I_1^\cdot, J^\cdot) \arrow[l, shift left, "r^*"] & 0 \ . \end{tikzcd}$$

Ist nun $f \in Hom^{n-1}(I_1^\cdot, J^\cdot)$ mit $d(f) = 0$, so folgt mit Konstruktion 11.17

$$\begin{aligned} \delta([f]) &= [(s^* dr^*)(f)] &&= [(dfr + (-1)^n frd)s] \\ &= [(-1)^n frds] &&= (-1)^n [f \circ \Delta], \end{aligned}$$

wobei $\Delta = rds : I_3^\cdot \to I_1^\cdot[1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} \Psi^{n,m}(\delta([f])) &= (-1)^n H^m(F(f[1] \circ \Delta)) \\ = \quad & (-1)^n H^m(F(f[1]) \circ H^m(F(\Delta)) = (-1)^n \Psi^{n-1,m+1}(f) \circ \delta. \end{aligned}$$

Dies zeigt 11.10 (iv).

12 Grothendieck-Serre-Dualität

Die Grothendieck-Serre-Dualität hat viele Anwendungen, insbesondere im Zusammenhang mit dem Satz von Riemann-Roch. Zunächst betrachten wir die Dualität auf dem projektiven Raum.

Satz 12.1 Sei k ein Körper, $d \geq 1$, $n \geq 0$ und $P := \mathbb{P}_k^d$ der d-dimensionale projektive Raum über k. Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_P$-Modul $\mathcal{F}$ ist dann die Yoneda-Paarung (siehe 11.10)

$$Ext_P^n(\mathcal{F}, \mathcal{O}_P(-d-1)) \times H^{d-n}(P, \mathcal{F}) \to H^d(P, \mathcal{O}(-d-1)) \overset{10.3(c)}{\cong} k$$

eine perfekte Paarung von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen, induziert also einen Isomorphismus

$$Ext_P^n(\mathcal{F}, \mathcal{O}_P(-d-1)) \cong H^{d-n}(P, \mathcal{F})^*$$

wobei $V^* = Hom_k(V, k)$ der Dualraum eines k-Vektorraums V sei.

Dazu zeigen wir zunächst

Lemma 12.2 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul.

(a) Ist J ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist $J \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ ebenfalls injektiv.

(b) Der Funktor $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ induziert Isomorphismen

$$Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L})$$

$$\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L})$$

für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ und alle $n \geq 0$.

Beweis (a) folgt sofort daraus, dass $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ ein exakter Funktor und eine Kategorienäquivalenz (mit Quasi-Inversem $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}$) ist (vergleiche auch 11.2!).

(b) Die Morphismen sind induziert von

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}) \\ f & \mapsto & f \otimes id_{\mathcal{L}} \, . \end{array}$$

Ist nun $\mathcal{G} \hookrightarrow J^\cdot$ eine injektive Auflösung, so ist nach (a) $\mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \hookrightarrow J^\cdot \otimes \mathcal{L}$ eine injektive Auflösung. Der Isomorphismus von Komplexen

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, J^\cdot) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, J^\cdot \otimes \mathcal{L})$$

induziert die gewünschten Isomorphismen.

Beweis von 12.1 Wir führen Induktion über n. Sei $n=0$:

1. Schritt: Sei $\mathcal{F} = \mathcal{O}_P(m)$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(m), \mathcal{O}_P(-d-1)) & \times & H^d(P, \mathcal{O}_P(m)) & \longrightarrow & H^d(P, \mathcal{O}_P(-d-1)) \cong k \\
\wr \Big\uparrow {\scriptstyle 12.2,\ \text{Tensorieren mit } \mathcal{O}_p(m)} & & & & \\
Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_P(-m-d-1)) & & & & \\
\Big\| \wr & & & & \\
H^0(P, \mathcal{O}_P(-m-d-1)) & \cong & k[X_0, \ldots, X_d]_{-m-d-1} & &
\end{array}$$

wobei die linke vertikale Abbildung ein Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_d]_{-m-d-1}$ auf die Abbildung $\mathcal{O}_P(-m) \xrightarrow{\cdot f} \mathcal{O}_P(-d-1)$ ("Multiplikation mit f") abbildet.

Die Paarung identifiziert sich also mit der von Satz 10.3 und ist daher perfekt.

2. Schritt: Sei nun $\mathcal{F}$ beliebig kohärent. Die Yoneda-Paarungen induzieren Morphismen

$$\begin{array}{ccc}
\psi_n = \psi^{n,d-n} : Ext^n_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_P(-d-1)) & \longrightarrow & Hom_k(H^{d-n}(P, \mathcal{F}), H^d(P, \mathcal{O}_P(-d-1))) \\
& & \Big\| \\
& & H^{d-n}(P, \mathcal{F})^* \,,
\end{array}$$

wobei wir die Isomorphie $H^d(P, \mathcal{O}_P(-d-1)) \cong k$ benutzt haben. Nach Satz 9.13 gibt es eine exakte Sequenz

$$\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0\,,$$

wobei $\mathcal{E}_i \cong \mathcal{O}_P(-m_i)^{r_i}$ mit geeigneten $m_i, r_i \in \mathbb{N}$ $(i = 0, 1)$, und nach 11.10 (ii) erhalten wir ein kommutatives Diagramm, wobei $\mathcal{M} := \mathcal{O}_P(-d-1)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_0(\mathcal{F})"] & Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_0(\mathcal{E}_0)"] & Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}) \arrow[d, "\psi_0(\mathcal{E}_1)"] \\
0 \arrow[r] & H^d(P, \mathcal{F})^* \arrow[r] & H^d(P, \mathcal{E}_0)* \arrow[r] & H^d(P, \mathcal{E}_1)^*
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist exakt wegen der Linksexaktheit des Hom-Funktors, und die untere auch, da sie das k-Dual der exakten Zeile

$$H^d(P, \mathcal{E}_1) \to H^d(P, \mathcal{E}_0) \to H^d(P, \mathcal{F}) \to 0$$

ist: $H^d(P, -)$ ist rechtsexakt auf $Mod_{\mathcal{O}_P}$, da $H^i(P, \mathcal{F}) = 0$ für $i > d$ und quasi-kohärentes $\mathcal{F}$ (siehe (10.5.1) im Beweis von 10.5 (a)).

