

Delignes Beweis der Weil-Vermutung

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Wintersemester 2010/11

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	3
1	Rationalität der Zetafunktion	9
2	Konstruierbare Garben	14
3	Konstruierbare \mathbb{Z}_ℓ -Garben	22
4	Kohomologie mit kompakten Träger	25
5	Der Frobenius-Endomorphismus	28
6	Delignes Satz: Formulierung und erste Reduktionen	33
7	Gewichte und Determinanten-Gewichte	37
8	Kohomologie von Kurven und L -Reihen	43
9	Reinheit von reellen \mathbb{Q}_ℓ -Garben	45
10	Der Formalismus naher und verschwindender Zykel	47
11	Kohomologie von affinen und projektiven Räumen und Reinheit	56
12	Lokale Lefschetz-Theorie	60
13	Beweis von Delignes Satz	75
14	Existenz und globale Eigenschaften von Lefschetzbüscheln	86

0 Einleitung

Die Riemannsche Zetafunktion wird bekanntlich durch die für $Re(s) > 1$ konvergierenden Ausdrücke

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

definiert. Die Produktentwicklung, bei der p über die rationalen Primzahlen läuft, wird im allgemeinen Euler zugeschrieben, und man spricht deswegen von einem Eulerprodukt und Eulerfaktoren. Formal erhält man die letzte Gleichung leicht durch die eindeutige Zerlegung von natürlichen Zahlen in Primzahlen sowie durch die geometrische Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \quad .$$

Die bis heute unbewiesene Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen sollen. Dies wird allgemeiner von den Dedekindschen Zetafunktionen

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}}$$

vermutet. Hierbei ist K ein Zahlkörper, also eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q} , \mathfrak{a} durchläuft die Ideale $\neq 0$ des Rings \mathcal{O}_K der ganzen Zahlen von K , \mathfrak{p} durchläuft die Primideale $\neq 0$, und es ist $N\mathfrak{a} = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$, wobei $|M|$ die Mächtigkeit einer endlichen Menge M bezeichnet.

Artin betrachtete das Analogon für globale Funktionenkörper. Sei dazu \mathbb{F}_q ein endlicher Körper mit q Elementen. Dann entsprechen sich

\mathbb{Q} und $\mathbb{F}_q(t)$ (der rationale Funktionenkörper),

\mathbb{Z} und $\mathbb{F}_q[t]$ (der Polynomring in einer Variablen),

und man kann die analoge Funktion betrachten:

$$\sum_{\mathfrak{a} \subset \mathbb{F}_q[t]} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}} \quad ,$$

wobei wieder \mathfrak{a} bzw. \mathfrak{p} über die nicht-trivialen Ideale bzw. Primideale von $\mathbb{F}_q[t]$ läuft und $N\mathfrak{a} = |\mathbb{F}_q[t]/\mathfrak{a}|$ ist. Entsprechend kann man globale Funktionenkörper K behandeln, also endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}_q(t)$. Man beachte aber: der Ring $\mathbb{F}_q[t]$ ist nicht mehr - wie \mathbb{Z} in \mathbb{Q} - durch den Körper $\mathbb{F}_q(t)$ bestimmt; man könnte auch $\mathbb{F}_q[\frac{1}{t}] \subseteq \mathbb{F}_q(t)$ betrachten. Dies gilt umso mehr für die allgemeinen Körper K , die nicht einmal mehr $\mathbb{F}_q(t)$ kanonisch enthalten. Besser und kanonischer ist es, die eindeutig bestimmte glatte projektive Kurve X über \mathbb{F}_q mit Funktionenkörper K zu betrachten und zu definieren

$$\zeta_{\mathbb{F}_q(t)}(s) = \zeta(X, s) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - (Nx)^{-s}} = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - q^{-deg(x)s}} \quad .$$

Hierbei bezeichnet X_0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von X , und für $x \in X_0$ ist $Nx = |k(x)|$ die Mächtigkeit des Restklassenkörpers $k(x)$ von x . Mit $deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ gilt

dann offenbar $Nx = q^{\deg(x)}$ und damit die letzte Gleichheit. Die Punkte sind hier im Schematheoretischen Sinne gemeint; man beachte, daß für einen affinen offenen Teil $U = \text{Spec} R \subset X$ die Punkte $x \in U$ den Primidealen \mathfrak{p} von R entsprechen, wobei $k(x)$ der Quotientenkörper von R/\mathfrak{p} ist. Die abgeschlossenen Punkte x entsprechen gerade den maximalen Idealen; für diese gilt also $Nx = |R/\mathfrak{p}|$, und man erhält dieselben Bildungen wie oben.

Nach der letzten Formel gilt $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$, wobei

$$Z(X, T) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - T^{\deg(x)}} \in \mathbb{Z}[[T]] \quad .$$

Es folgt die Gleichheit von formalen Potenzreihen

$$\begin{aligned} \log Z(X, T) &= \sum_{x \in X} -\log(1 - T^{\deg(x)}) = \sum_{x \in X} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{\deg(x) \cdot n}}{n} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\deg(x)|m} \deg(x) \right) \frac{T^m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^m})| \frac{T^m}{m} \quad , \end{aligned}$$

wobei $X(\mathbb{F}_{q^m})$ die Menge der \mathbb{F}_{q^m} -rationalen Punkte von X über \mathbb{F}_q ist: zu jedem $x \in X_0$ mit $\deg(x)|m$ gibt es genau so viele \mathbb{F}_{q^m} -rationale Punkte, wie es \mathbb{F}_q -lineare Einbettungen $\kappa(x) \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^m}$ gibt, und deren Anzahl ist $\deg(x)$.