Nach dem 1. Schritt sind $\psi_0(\mathcal{E}_0)$ und $\psi_0(\mathcal{E}_1)$ Isomorphismen, also auch $\psi_0(\mathcal{F})$.

Sei nun die Behauptung für $n \geq 0$ bewiesen und $\mathcal{F}$ kohärent. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0\,,$$

wobei $\mathcal{E} = \mathcal{O}_P(-m)^r$ für geeignete m und $r \in \mathbb{N}$, $m, r \geq 1$, und $\mathcal{F}'$ wieder kohärent ist. Wir erhalten ein Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
Ext^n_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n(\mathcal{E})"] & Ext^n_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}', \mathcal{M}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\psi_n(\mathcal{F}')"] & Ext^{n+1}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{F}, \mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n+1}(\mathcal{F})"] & Ext^{n+1}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \arrow[d, "\psi_{n+1}(\mathcal{E})"] \\
H^{d-n}(P, \mathcal{E})^* \arrow[r] & H^{d-n}(P, \mathcal{F}')^* \arrow[r, "\delta^* \cdot (-1)^{n+1}"] & H^{d-n-1}(P, \mathcal{F})^* \arrow[r] & H^{d-n-1}(P, \mathcal{E})^*
\end{tikzcd}$$

welches nach 11.10 (iv) kommutativ ist.

Nach Induktionsvoraussetzung sind $\psi_n(\mathcal{E})$ und $\psi_n(\mathcal{F}')$ Isomorphismen. Weiter ist für $n \geq 0$ $H^{d-n-1}(P, \mathcal{E}) = 0$ nach 10.3 (a) und (b), und zusammen mit 11.7 (b) ebenfalls

$$Ext^{n+1}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \cong H^{n+1}(P, \mathcal{O}_P(+m-d-1))^r = 0\,.$$

Es folgt, dass $\psi_{n+1}(\mathcal{F})$ ein Isomorphismus ist. (Für $n+1 = d$ ist $H^d(P, \mathcal{O}_P(m-d-1))$ dual zu $H^0(P, \mathcal{O}_P(-m) = 0$; die letzte Gleichheit gilt wegen $m > 0$).

Die Behauptungen der folgenden beiden Lemmas sind leicht zu zeigen.

Lemma/Definition 12.3 (a) Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Setze $T^0(M) = A$, und für $n > 0$

$$T^n(M) = M^{\otimes n} = M \otimes_A \ldots \otimes_A M \qquad (m\text{-mal}).$$

Dann wird

$$T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$$

durch das Tensorprodukt, d.h., die Abbildungen

$$T^m(M) \times T^n(M) \to T^{m+n}(M) \qquad \text{mit}$$

$$(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m, b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) \mapsto a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_n$$

zu einer assoziativen (nicht kommutativen) graduierten A-Algebra, die die **Tensoralgebra von** M heißt.

(b) Sei I_1 das (zweiseitige, graduierte) Ideal, welches durch die Elemente $x \otimes y - y \otimes x$ erzeugt wird. Dann heißt

$$S(M) = T(M)/I_1 = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(M)$$

die symmetrische Algebra von M, und $S^n(M)$ heißt die **n-te symmetrische Potenz** von M.

(c) Sei I_2 das Ideal, welches durch die Elemente $x \otimes x$ für $x \in M$ erzeugt wird. Dann heißt

$$\Lambda(M) = T(M)/I_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(M)$$

die äußere Algebra von M, und $\Lambda^n(M)$ die n-te äußere Potenz von M.

(c) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so definiere $T(\mathcal{F}) = \bigoplus_{r \geq 0} T^r(\mathcal{F})$ als die $\mathcal{O}_X$-Modul-Garbe, die zur Prägarbe $U \mapsto T(\mathcal{F}(U))$ assoziiert ist. Entsprechend werden die symmetrische Algebra $S(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(\mathcal{E})$ und die äußere Algebra $\Lambda(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(\mathcal{E})$ definiert.

Lemma 12.4 (universelle Eigenschaften) (a) Sei A ein Ring und seien M und N zwei A-Moduln.

Dann hat man eine kanonische Isomorphie von A-Moduln

$$Hom_A(S^n(M), N) \cong Sym_A(M^n, N)\,,$$

wobei rechts der A-Modul der symmetrischen A-multilinearen Abbildungen $M^n \to N$ steht, sowie die A-Modul-Isomorphie

$$Hom_A(\Lambda^n(M), N) \cong Alt_A(M^n, N)\,,$$

wobei rechts der Modul der alternierenden A-multilinearen Abbildungen $M^n \to N$ steht.

(b) Für $m_1, \dots, m_n \in M$ sei $m_1 \dots m_n$ das Bild von $m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ in $Sym^n M$. Ist M freier A-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_d$, so hat man einen Isomorphismus von graduierten kommutativen A-Algebren

$$\begin{array}{rcl} A[X_1, \dots, X_d] & \overset{\sim}{\to} & Sym(M) \\ X_i & \mapsto & e_i \in M = Sym^1(M)\,. \end{array}$$

Insbesondere ist $Sym^n(M)$ ein freier A-Modul vom Rang

$$rg(A[X_1, \dots, X_d]_n) = \begin{pmatrix} d-n-1 \\ d-1 \end{pmatrix}\,,$$

mit Basis $\{e_1^{n_1} \dots e_d^{n_d} \mid n_1 + n_2 + \dots + n_d = n\}$.

(c) Für $m_1, \dots, m_n \in M$ sei $m_1 \wedge \dots \wedge m_n$ das Bild von $m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ in $\Lambda^n(M)$. Ist M freier A-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_d$, so ist $\Lambda^n(M)$ ein freier A-Modul von Rang $\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}$, mit Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_n\}\,.$$

Insbesondere ist $\Lambda^n(M) = 0$ für $n > d$.

(d) Entsprechende Aussagen gelten für einen geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und einen freien $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$.