Wir betrachten ein Beispiel. Die glatte projektive Kurve mit Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(t)$ ist $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$, der eindimensionale projektive Raum über \mathbb{F}_q . Geometrisch, d.h., schematheoretisch ist $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1 = U_1 \cup U_2$, mit $U_1 = \text{Spec} \mathbb{F}_q[t] = \mathbf{A}_{\mathbb{F}_q}^1$ (der eindimensionale affine Raum über \mathbb{F}_q) und $U_2 = \text{Spec} \mathbb{F}_q[t^{-1}]$ (der affine Raum mit Koordinate t^{-1}). Dabei ist also $U_1 \cap U_2 = \text{Spec} \mathbb{F}_q[t, t^{-1}]$ und $U_1 - U_2 = \text{Punkt } t = 0$ und $U_2 - U_1 = \text{Punkt } t^{-1} = 0$ ("t = ∞ "). Da $\mathbf{A}_{\mathbb{F}_q}^1(\mathbb{F}_{q^m}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\text{Spec} \mathbb{F}_{q^m}, \mathbf{A}_{\mathbb{F}_q}^1) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[t], \mathbb{F}_{q^m}) \cong \mathbb{F}_{q^m}$ ist (die letzte Bijektion bilden einen Ringhomomorphismus φ auf $\varphi(t)$ ab), erhält man

$$|\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1(\mathbb{F}_{q^m})| = q^m + 1 \quad .$$

Dies folgt auch aus der bekannten Beschreibung der Punkte

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1(\mathbb{F}_{q^m}) &= ((\mathbb{F}_{q^m})^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{F}_{q^m}^\times \\ &= \{[a_0 : a_1] \mid a_i \in \mathbb{F}_{q^m}, \text{ nicht beide null}\} \\ &= \{[1 : a_1] \mid a_1 \in \mathbb{F}_{q^m}\} \cup \{[0 : 1]\} \quad . \end{aligned}$$

Bei Wahl der Koordinate $t = \frac{a_1}{a_0}$ ist natürlich die erste Menge der Vereinigung gleich $U_1(\mathbb{F}_{q^m})$ und $[0 : 1]$ der Punkt "t = ∞ ". Damit berechnen wir nun

$$\begin{aligned} Z(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1, t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} (1 + q^m) \frac{T^m}{m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T^m}{m}\right) \cdot \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(qT)^m}{m}\right) = \frac{1}{(1-T)(1-qT)} \quad . \end{aligned}$$

Dies ist insbesondere eine rationale Funktion.

Allgemeiner kann man zeigen (dies geht auf E. Artin und F.K. Schmidt zurück), dass für eine glatte projektive (geometrisch irreduzible) Kurve X vom Geschlecht g über \mathbb{F}_q gilt:

$$Z(X, T) = \frac{P(T)}{(1-T)(1-qT)} \quad ,$$

wobei $P(T)$ ein Polynom vom Grad $2g$ in $\mathbb{Z}[T]$ ist, welches konstanten Koeffizienten 1 hat. Weiter bewiesen Hasse (für $g = 1$, also für elliptische Kurven) und Weil (für beliebiges g), dass die Nullstellen von $P(q^{-s})$ auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Angewandt auf $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$ liefert dies das von Artin vermutete Analogon der Riemannschen Vermutung im Funktionenkörperfall.

Wir geben eine Uminterpretation. Schreibe

$$P(T) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i T), \text{ mit } \alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C},$$

wobei $\overline{\mathbb{Q}}$ den algebraischen Abschluß von \mathbb{Q} in \mathbb{C} bezeichnet. Für eine komplexe Zahl s ist offenbar $P(q^{-s}) = 0$ genau dann, wenn es ein i mit $\alpha_i \cdot q^{-s} = 1$ gibt. Weiter gilt in diesem Fall

$$Re(s) = \frac{1}{2} \iff |\alpha_i| = q^{\frac{1}{2}}.$$

A. Weil stellte nun fest, dass die Definition der Zetafunktion einen Sinn für beliebige Varietäten über \mathbb{F}_q macht, und stellte nach Berechnung derselben in mehreren nicht-trivialen Fällen ([Weil]) die folgenden Vermutungen auf.

Weil-Vermutungen (bewiesen 1973 von Deligne): Sei X eine geometrisch irreduzible glatte projektive Varietät über \mathbb{F}_q . Definiere

$$Z(X, T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{T^n}{n}\right) \in \mathbb{Q}[[T]].$$

I: $Z(X, T)$ ist rational, d.h., in $\mathbb{Q}(T)$.

(Dies impliziert insbesondere eine meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$, für die die Reihe zunächst nur für $Re(s) \gg 0$ konvergiert).

II: Es gilt die Funktionalgleichung

$$Z(X, \frac{1}{q^d T}) = \pm q^{\frac{dE}{2}} T^E Z(X, T),$$

wobei $d = \dim X$ die Dimension von X und $E = (\Delta \cdot \Delta)$ die Selbstschnittzahl der Diagonalen Δ auf $X \times X$ ist.

(Für die Zetafunktion in s bedeutet dies also

$$\zeta(X, d-s) = \pm q^{E(\frac{d}{2}-s)} \zeta(X, s).$$

Für eine Kurve vom Geschlecht g zeigt man leicht, dass $E = 2 - 2g$ ist, und erhält den klassischen Funktionalgleichungstyp, der s und $1-s$ verknüpft).

III: Es ist

$$Z(X, T) = \frac{P_1(T)P_3(T)\dots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T)\dots P_{2d}(T)},$$

wobei $P_0(T) = 1 - T$, $P_{2d}(T) = 1 - q^d T$, und allgemein $P_i(X) \in \mathbb{Z}[T]$ mit konstantem Koeffizienten 1, wobei

$$P_i(T) = \prod_{j=1}^{b_i} (1 - \alpha_j^{(i)} T) \quad \text{in } \mathbb{C}[T],$$

mit

$$|\alpha_j^{(i)}| = q^{\frac{i}{2}} \quad \text{für alle } j$$

(Dies ist der schwierigste Teil - das Analogon der Riemannschen Vermutung für beliebige Dimensionen).

IV: Kommt X durch Reduktion mod p (d.h., mod \mathfrak{p} für ein Primideal $\mathfrak{p}|p$) von einer Varietät über einem Zahlkörper $K \subseteq \mathbb{C}$, so ist $b_i = \deg P_i$ gleich der i -ten Bettizahl von $X(\mathbb{C})$ (das ist die Dimension der i -ten singulären Homologiegruppe von $X(\mathbb{C})$).

Wir schließen zwei Bemerkungen an. Aus III folgt, dass sich die $P_i(T)$ nicht gegenseitig wegekürzen lassen; sie sind also eindeutig durch $Z(X, T)$ bestimmt. In IV werden arithmetische Eigenschaften in interessanter Weise mit topologischen Invarianten verknüpft. Ist zum Beispiel X eine Kurve vom Geschlecht g über $\overline{\mathbb{Q}}$, so ist $X(\mathbb{C})$ eine Riemannsche Fläche mit “ g Henkeln”, und damit $b_0 = 1 = b_2, b_1 = 2g$ (dies gibt Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Hasse und Weil). Die Anzahl der Henkel hat also Konsequenzen für die Anzahl von Punkten mod p .

In der Tat wurde Weil bei seinen Vermutungen stark von topologischen Betrachtungen geleitet. Insbesondere bemerkte er, dass ein großer Teil der Vermutungen (nämlich I, II und IV) aus der Existenz einer “guten” Kohomologietheorie folgen würde, die dem üblichen topologischen Formalismus genügt, wie Lefschetz-Fixpunktformel, Poincaré-Dualität usw. Eine solche Kohomologietheorie wurde dann von M. Artin und A. Grothendieck mit der étalen Kohomologie gefunden, und diese bildet auch die Grundlage für Delignes Beweis, den wir im folgenden studieren wollen.

Zuvor noch einige Worte zu den Anwendungen. Die Weil-Vermutungen (d.h. Delignes Sätze) haben unzählige, ganz verschiedenartige Anwendungen gefunden und bilden einen Dreh- und Angelpunkt bei vielen Schlüssen der modernen Arithmetischen Geometrie. Wir skizzieren hier nur drei Anwendungen, die ganz elementar zu verstehen sind und die andererseits auch recht typisch sind.

Anwendung 1: (Weil) Ist X eine geometrisch irreduzible glatte (projektive) Kurve vom Geschlecht g über \mathbb{F}_q , so gilt

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| \leq q^n + 1 + 2g(\sqrt{q})^n .$$

Beweis: Mit den obigen Bezeichnungen erhält man durch Koeffizientenvergleich der Potenzreihen für $\log Z(X, T)$

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = 1 + q^n - \sum_{j=1}^{2g} \alpha_j^n \leq 1 + q^n + 2g(\sqrt{q})^n .$$

Verallgemeinerungen auf höherdimensionale Varietäten seien dem Leser über lassen, vergl. auch [De 1] 8.1.

Anwendung 2: (Hasse, Weil) Für die Kloostermann-Summe

$$K(p, a) := \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} e^{\frac{2\pi i}{p}(x + \frac{a}{x})} \in \mathbb{C} \quad (p \text{ prim}, a \in \mathbb{Z})$$

gilt die Abschätzung

$$|K(p, a)| \leq 2 \cdot \sqrt{p} .$$

Dies folgt durch die Betrachtung der Kurve

$$T^p - T = x + \frac{a}{x} .$$

Allgemeiner erhält man Abschätzungen des Typs

$$\left| \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q} \Psi(Q(x_1, \dots, x_n)) \right| \leq (d-1)^n q^{\frac{n}{2}} ,$$

wobei Q ein Polynom vom Grad d in n Variablen und $\Psi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein additiver Charakter ist, s. [De1] und [Ka1].