Lemma 12.5 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ist

(12.5.1) $$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

eine exakte Sequenz von lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduln mit Rängen e, f und g, so hat man einen kanonischen $\mathcal{O}_X$-Modul-Isomorphismus

$$\eta : \Lambda^e(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^g(\mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} \Lambda^f(\mathcal{F})\,.$$

Beweis Da η kanonisch ist, genügt es, den Fall von freien $\mathcal{O}_X$-Moduln zu betrachten (Die lokal gegebenen Isomorphismen verkleben sich dann). Sei

$$\begin{array}{lll} (a_1, \dots, a_e) & \text{eine Basis von} & \mathcal{E}\,, \\ (c_1, \dots, c_g) & \text{eine Basis von} & \mathcal{G}\,. \end{array}$$

Seien $a_1', \dots, a_e'$ die Bilder der a_i in $\mathcal{F}$, und seien $c_1', \dots, c_g'$ irgendwelche Urbilder der c_i in $\mathcal{F}$ (wegen der angenommenen Freiheit von $\mathcal{G}$ zerfällt die Sequenz (12.5.1), also auch die Sequenz der globalen Schnitte). Dann ist

$$a'_1, \ldots, a'_e, c'_1, \ldots, c'_g$$

eine Basis von $\mathcal{F}$. Weiter sind

$$a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_e,\ c = c_1 \wedge \ldots \wedge c_g,\ b = a'_1 \wedge \ldots \wedge a'_e \wedge c'_1 \wedge \ldots \wedge c'_g$$

Basen von $\Lambda^e(\mathcal{E}), \Lambda^g(\mathcal{G})$ und $\Lambda^{e+g}(\mathcal{F})$ (diese $\mathcal{O}_X$-Moduln sind alle frei vom Rang 1).

Definiere nun η als den eindeutig bestimmten $\mathcal{O}_X$-Modul Homomorphismus mit

$$\eta(a \otimes c) = b\,.$$

Man zeigt nun, dass dies unabhängig von der Wahl der Liftungen $c'_1 \wedge \ldots \wedge c'_g$ ist (da $a'_1 \wedge \ldots \wedge a'_e \wedge a'_i = 0$ für alle i). Weiter ist dies unabhängig von der Wahl der Basen $(a_1, \ldots, a_e)$ und $(c_1, \ldots, c_g)$: Wählt man andere Basen $(\tilde{a}_i)$ und $(\tilde{c}_j)$, mit Übergangsmatrizen A bzw. C, so ist $\tilde{a} = \tilde{a}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{a}_e = \det A \cdot a_1 \wedge \ldots \wedge a_e$ und $\tilde{c} = \tilde{c}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{c}_g = \det C \cdot (c_1 \wedge \ldots \wedge c_g)$, und wir können die Lifts $\tilde{c}'_j$ so wählen, dass die Übergangsmatrix für $\tilde{a}'_1, \ldots \tilde{a}'_e, \tilde{c}'_1, \ldots, \tilde{c}'_g$ die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

wird. Dann ist $\tilde{b} = \tilde{a}'_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{a}'_e \wedge \tilde{c}'_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{c}'_g = \det B \cdot b = \det A \cdot \det C \cdot b$, so dass η auch $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$ auf $\tilde{c}$ abbildet.

Bemerkung 12.6 Sei $P = \mathbb{P}^d_A$ für einen Ring A und ein $d \geq 1$. Wegen der exakten Sequenz

$$0 \to \Omega^1_P \to \mathcal{O}_P(-1)^{d+1} \to \mathcal{O}_P \to 0$$

(Satz 1.24) hat man einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_P(-d-1) \cong \Lambda^d \Omega^1_P = \Omega^d_P =: \omega_P\,.$$

Wir können also $\mathcal{O}_P(-d-1)$ durch ω_P ersetzen. Weiter kann man zeigen, dass es einen kanonischen *koordinatenunabhängigen* Isomorphismus

$$tr : H^d(\mathbb{P}^d_A, \omega_{\mathbb{P}^d_A}) \xrightarrow{\sim} A$$

gibt.

Satz 12.7(Grothendieck-Serre-Dualität) Sei X eine glatte projektive Varietät der Dimension d über dem Körper k und sei $\omega_X := \Omega^d_{X/k} = \Lambda^d \Omega^1_{X/k}$.

(a) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$tr : H^d(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$$

(Spur-Isomorphismus).

(b) Für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist die Paarung

$$Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\omega_X) \times H^{d-n}(X,\mathcal{F}) \to H^d(X,\omega_X) \underset{\sim}{\overset{tr}{\to}} k$$

perfekt und induziert eine Isomorphie

$$Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\omega_X) \overset{\sim}{\to} H^{d-n}(X,\mathcal{F})^*\,.$$

(c) Ist $\mathcal{F}$ lokal frei, so hat man eine perfekte Paarung

$$H^n(X,\underline{Hom}(\mathcal{F},\omega_X)) \times H^{d-n}(X,\mathcal{F}) \to H^d(X,\omega_X) \cong k$$

und somit einen Isomorphismus

$$H^n(X,\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X) \overset{\sim}{\to} H^{d-n}(X,\mathcal{F})^*$$

wobei $\mathcal{F}^\vee = \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$ das Dual von $\mathcal{F}$ ist.

Beweis (c) folgt aus (b), denn für lokal freies $\mathcal{F}$ gilt $Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\omega_X) \cong H^n(X,\underline{Hom}(\mathcal{F},\omega_X))$ (11.7 (b)), und weiter ist der offensichtliche Morphismus

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \overset{\sim}{\to} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\omega_X)$$

ein Isomorphismus.

Die Strategie für (a) und (b) ist die Rückfürung auf den Fall $X = \mathbb{P}^N_k$, d.h., Satz 12.1:

Lemma 12.8 Sei $i : X \hookrightarrow Y$ eine abgeschlossene Immersion von Schemata, mit Idealgarbe J. Dann sind die Funktoren

$$(\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \underset{i^*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} (\mathcal{O}_Y\text{-Moduln } \mathcal{G} \text{ mit } J\mathcal{G} = 0)$$

zueinander inverse Kategorieäquivalenzen.