Anwendung 3: (Deligne) Die Ramanujan-Vermutung: Sei

$$\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

die Ramanujan- Δ -Funktion. Dann gilt

$$\tau(n) = O(n^{\frac{11}{2} + \epsilon}) \quad \text{für alle } \epsilon > 0 .$$

Zunächst einige Worte zur Geschichte. Die folgenden Abschätzungen wurden vor Deligne erhalten - alle mit analytischen Methoden:

Ramanujan (1916)	$O(n^7)$
Hardy/Littlewood (1918)	$O(n^6)$
Kloostermann (1927)	$O(n^{\frac{47}{8} + \epsilon})$
Davenport/Salié (1933)	$O(n^{\frac{35}{6} + \epsilon})$
Rankin (1939)	$O(n^{\frac{29}{5} + \epsilon})$

(Zur Verdeutlichung: die letzten Brüche sind $6 - \frac{1}{8}$, $6 - \frac{1}{6}$ und $6 - \frac{1}{5}$; die Vermutung fordert $6 - \frac{1}{2}$).

Ramanujan vermutete genauer ([Ra]):

(A) τ ist multiplikativ, d.h., für $(n, n') = 1$ ist $\tau(nn') = \tau(n)\tau(n')$,

(B) $|\tau(n)| \leq n^{\frac{11}{2}} \cdot d(n)$, wobei $d(n)$ die Summe der Teiler von n ist,

(C) Für die assoziierte Dirichletreihe gibt es eine Produktentwicklung der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}} .$$

Weiter bemerkte er:

(i) (C) impliziert (A) (allgemeiner sind die Koeffizienten einer Dirichletreihe $\sum a_n n^{-s}$ multiplikativ, wenn diese eine Euler-Produktentwicklung besitzt),

(ii) (B) impliziert die obige Vermutung, durch die bekannte Abschätzung für $d(n)$,

(iii) Weiß man (C), so genügt es, (B) für Primzahlen zu zeigen, d.h., dass für Primzahlen p gilt

$$(B') \quad |\tau(p)| \leq 2 \cdot p^{\frac{11}{2}}$$

(denn das Euler-Produkt liefert auch eine Rekursionsformel für $\tau(p^m)$),

(iv) Eigenschaft (B') ist äquivalent dazu, dass die Nullstellen des Polynoms $1 - \tau(p)T + p^{11}T^2$ konjugiert komplex sind (die Diskriminante des zugehörigen normierten Polynoms ist $p^{-22}(\tau(p)^2 - 4p^{11})$).

Es ist bemerkenswert, dass Ramanujan, der vielen als Analytiker gilt, hier alles auf rein algebraische Fragen reduziert und dass die Vermutung dieser Reduktion folgend bewiesen wurde:

Schreibt man

$$1 - \tau(p)T + p^{11}T^2 = (1 - \alpha_1 T)(1 - \alpha_2 T) \quad ,$$

so sind die Nullstellen genau dann komplex konjugiert, wenn es ihre Reziproken α_1 und α_2 sind; wegen $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = p^{11}$ gilt dies genau dann, wenn

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = p^{\frac{11}{2}}$$

ist, und dies wurde von Deligne bewiesen. (C) wurde bereits 1917 von Mordell gezeigt.

Die Funktion Δ interessierte Ramanujan übrigens als q -Entwicklung einer besonders wichtigen Modulform, und er stellte ähnliche Vermutungen für gewisse Familien derselben auf. Diese folgen ebenfalls aus Delignes Resultaten, da er allgemeiner die Petersson-Vermutung bewies, die hier kurz formuliert sei, ohne näher auf die Theorie der Modulformen einzugehen. Hecke zeigte 1936, dass für eine normierte Spitzenform vom Gewicht k für $SL_2(\mathbb{Z})$ mit q -Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \quad (q = e^{2\pi iz})$$

die assoziierte Dirichletreihe genau dann eine Produktentwicklung der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1} - p^{-2s}}$$

hat, wenn f Eigenform zu allen Heckeoperatoren ist (s.[Se 1]). In diesem Fall vermutete Petersson 1939 [Pet], dass

$$a_n = O(n^{\frac{k-1}{2} + \epsilon}) \quad \text{für alle } \epsilon > 0 \quad .$$

Wie oben genügt es zu zeigen: Schreibt man

$$1 - a_p T + p^{k-1} T^2 = (1 - \alpha_1 T)(1 - \alpha_2 T)$$

so gilt

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = p^{\frac{k-1}{2}} \quad .$$

Nach Vorarbeit von Eichler, Ihara und Shimura führte Deligne diese Aussage 1969 in [De 1] auf die Weil-Vermutungen zurück, indem er zeigte, dass das obige Polynom das Polynom $P_{k-1}(T)$ für eine glatte projektive Varietät X über \mathbb{F}_p teilt - für Δ ist $k = 12$. Für Formen höherer Stufe siehe [De 1] und [De 2].

1 Rationalität der Zetafunktion

Die Rationalität der Zetafunktionen wurde 1960 von B. Dwork mit p -adischen Methoden bewiesen. A. Grothendieck gab 1964 einen anderen Beweis, der auf der von ihm und M. Artin entwickelten étalen Kohomologie beruht und auch die Funktionalgleichung liefert.