Beweis Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist $i_*\mathcal{F}$ ein $i_*\mathcal{O}_X$-Modul, und ein $\mathcal{O}_Y$-Modul mittels der exakten Sequenz

$$0 \to J \to \mathcal{O}_Y \to i_*\mathcal{O}_X \to 0\,;$$

es folgt $Ji_*\mathcal{F} = 0$. Der Adjunktionsmorphismus

$$\begin{array}{ccc} i^*i_*\mathcal{F} & \overset{ad}{\to} & \mathcal{F} \\ (Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G} = i_*\mathcal{F}, i_*\mathcal{F}) & \overset{I17.16}{\cong} & Hom_{\mathcal{O}_X}(i^*\mathcal{G},\mathcal{F}) \\ id & \mapsto & ad \end{array}$$

ist ein Isomorphismus: für die Halme bei $x \in X$ hat man

$$(i^*i_*\mathcal{F})_x = (\mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i_*\mathcal{F})_x = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} (i_*\mathcal{F})_* = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \mathcal{F}_x \overset{\sim}{\to} \mathcal{F}_x\,.$$

Ist umgekehrt $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul mit $J\mathcal{G} = 0$, so ist die Adjunktionsabbildung

$$\mathcal{G} \to i_*i^*\mathcal{G}$$

ebenfalls ein Isomorphismus: für $x \in Y \smallsetminus X$ ist $\mathcal{G}_x = 0 = (i_*i^*\mathcal{G})_x$, und für $x \in X$ ist

$$(i_*i^*\mathcal{G})_x = (i^*\mathcal{G})_x = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \mathcal{G}_x = \mathcal{G}_x\,,$$

da $J_x\mathcal{G}_x = 0$.

Corollar 12.9 Der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} i^! : & (\mathcal{O}_Y\text{-Moduln}) & \to & (\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & i^*\underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \end{array}$$

ist rechtsadjungiert zum Funktor

$$i_* : (\mathcal{O}_X\text{-Moduln}) \to (\mathcal{O}_Y\text{-Moduln})\,.$$

Er respektiert Injektive.

Beweis Für $\mathcal{F} \in Mod_{\mathcal{O}_X}$ und $\mathcal{G} \in Mod_{\mathcal{O}_Y}$ ist

$$\begin{array}{rll} & Hom_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong Hom_{\mathcal{O}_Y}(i_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X), \mathcal{G}) & \\ \cong & Hom_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i_*\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) & \text{(auf den Halmen nachrechnen)} \\ \overset{I17.11}{\cong} & Hom_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{F}, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{O}_X, \mathcal{G})) & \\ \overset{12.8}{\cong} & Hom_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{F}, i_*i^*\underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{O}_X, \mathcal{G})) & (\text{da } J \cdot \underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(i_*\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0) \\ \overset{12.8}{\cong} & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, i^*\underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(i_*)\mathcal{O}_X, \mathcal{G})) & \end{array}$$

Da das Linksadjungierte i_* exakt ist, respektiert $i^!$ nach 11.2 Injektive.

Wir wenden dies an auf die abgeschlossene Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_X = P$ mit Idealgarbe J. Sei $\omega_P \hookrightarrow I^\cdot$ eine Auflösung von ω_P durch injektive $\mathcal{O}_P$-Moduln. Dann ist

$$Ext^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F}, \omega_P) \overset{\text{Def.}}{=} H^n(Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F}, I^\cdot)) \overset{12.9}{\cong} H^n(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, i^! I^\cdot))\,.$$

Wir untersuchen den Komplex $\mathcal{K}^\cdot = i^! I^\cdot$, der nach 12.9 injektive Komponenten hat. Da $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, I^\cdot)$ von J annulliert wird, ist

$$H^m(\mathcal{K}^\cdot) = H^m(i^*\underline{Hom}_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, I^\cdot)) \overset{12.8}{=} i^*H^m(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, I^\cdot)) = i^*\underline{Ext}^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_P)\,.$$

Nun gilt:

Satz 12.10 Es ist

$$\underline{Ext}^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_P) = \begin{cases} i_*\omega_X & m = N - d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Später.

Der Komplex

$$0 \to \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1 \to \dots \xrightarrow{d^{N-d-1}} \mathcal{K}^{N-d} \xrightarrow{d^{N-d}} \mathcal{K}^{N-d+1} \to \dots$$

ist also exakt in den Graden $< N-d$ und $> N-d$, und seine $(N-d)$-te Kohomologie ist $i^*i_*\omega_X = \omega_X$. Der Komplex

$$\mathcal{K}^{<N-d}: \quad 0 \to \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1 \to \dots \to \mathcal{K}^{N-d-1} \to im(d^{N-d-1}) \to 0$$

ist also exakt. Da $\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}^{N-d-1}$ injektiv sind, folgt induktiv, dass $im(d^{N-d-1})$ injektiv ist (ein $\mathcal{O}_X$-Modul I ist genau dann injektiv, wenn $Ext^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, I) = 0$ für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und alle $i > 0$). Der Komplex $\mathcal{K}^{<N-d}$ ist also exakt mit injektiven Komponenten. Mit Corollar 6.15 folgt, dass der Komplex nullhomotop ist ($\mathcal{K}^{<N-d}$ ist eine injektive Auflösung von 0). Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ ist dann auch $Hom(\mathcal{F}, \mathcal{K}^{<N-d})$ nullhomotop, also exakt. Andererseits ist

$$L^\cdot: \quad \mathcal{K}^{N-d}/im(d^{N-d-1}) \to \mathcal{K}^{N-d+1} \to \mathcal{K}^{N-d+2} \to \dots$$

eine injektive Auflösung von $H^{N-d}(\mathcal{K}^\cdot) \overset{12.10}{=} \omega_X$ und gleich $\mathcal{K}^\cdot/\mathcal{K}^{<N-d}[N-d]$. Mit der exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}^{<N-d}) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}^\cdot) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}^\cdot/\mathcal{K}^{<N-d}) \to 0$$

folgt nun

$$\begin{aligned} Ext^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F}, \omega_P) = H^m(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}^\cdot)) &\xrightarrow{\sim} H^m(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}^\cdot/\mathcal{K}^{<N-d}) \\ = H^{m-N+d}(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, L^\cdot)) &\cong Ext^{m-N+d}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X)\,. \end{aligned}$$