Theorem 1.1 (Grothendieck) Sei X eine geometrisch irreduzible glatte, projektive Varietät der Dimension d über \mathbb{F}_q .

(a) Für $\ell \neq p = \text{char}(\mathbb{F}_q)$ ist

$$Z(X, T) = \frac{P_1(T) \cdot P_3(T) \cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T) \cdots P_{sd}(T)},$$

wobei $P_0(T) = 1 - T$, $P_{2d}(T) = 1 - q^d T$ und allgemein

$$P_i(T) = \det(1 - F^*T \mid H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

wobei $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ für einen algebraischen Abschluß $\bar{\mathbb{F}}_q$ von \mathbb{F}_q ist, $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ die i -te ℓ -adische Kohomologie bezeichnet und F^* der Endomorphismus ist, der hierauf durch den q -linearen Frobenius-Endomorphismus $F : X \rightarrow X$ induziert wird.

(b) Insbesondere ist $Z(X, T)$ rational, d.h., in $\mathbb{Q}(T)$.

(c) Es gilt die Funktionalgleichung

$$Z\left(\frac{1}{q^d T}\right) = \pm q^{\frac{dE}{2}} T^E Z(T),$$

mit der Euler-Poincaré-Charakteristik

$$E = \chi(X, \mathbb{Q}_\ell) := \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Diese ist auch gleich der Selbstschnittzahl (Δ, Δ) der Diagonalen $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$.

Erläuterung: Im folgenden bezeichnet \mathbb{Z}/m oder $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auch die konstante Garbe mit diesen Halmen auf einem Schema S bezüglich der étalen Topologie. Für eine étale Garbe F auf S sei $H^i(S, F)$ deren i -te Kohomologie ($i \geq 0$). Dann ist nach Definition

$$\begin{aligned} H^i(S, \mathbb{Z}_\ell) &= \varprojlim_n H^i(S, \mathbb{Z}/\ell^n), \\ H^i(S, \mathbb{Q}_\ell) &= H^i(S, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $H^i(S, \mathbb{Z}/\ell^n)$ ein \mathbb{Z}/ℓ^n -Modul ist, damit $H^i(S, \mathbb{Z}_\ell)$ ein Modul über dem Ring $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n$ der ganzen ℓ -adischen Zahlen und $H^i(S, \mathbb{Q}_\ell)$ ein Vektorraum über dem Quotientenkörper \mathbb{Q}_ℓ der ℓ -adischen Zahlen.

Wir benötigen einige der folgenden Tatsachen über ℓ -adische Kohomologie. Hierbei sei $A = \mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}_\ell$ oder \mathbb{Q}_ℓ .

KOH 1: Funktorialität: ein Morphismus $f : S \rightarrow S'$ induziert einen A -Modul-Morphismus

$$f^* : H^i(S', A) \rightarrow H^i(S, A)$$

Für $g : S' \rightarrow S''$ gilt $(gf)^* = f^*g^*$. Insbesondere operiert für ein Schema X über einem Körper k mit separablem Abschluß k_s die absolute Galoisgruppe $Gal(k_s/k)$ stetig auf $H^i(X \times_k k_s, A)$: ordne $\sigma \in Gal(k_s/k)$ die durch $id \times \text{Spec}(\sigma) : X \times_k k_s \rightarrow X \times_k k_s$ induzierte Operation zu.

KOH 2: Cupprodukt: Es gibt A -bilineare Abbildungen

$$H^i(S, A) \times H^j(S, A) \rightarrow H^{i+j}(S, A), (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Diese sind graduiert kommutativ ($y \cdot x = (-1)^{ij}x \cdot y$) und (in einem offensichtlichen Sinne) assoziativ.

KOH 3: Künneth-Formel: Sind X und Y glatt und eigentlich über einem separabel abgeschlossenen Körper L , und ist $\ell \neq \text{char}(L)$, so hat man Isomorphismen

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^j(Y, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^k(X \times_L Y, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$x \otimes y \mapsto p_1^*x \cdot p_2^*y,$$

wobei $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionen sind.

KOH 4: Poincaré-Dualität: Ist X glatt, eigentlich und rein d -dimensional über einem Körper k , und ist $\bar{X} = X \times_k k_s$ für einen separablen Abschluß k_s von k , so gibt es für $\ell \neq \text{char}(k)$ einen kanonischen Galois-äquivarianten \mathbb{Z}/ℓ^n -Homomorphismus

$$\text{tr} : H^{2d}(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \rightarrow \mathbb{Z}/\ell^n,$$

und die Paarung

$$H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n) \times H^{2d-i}(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n) \rightarrow H^{2d}(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Z}/\ell^n$$

ist eine perfekte Dualität. Hierbei bezeichnet $M(m)$ den m -ten Tate-Twist eines $\mathbb{Z}/\ell^n - Gal(k_s/k)$ -Moduls: $M(m) = M \otimes \mathbb{Z}/\ell^n(m)$, mit

$$\mathbb{Z}/\ell^n(m) = \begin{cases} \mu_{\ell^n}^{\otimes m} & m \geq 0 \\ (\mu_{\ell^n}^{\otimes -m})^\vee & m \leq 0 \end{cases}.$$

Hierbei ist μ_{ℓ^n} der Galois-Modul der ℓ^n -ten Einheitswurzeln in k_s^\times , und $M^\vee = \text{Hom}(M, \mathbb{Z}/\ell^n)$ das \mathbb{Z}/ℓ^n -Dual eines $\mathbb{Z}/\ell^n - Gal(k_s/k)$ -Moduls M .