Sei nun $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\cdot$ eine Auflösung von $\mathcal{F}$ durch injektive $\mathcal{O}_X$-Moduln und $\omega_P \hookrightarrow J^\cdot$ eine Auflösung von ω_P durch injektive $\mathcal{O}_P$-Moduln. Dann ist $i_*\mathcal{F} \hookrightarrow i_*I^\cdot$ eine Auflösung von $i_*\mathcal{F}$ durch welke $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Die Yoneda-Cartier-Paarung

$$Ext^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F}, \omega_P) \times H^{N-m}(P, i_*\mathcal{F}) \to H^N(P, \omega_P)$$

lässt sich also auch durch die Paarung

$$\begin{array}{rcl} H^m(Hom^\cdot_{\mathcal{O}_P}(i_*I^\cdot, J^\cdot)) \times H^{N-m}(i_*I^\cdot(P)) & \to & H^N(J^\cdot(P)) \\ ([f], [x]) & \mapsto & H^{N-m}(f_*(x)) \end{array}$$

berechnen, wobei wir f als Element von $Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*I^\cdot, J^\cdot[m])$ auffassen (für eine injektive Auflösung $i_*\mathcal{F} \hookrightarrow \tilde{I}^\cdot$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & i_*I^\cdot \arrow[dd, "\alpha"] \\ i_*\mathcal{F} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & \tilde{I}^\cdot \end{tikzcd}$$

und α induziert Isomorphismen der Paarungen, wenn man $i_*I^\cdot$ durch $\tilde{I}^\cdot$ ersetzt).

Man hat ein kommutatives Diagramm von Paarungen

$$
\begin{array}{lccccc}
 & & & & & H^N(P,\omega_P) \\
 & & & & & \shortparallel \\
 & H^{N-m}(Hom^{\cdot}_{\mathcal{O}_P}(i_*I^{\cdot},J^{\cdot})) & \times & H^m(i_*I^{\cdot}(P)) & \to & H^N(J^{\cdot}(P)) \\
(1) & \| & & \mu_*\downarrow\wr & & \mu_*\downarrow\wr \\
 & H^{N-m}(Hom^{\cdot}_{\mathcal{O}_P}(i_*I^{\cdot},J^{\cdot})) & \times & H^m(Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P,i_*I^{\cdot})) & \to & H^n(Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P,J^{\cdot})) \\
(2) & \| & & \varphi^*\uparrow\wr & & \varphi^*\uparrow \\
 & H^{N-m}(Hom^{\cdot}_{\mathcal{O}_P}(i_*I^{\cdot},J^{\cdot})) & \times & H^m(Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X,i_*I^{\cdot})) & \to & H^N(Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X,J^{\cdot})) \\
(3) & \wr\downarrow\psi_* & & i_*\uparrow\wr & & \psi_*\downarrow\wr \\
 & H^{N-m}(Hom^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(I^{\cdot},i^!J^{\cdot})) & \times & H^m(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,I^{\cdot})) & \to & H^N(Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,i^!J^{\cdot})) \\
(4) & \| & & \nu_*\uparrow\wr & & \nu_*\uparrow\wr \\
 & H^{N-m}(Hom^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(I^{\cdot},i^!J^{\cdot})) & \times & H^m(I^{\cdot}(X)) & \to & H^N(i^!J(X)) \\
(5) & \downarrow\wr & & \| & & \downarrow\wr \\
 & H^{N-m}(Hom^{\cdot}_{\mathcal{O}_X}(I^{\cdot},\mathcal{K}^{\cdot}/\mathcal{K}^{>N-d})) & \times & H^m(I^{\cdot}(X)) & \to & H^N((\mathcal{K}^{\cdot}/\mathcal{K}^{>N-d})(X)) \\
(6) & \|\wr\ \text{12.10} & & \|\wr\ \text{Def.} & & \|\wr\ \text{12.10} \\
 & Ext^{d-m}(\mathcal{F},\omega_X) & \times & H^m(X,\mathcal{F}) & \to & H^d(X,\omega_X)
\end{array}
$$

Hierbei ist μ_* vom Isomorphismus von Funktoren $Mod_{\mathcal{O}_P} \to Ab$

$$\mu : H^0(P,-) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P,-)$$

induziert; dies zeigt die Kommutativität von (1), wobei in den Zeilen 2,3 und 4 die Paarungen durch Komposition von Komplexmorphismen gegeben seien.

Ebenso ist ν_* vom Isomorphismus von Funktoren $Mod_{\mathcal{O}_X} \to Ab$

$$\nu : H^0(X,-) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,-)$$

induziert; daher ist (4) kommutativ.

(2) ist von $\varphi : \mathcal{O}_P \to i_*\mathcal{O}_X$ induziert und daher kommutativ.

In (3) ist ψ_* von der Adjunktion

$$\psi = \psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},i^!\mathcal{G})$$

induziert. Für $\alpha \in Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F},\mathcal{G})$ und $\beta \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}',\mathcal{F})$ gilt dabei

$$\psi(\alpha \circ i_*(\beta)) = \psi(\alpha) \circ \beta$$

$$
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i^*\alpha"'] & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
Hom_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{F}',\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi"] & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}',\mathcal{G})
\end{tikzcd}
$$

Dies zeigt die Kommutativität von (3).

Das Diagramm (5) kommutiert trivialerweise, und (6) kommutiert, wenn in der letzten Zeile die Yoneda-Paarung steht (da $\mathcal{K}^{\cdot}/\mathcal{K}^{>N-d}[N-d]$ mittels 12.10 mit einer injektiven Auflösung $L^{\cdot}$ von ω_X identifiziert wird).