KOH 5: Endlichkeit: Ist X eigentlich von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper L , so ist $H^i(X, A)$ ein endlich erzeugter A -Modul für alle $i \geq 0$, $A = \mathbb{Z}/\ell^n, \mathbb{Z}_\ell$ oder \mathbb{Q}_ℓ , $\ell \neq \text{char}(L)$.

KOH 6: Frobenius-Endomorphismus: Sei X von endlich Typ über \mathbb{F}_q . Der \mathbb{F}_q -lineare Frobenius-Endomorphismus

$$F : X \rightarrow X$$

ist dadurch definiert, dass er die Identität auf dem topologischen Raum und die q -Potenzierung auf der Strukturgarbe ist. Ist $\varphi \in Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ der arithmetische Frobenius:

$$\varphi(\alpha) = \alpha^q \text{ für } \alpha \in \bar{\mathbb{F}}_q,$$

und F^* die durch $F \times id : \bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}_q} \rightarrow X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}_q}$ induzierte Abbildung auf der Kohomologie, so gilt

$$\mathbb{F}^* = \varphi^{-1} \text{ auf } H^i(\bar{X}, A).$$

Zum Beweis von Theorem 1.1:

(a) \Rightarrow (b):

Lemma 1.2 (Bourbaki Algèbre IV 3, Exercise 3) Sei $u(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ eine formale Potenzreihe über einem Körper K . Dann liegt $u(T)$ genau dann in $K(T)$ (d.h., ist die Taylorentwicklung einer gebrochen rationalen Funktion), wenn es ein $N > 0$ gibt derart, dass die Hankel-Determinanten

$$\det(a_{i+j+M})_{0 \leq i, j \leq N} = \det \begin{pmatrix} a_M & a_{M+1} & \dots & a_{M+N} \\ a_{M+1} & a_{M+2} & & \\ \vdots & & & \\ a_{M+N} & \dots & & a_{M+2N} \end{pmatrix}$$

für alle $M \gg 0$ verschwinden.

Aus (a) folgt nun zunächst, dass $Z(X, T)$ in $\mathbb{Q}_\ell(T)$ liegt. Damit verschwinden die Hankel-Determinanten der Koeffizienten wie in Lemma 1.2. Aber die Koeffizienten liegen bereits in \mathbb{Q} , und nach demselben Kriterium liegt $Z(X, T)$ dann in $\mathbb{Q}(T)$ (dieser Beweis zeigt: $\mathbb{Q}[[T]] \cap \mathbb{Q}_\ell(T) = \mathbb{Q}(T)$).

Bemerkung 1.3 Dieser Beweis zeigt *nicht*, dass die obigen $P_i(T)$ in $\mathbb{Q}[T]$ liegen.

(a) \implies (c): Nach Poincaré-Dualität KOH 4 und Endlichkeit KOH 5 hat man einen Isomorphismus von Galoismoduln

$$H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee = H^{2d-i}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)(d)$$

(Bezeichnung: $M^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(M, \mathbb{Q}_\ell)$ für einen \mathbb{Q}_ℓ -Vektorraum M , $M(m) = M \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(m)$ für einen \mathbb{Z}_ℓ -Galoismodul M , wobei $\mathbb{Z}_\ell(m) = \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n(m)$). Da der arithmetische Frobenius φ auf $\mathbb{Q}_\ell(m)$ mit q^m operiert, gilt

$$\begin{aligned} & \det(1 - F \frac{1}{q^{dT}} \mid H^i) \\ &= (q^{dT})^{-b_i} \det(F \mid H^i) \cdot (-1)^{b_i} \det(d - F^{-1} q^{dT} \mid H^i) \\ &= (q^{dT})^{-b_i} \det(F \mid H^i) \cdot (-1)^{b_i} \det(1 - FT \mid H^{2d-i}), \end{aligned}$$

wobei $H^i = H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $b_i = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i$. Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_{b_i}$ die Eigenwerte von F auf H^i , so sind $q^d \alpha_1^{-1}, \dots, q^d \alpha_{b_i}^{-1}$ die Eigenwerte auf H^{2d-i} nach Poincaré-Dualität. Damit gilt

$$\det(F \mid H^i) \cdot \det(F \mid H^{2d-i}) = q^{b_i \cdot d} \text{ für } i \neq d.$$

Wir betrachten nun noch $i = d$. Seien N_+ (bzw. N_-) Eigenwerte von F auf H^d gleich $q^{\frac{d}{2}}$ (bzw. $-q^{\frac{d}{2}}$). Die restlichen Eigenwerte bilden Paare $\beta \neq q^d \beta^{-1}$, insbesondere ist $b_d - N_+ - N_-$ gerade.