Alle vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen, außer eventuell das rechte φ^* in (2). Dies zeigt aber, dass die unterste Paarung nach Hinterschaltung von

$$tr_X : H^d(X, \omega_X) \xrightarrow{\text{rechte Spalte}} H^N(P, \omega_P) \underset{\sim}{\xrightarrow{tr_P}} k$$

nicht ausgeartet ist. Daraus folgt, dass tr_X nicht trivial ist, aber auch, dass

$$H^d(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega_X) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong k$$

eindimensional ist (ω_X ist eine invertierbare Garbe!). Daher ist tr_X ein Isomorphismus.

13 Koszulkomplexe und lokale Ext-Gruppen

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist der Beweis von Satz 12.10, der noch zum Beweis der Grothendieck-Serre Dualität fehlt. Auf dem Weg dorthin lernen wir aber noch einige wichtige Begriffe und Methoden der kommutativen und homologischen Algebra kennen. Sei k ein Körper.

Lemma/Definition 13.1 Sei X eine glatte irreduzible k-Varietät der Dimension d. Dann ist $\Omega^1_{X/k}$ lokal frei vom Rang d, und

$$\omega_X := \Lambda^d \Omega^1_{X/k}$$

heißt die dualisierende Garbe von X.

Beweis der Behauptung: Jeder Punkt $x \in X$ besitzt nach Definition (Koh. Sch., Definition 4.21) eine offene Umgebung U, so dass $U \to \mathrm{Spec}(k)$ eine Faktorisierung $U \xrightarrow{\alpha} \mathbb{A}^m_k \xrightarrow{p} \mathrm{Spec}(k)$ besitzt, mit étalem α und der kanonischen Projektion p. Dann ist $\Omega^1_{U/h} \cong \alpha^*\Omega^1_{\mathbb{A}^m_k/h}$ frei vom Rang m. Da X zusammenhängend ist, ist $\Omega^1_{X/h}$ also lokal frei von einem konstanten Rang m. Durch Basiswechsel zum algebraischen Abschluss $\overline{k}$ von k können wir dann annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist, und die Gleichheit $m = d$ folgt aus Koh.Sch. 1.16 oder 1.15.

Satz 12.10 folgt nun aus dem allgemeineren

Satz 13.2 Sei $i : X \hookrightarrow P$ eine abgeschlossen Immersion von glatte k-Varietäten der Dimensionen d bzw. N. Dann ist kanonisch

$$Ext^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_p) \cong \begin{cases} i_*\omega_X & , \quad m = N - d \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierzu zeigen wir zunächst, dass Ext-Gruppen, die wir über injektive Auflösungen des zweiten Arguments eingeführt hatten, in speziellen Fällen auch über gewisse Auflösungen im ersten Argument erhalten werden können.

Lemma 13.3 (a) Sei A ein Ring, und seien M und N A-Moduln. Ist $P^{\cdot} \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M, so gibt es kanonische Isomorphismen

$$Ext^n_A(M, N) \cong H^n(Hom_A(P^{\cdot}, N))\,,$$

funktoriell in N.

(b) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Ist $\mathcal{P}^{\cdot} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ eine Auflösung von $\mathcal{F}$ durch lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Rang, so gibt es kanonische Isomorphismen

$$\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^n(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^{\cdot}, \mathcal{G}))\,.$$

Beweis (a): Sei $N \hookrightarrow I^{\cdot}$ eine Auflösung durch injektive A-Moduln. Dann ist

$$\begin{array}{rcll} Ext^n_A(M, N) & = & H^n(Hom_A(M, I^{\cdot})) & \text{(Definition)} \\ & \cong & H^n(Hom_A(P^{\cdot}, I^{\cdot})) & \text{(11.16)} \end{array}$$

da $I^\cdot$ injektive Komponenten hat und $P^\cdot \to M \to 0$ exakt ist. Dual zu 11.16 folgt auch, dass

$$Hom_A(P^\cdot, I^\cdot) \to Hom_A(P^\cdot, N)$$

ein Quasiisomorphismus ist, da $P^\cdot$ projektive Komponenten hat und $0 \to N \to I^\cdot$ exakt ist.
(b) folgt aus (a), mit denselben Konstruktionen, da man für lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{P}$ kanonische Isomorphismen

$$\underline{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{G})_x \cong Ext^n_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{P}_x, \mathcal{G}_x)$$

für alle $x \in X$ hat.

Definition 13.4 Sei A ein Ring und seien $x_1, \ldots, x_n \in A$. Der **Koszul-Komplex** $K. := K.(x_1, \ldots, x_n; A)$ ist wie folgt definiert: Sei

$$K_0 = A, \quad K_1 = A^n = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n, \text{ und allgemein } K_p = \Lambda^p_A K_1 = \bigoplus_{i_1 < \ldots < i_p} Ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},$$

und $d : K_p \to K_{p-1}$ die eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung mit

$$d(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu x_{i_\nu} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_\nu} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},$$

wobei $\hat{e}_{i_\nu}$ das Weglassen von e_{i_ν} bedeutet. (Insbesondere ist $d : K_1 \to K_0$ bestimmt durch $d(e_i) = x_i$. Es ist $d^2 = 0$: selbst nachrechnen).

$K.$ ist also ein homologischer Komplex von freien A-Moduln, wobei $K_p = 0$ für $p > n$. Es ist

$$H_0(K.) = A/ < x_1, \ldots, x_n > .$$

Definition 13.5 Für einen A-Modul M setze

$$K.(x_1, \ldots, x_n; M) := K.(x_1, \ldots x_n; A) \otimes_A M,$$

$$H.(x_1, \ldots, x_n; M) := H.(K.(\underline{x}, M))$$

Beispiel 13.6 Für $x \in A$ ist $K.(x; M)$ der Komplex $M \xrightarrow{\cdot x} M$.

Definition 13.7 (a) $x \in A$ heißt Nullteiler für den A-Modul M, wenn $m \in M \smallsetminus \{0\}$ existiert mit $x \cdot m = 0$.

(b) Eine Sequenz $(x_1, \ldots, x_n)$ in A heißt M-reguläre Sequenz, wenn gilt

x_1 ist kein Nullteiler für M,

x_i ist kein Nullteiler für $M/\sum\limits_{\nu=1}^{i-1} x_i M, \quad$ für $i \geq 2$.