Damit ist

$$\begin{aligned} \det(F, H^d) &= q^{d(b_d - N_+ - N_-)/2} q^{N_+ + N_-} d/d (-1)^{N_-} \\ &= q^{db_d/2} (-1)^{N_-}, \end{aligned}$$

wobei man beachte, dass db_d immer gerade ist, da die Poincaré Paarung für ungerades d alternierend auf H^d ist. Es folgt nun

$$\begin{aligned} Z(X, \frac{1}{q^d T}) &= \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - F \frac{1}{q^d T} | H^i)^{(-1)^{i+1}} \\ &= (q^d T)^\chi q^{-\frac{\chi d}{2}} (-1)^{N_+} \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - FT | H^{2d-i})^{(-1)^{i+1}} \\ &= (-1)^{N_+} q^{\frac{\chi d}{2}} T^\chi Z(X, T), \end{aligned}$$

wobei $\chi = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i b_i$ die Euler-Poincaré-Charakteristik ist.

Für die Deutung von χ als Schnittzahl benötigen wir das folgende Resultat

Theorem 1.4 (Lefschetz-Formel, 1. Version) Bezeichne mit $(\alpha \cdot \beta)$ das Bild von $\alpha \otimes \beta$ unter der Poincaré-Paarung für $X \times X$

$$H^{2d-r}(X \times X)(d) \times H^{2d-r}(X \times X)(d) \rightarrow H^{4d}(X \times X)(2d) \xrightarrow{tr} \mathbb{Q}_\ell,$$

wo wir $H^i(-)$ für $H^i(-, \mathbb{Q}_\ell)$ schreiben. Dann gilt

$$(\alpha \cdot {}^t\beta) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{tr}(\beta \circ \alpha | H^i(X)),$$

wobei $\beta \mapsto {}^t\beta$ die Transposition bezeichnet, die durch die Vertauschung der Faktoren von $X \times X$ induziert wird, und auf der rechten Seite β und α als Endomorphismen der Kohomologie gedeutet werden, vermöge der Isomorphismen

$$\begin{aligned} &H^{2d+r}(X \times X)(d) \\ \cong &\bigoplus_{i=0}^{2d} H^{2d-i}(X)(d) \otimes H^{i+r}(X) \quad (\text{Künneth-Formel}) \\ \cong &\bigoplus_{i=0}^{2d} H^i(X)^\vee \otimes H^{i+r}(X) \quad (\text{Poincaré-Dualität}) \\ \cong &\bigoplus_{i=0}^{2d} \operatorname{Hom}(H^i(X), H^{i+r}(X)) \quad (\text{lineare Algebra}). \end{aligned}$$

Beweis Ohne Einschränkung sei $\alpha \in H^{2d-i}(X)(d) \otimes H^j(X)$ und $\beta \in H^{2d-j}(X)(d) \otimes H^i(X)$, etwa $\alpha = \sum_\ell a'_\ell \otimes b_\ell$ und $\beta = \sum_\ell c_\ell \otimes a_\ell$ mit $(a'_\ell \cdot a_m) = \delta_{\ell m}$. Dann ist

$$(\alpha \cdot {}^t\beta) = \sum_\ell (b_\ell \cdot c_\ell) \cdot a_\ell + \sum_{\ell' \neq \ell} (b_\ell \cdot c_{\ell'}) a_{\ell'},$$

also $\operatorname{Tr}(\beta \circ \alpha | H^i(X)) = (-1)^i \sum_\ell (b_\ell \cdot c_\ell) = (-1)^i (\alpha \cdot {}^t\beta)$.

Wir benötigen dann nur noch

KOH 7: Zykelabbildung: Es gibt Homomorphismen

$$cl : CH^j(X) \leftarrow H^{2j}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(d)$$

($CH^j(X)$ die Gruppe der algebraischen Zyklen der Kodimension j auf X modulo rationaler Äquivalenz) derart, dass das Schnittprodukt $(x \cdot y)$ mit der Schnittzahl $(cl(x) \cdot cl(y))$ der Zyklen übereinstimmt.

Dann berechnen wir nämlich für die Diagonale Δ , die die Identität auf $H^*(X)$ induziert:

$$(\Delta \cdot \Delta) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{tr}(id | H^i(X)) = \chi(X, \mathbb{Q}_\ell).$$

Mit denselben Methoden erhalten wir nun zwei Beweise von 1.1 (a):

1. Beweis von 1.1 (a): Mit der Schnitt-Theorie von algebraischen Zykeln zeigt man

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = (F^n \cdot \Delta),$$

wobei F hier auch für den Graphen von F in $X \times X$ steht. Zusammen mit der obigen Lefschetz-Formel 1.4 ergibt sich

Theorem 1.5 (Lefschetz-Formel, 2. Version)

$$(1.5.1) \quad |X(\mathbb{F}_{q^n})| = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{tr}(F^n | H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

Außerdem hat man die bekannte Formel

$$(1.5.2) \quad \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tr}(\alpha^n | V) \frac{T^n}{n}\right) = \det(1 - \alpha T | V)^{-1}$$

für einen Endomorphismus α auf einem Vektorraum V über einem Körper L der Charakteristik 0 (durch Betrachtung der Eigenwerte braucht man die Formel nur für eine Zahl α in einem algebraischen Abschluß von L zu beweisen, wo die Behauptung wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{T^n}{n} = -\log(1 - \alpha T)$ folgt). Aus (1.5.1) und (1.5.2) folgt offenbar 1.1(a).