Für $M = A$ sprechen wir auch von einer regulären Sequenz.

Proposition 13.8 Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine M-reguläre Sequenz, so ist $K.(x_1, \ldots, x_n; M)$ eine Auflösung von $H_0(x_1, \ldots, x_n; M) = M/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle M$.

Beweis Die letzte Gleichheit ist klar. Es ist also zu zeigen, dass $H_i(x_1,\ldots,x_n;M)=0$ für $i>0$. Wir zeigen dies durch Induktion nach n: Der Fall $n=1$ ist klar.

Für $n\geq 1$ betrachten wir die exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_p(x_1,\ldots,x_n;M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "d"'] & K_p(x_1,\ldots,x_{n+1};M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "d"'] & K_{p-1}(x_1,\ldots,x_n;M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1(x_1,\ldots,x_n;M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & K_1(x_1,\ldots,x_{n+1};M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & K_0(x_1,\ldots,x_n;M)=M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \langle x_1,\ldots,x_n\rangle M \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & \langle x_1,\ldots,x_{n+1}\rangle M \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & M/\langle x_1,\ldots,x_n\rangle M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist α die offensichtliche Inklusion (die $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$ auf $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$ abbildet), und es gilt

$$\beta(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p})=\begin{cases} 0 & , \quad i_p\neq n+1, \\ e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_{p-1}} & , \quad i_p=n+1\,. \end{cases}$$

Weiter ist auch α' die Inklusion, und β' über den Isomorphismus

$$M/\langle x_1,\ldots,x_n\rangle M \overset{\cdot x_{n+1}}{\underset{\sim}{\to}} \langle x_1,\ldots,x_{n+1}\rangle M/\langle x_1,\ldots,x_n\rangle M$$

definiert (die Injektivität dieser Abbildung folgt aus der M-Regularität von $(x_1,\ldots,x_{n+1})$).

Nach Induktionsannahme sind die beiden äußeren Spalten exakt; es folgt $H_i(x_1,\ldots,x_{n+1};M)=0$ für $i>0$.

Satz 13.9 Wird das Ideal $I\subseteq A$ von einer regulären Folge $x_1,\ldots,x_r$ erzeugt, so gilt

$$Ext^i_A(A/I,A)=\begin{cases} A/I & i=r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis Nach 13.8 ist $K.(x_1,\ldots,x_r;A)$ eine freie Auflösung von A/I, also

$$Ext^i_A(A/I,A) \overset{13.3\,(a)}{=} H^i(Hom_A(K.(x_1,\ldots,x_r;A),A)) \overset{(*)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i>r\,, \\ A/I & \text{für} \quad i=r\,. \end{cases}$$

Beweis von $(*)$: Der Fall $i=r$ folgt aus der expliziten Beschreibung des Koszulkomplexes. Setze nun $A_0=A, A_\nu=A/\langle x_1,\ldots,x_\nu\rangle, 0\leq\nu\leq r$. Wir beweisen durch absteigende Induktion nach ν, dass

$$Ext^i_A(A/I,A_\nu)=0 \quad \text{für} \quad i<r-\nu\,.$$

Für $\nu = r$ ist nichts zu zeigen.

Für den Induktionsschluss betrachte die exakte Sequenz (für $\nu \leq r$)

$$0 \to A_{\nu-1} \overset{\cdot x_\nu}{\to} A_{\nu-1} \to A_\nu \to 0$$

(Beachte, dass x_ν wegen Regularität der Sequenz kein Nullteiler in $A_{\nu-1}$ ist). Die zugehörige lange Ext-Sequenz liefert nach Induktion eine Injektion

(13.9.1) $$Ext_A^{i-1}(A/I, A_{\nu-1}) = 0 \to Ext_A^i(A/I, A_{\nu-1}) \overset{\cdot x_\nu}{\to} Ext_A^i(A/I, A_{\nu-1})$$

für $i - 1 < r - \nu$, also $i < r - (\nu - 1)$. Diese Abbildung wird aber auch induziert von der Multiplikation $A/I \overset{\cdot x_\nu}{\to} A/I$ (wegen der Eindeutigkeit der A-Modulstruktur auf $Ext_A^i(M, N)$ für A-Moduln M und N – diese folgt aus der Eigenschaft von universellen δ-Funktoren vom Fall $i = 0$, d.h., $Hom_A(M, N)$). Diese Multiplikation ist aber die Nullabbildung (wegen $x_\nu \in I$), also auch die Abbildung (13.9.1); es folgt $Ext_A^i(A/I, A_{\nu-1}) = 0$.

Proposition 13.10 Sei A ein regulärer noetherscher lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$.

(a) Ist $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$, so ist $A/\langle x\rangle$ regulär mit $\dim(A/\langle x\rangle) = \dim(A) - 1$.

(b) Sind $x_1, \ldots, x_r$ Elemente in $\mathfrak{m}$, deren Bilder $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ linear unabhängig über dem Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$ sind, so ist $(x_1, \ldots, x_r)$ eine reguläre Folge.

Beweis (a): Sei $\delta(A)$ die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, für die es Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}$ gibt, so dass $A/\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ endliche Länge hat. Nach der lokalen Dimensionstheorie gilt dann $\delta(A) = \dim(A)$ (für jeden noetherschen lokalen Ring, siehe Alg. Geo. I, Corollar 8.25). Offenbar gilt dann für jedes $x \in \mathfrak{m}$

$$\delta(A) \leq \delta(A/\langle x\rangle) + 1\,,$$

also

(13.10.1) $$\dim(A) \leq \dim(A/\langle x\rangle) + 1\,.$$

Weiter ist der Ring $\overline{A} = A/\langle x\rangle$ lokal mit maximalen Ideal $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\langle x\rangle$. Wir haben also eine exakte Sequenz von k-Vektorräumen

(13.10.2) $$\begin{array}{ccl} k & \to & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 \to 0 \\ 1 & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

Ist nun $x \notin \mathfrak{m}^2$, so folgt mit (13.10.1)

$$\begin{array}{ccc} \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) & = & \dim_k(\overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2) + 1 \\ \| & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ \dim(A) & \leq & \dim(\overline{A}) + 1\,. \end{array}$$

Hier gilt die linke Gleichung, da A regulär ist, und die rechte Ungleichung, da $\overline{A}$ noetherscher lokaler Ring ist (Alg. Geo. I, Satz 8.23). Alle Ungleichungen müssen also Gleichungen sein, und es folgt, dass $\overline{A}$ regulär ist, von der Dimension $\dim(A) - 1$.

(b): Wir benutzen, dass ein regulärer lokaler Ring integer ist (siehe z.B. Matsumura, Commutative Algebra; S. 118, Theorem 34 und S. 120, Theorem 35). Hieraus folgt, dass x_1 kein Nullteiler ist. Ist schon gezeigt, dass $(x_1, \dots, x_i)$ eine reguläre Folge bilden $(i < r)$, so ist das Bild von x_{i+1} in $R_i = R/\langle x_1, \dots, x_i\rangle$ nicht null, da $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{i+1}$ linear unabhängig in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sind (Für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}/\langle x_1, \dots, x_i\rangle \subseteq R_i$ ist $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2 \cong (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)/\langle \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i\rangle$). Also ist auch x_{i+1} Nichtnullteiler im regulären Ring R_i, und $(x_1, \dots, x_{i+1})$ ist regulär; dies liefert den Induktionsschluss.

13.11 Beweis von Satz 13.2: Für $i : X \hookrightarrow P$ mit Idealgarbe J wie in 13.2 haben wir eine exakte Sequenz von lokal freien Garben

$$0 \to J/J^2 \to i^*\Omega^1_{P/k} \to \Omega^1_{X/k} \to 0\,.$$

Wir zeigen zunächst $\underline{Ext}^m_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_p) = 0$ für $m \neq N - d$. Hierfür können wir, durch Basiswechsel, annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Für $x \in X$ abgeschlossen haben wir dann eine exakte Sequenz (1.12)

$$0 \to J_x/J_x^2 \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \to \mathfrak{m}_{P,x}/\mathfrak{m}^2_{P,x} \to \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x} \to 0\,. \tag{13.11.1}$$

Es folgt, dass J_x für $x \in X$ durch reguläre Parameter $x_1, \dots, x_{N-d} \in \mathfrak{m}_{P,x}$ erzeugt wird, und mit 13.9 folgt

$$\begin{aligned} Ext^m_{\mathcal{O}_p}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_P)_x &\cong Ext^m_{\mathcal{O}_{P,x}}(\mathcal{O}_{P,x}/J_x, \mathcal{O}_{X,x}) \\ &= 0 \text{ für } m \neq N-d\,. \end{aligned}$$

Für $x \in P - X$ verschwinden beide Halme. Es folgt die Behauptung, da die abgeschlossenen Punkte x dicht in X liegen.

Wir betrachten nun $m = N - d$. Sei $U \subseteq P$ offen so, dass $J|_U$ als $\mathcal{O}_U$-Modul von $N - d$ Schnitten $s_1, \dots, s_{N-d}$ erzeugt wird. Betrachte den Komplex von $\mathcal{O}_U$-Moduln ($s_i \in J(U) \subseteq \mathcal{O}_U(U)$):

$$K_\cdot = K_\cdot(s_1, \dots, s_{N-d}; \mathcal{O}_U) : K_1 = \mathcal{O}_U^{N-d} = \bigoplus_{\nu=1}^{N-d} \mathcal{O}_U e_\nu$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \Lambda^{N-d}\mathcal{O}_U^{N-d} \to \dots \quad \dots \xrightarrow{d_2} \Lambda^1\mathcal{O}_U^{N-d} & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{O}_U \\ e_i & \mapsto & s_i e_i \end{array}$$

$$d_p : e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} s_{i_\nu} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_\nu} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

Nach (13.11.1) und 13.10 (b) ist $(s_1)_x, \dots, (s_{N-d})_x$ für $x \in (X) \cap U$ eine reguläre Folge in $\mathcal{O}_{X,x}$. Nach Lemma 13.8 ist daher $K_\cdot$ eine Auflösung von $H_0(K_\cdot) = \mathcal{O}_U/Im\, d_1 = \mathcal{O}_U/J_U$ durch freie $\mathcal{O}_U$-Moduln, $J_U = J|_U$. Nach Lemma 13.3 ist daher kanonisch

$$\underline{Ext}^m_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U/J_U, \omega_P|_U) \cong H^m(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_U}(K_\cdot, \omega_P|_U))$$

also hat man einen Isomorphismus

$$\varphi_{U,\{s_\mu\}} : \underline{Ext}^{N-d}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U/J_U, \omega_P|_U) \xrightarrow{\sim} \operatorname{coker} \left(\begin{array}{ccc} \omega^{N-d}_{P|_U} & \xrightarrow{d^*_{N-d}} & \omega_{P|_U} \\ (t_\mu)_\mu & \longmapsto & \sum\limits_{\mu=1}^{N-d} (-1)^{\mu-1} s_\mu t_\mu \end{array} \right) = \omega_{P|_U}/J\omega_{P|_U}\,,$$

und damit einen Isomorphimus

$$i^* \underline{Ext}^{N-d}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U/J_U, \omega_{P|_U}) \xrightarrow{\sim} i^*\omega_{P|_U} \,.$$

Andererseits haben wir nach 4.9 eine exakte Sequenz von lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$0 \to i^*J/J^2 \to i^*\Omega^1_{P/k} \to \Omega^1_{X/k} \to 0$$

und somit einen kanonischen Isomorphismus

$$i^*\omega_P = \Lambda^N i^*\Omega^1_{P/k} \cong \Lambda^{N-d} i^*J/J^2 \otimes \Lambda^d \Omega^1_{X/k} \,,$$

und nach Definition ist $\Lambda^d\Omega^1_{X/k} \cong \omega_X$. Es folgt durch Verkleben

$$\underline{Ext}^{N-d}_{\mathcal{O}_P}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_P) \cong i_*[(\Lambda^{n-d} i^*J/J^2)^\vee \otimes i^*\omega_P] \cong i_*\omega_X$$

q.e.d.