2. Beweis von 1.1 (a): Man beweist Theorem 1.5 mit rein kohomologischen Methoden. In der Tat, man hat die allgemeinere Tatsache

KOH 8 = Theorem 1.6 (Lefschetz-Formel, 3. Version) Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über \mathbb{F}_q und \mathcal{F} eine konstruierbare \mathbb{Q}_ℓ -Garbe auf X . Dann ist

$$\sum_{x \in \overline{X}^{F^n}} \operatorname{tr}(F_x^n, \mathcal{F}_{\overline{x}}) = \sum_{i=0}^{2 \dim(X)} (-1)^i \operatorname{tr}(F^n | H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F})).$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_\ell$:

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = |\overline{X}^{F^n}| = \sum_{i=0}^{2 \dim(X)} (-1)^i \operatorname{tr}(F^n | H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

und nach obiger Formel (1.5.2) also

$$Z(X, T) = \prod_{i=0}^{2 \dim(X)} \det(1 - FT | H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}.$$

Die Bezeichnungen werden in den nächsten Paragraphen erläutert.

2 Konstruierbare Garben

Im Folgenden seien Garben immer Garben für die étale Topologie.

Erinnerung 2.1 (vgl. [Mi]; insbes. I §5 und V §1) Sei Z ein Schema.

(a) Ein geometrischer Punkt von Z ist ein Morphismus $\bar{x} \rightarrow Z$, wobei $\bar{x} = \text{Spec}(\Omega)$ für einen separabel abgeschlossenen Körper Ω . Äquivalent ist also die Vorgabe eines Punktes $x \in Z$ (des Bildes von \bar{x}) und einer Einbettung des Restklassenkörpers $k(x)$ in Ω .

(b) Eine étale Umgebung von \bar{x} ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \bar{x} & & Z, \end{array}$$

wobei $U \rightarrow Z$ étale ist. Die étalen Umgebungen von \bar{x} bilden ein projektives System, dabei bilden die Umgebungen, für die U affin, zusammenhängend und $U \rightarrow Z$ von endlichem Typ ist, ein cofinales System.

(c) Die strikte Henselisierung von Z in \bar{x} ist definiert als

$$\mathcal{O}_{Z,\bar{x}} = \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{O}),$$

wobei U über die étalen Umgebungen von \bar{x} läuft. Dann ist $\mathcal{O}_{Z,\bar{x}}$ ein strikt henselscher Ring, d.h., lokal, henselsch, mit separabel abgeschlossenem Restklassenkörper.

(d) Ist \mathcal{F} eine étale Garbe auf Z , so ist der Halm von \mathcal{F} in \bar{x} definiert als

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} = \varinjlim \mathcal{F}(U),$$

wobei U über die étalen Umgebungen von \bar{x} läuft (Insbesondere ist also $\mathcal{O}_{Z,\bar{x}}$ der Halm der Ringgarbe \mathbb{G}_a in \bar{x}).

(e) Sei Z zusammenhängend und \bar{x} ein geometrischer Punkt von Z . Definiere den Funktor

$$\phi = \phi_{\bar{x}} : \left(\begin{array}{c} \text{endliche étale Morphismen} \\ Z' \rightarrow Z \\ Z' \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow \text{(endliche Mengen)} \\ \mapsto \text{Hom}_Z(\bar{x}, Z'). \end{array}$$

und die pro-endliche Gruppe

$$\pi_1(Z, \bar{x}) = \text{Aut}(\phi) = \varprojlim \text{Aut}_Z(Z'),$$

wobei der Limes über die endlichen étalen Morphismen $Z' \rightarrow Z$, d.h., über die endlichen étalen Z -Schemata Z' läuft. Dann ist der induzierte Funktor

$$\phi : \left(\begin{array}{c} \text{endliche étale} \\ Z\text{-Schemata} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{endliche diskrete} \\ \pi_1(Z, \bar{x})\text{-Mengen} \end{array} \right)$$

eine Kategorienäquivalenz. Für eine pro-endliche Gruppe G ist eine endliche diskrete G -Menge eine endliche Menge M mit einer Operation von G derart, daß der Stabilisator eines jeden Elementes $m \in M$ offen in G ist.

Definition 2.2 Eine Garbe \mathcal{F} auf Z heißt **lokal-konstant**, wenn es eine étale Überdeckung $(U_i \rightarrow Z)$ gibt derart, dass $\mathcal{F} \upharpoonright U_i$ konstant ist für alle i .

Bemerkung 2.3 Hat \mathcal{F} zusätzlich endliche Halme und ist Z quasi-kompakt, so folgt aus der Abstiegstheorie, dass \mathcal{F} durch ein endliches étales Gruppenschema H über Z dargestellt wird (d.h., \mathcal{F} ist isomorph zum Funktor $U \mapsto \text{Hom}_Z(U, H)$). Ist umgekehrt H ein endliches étales Gruppenschema, so ist die durch H dargestellte Garbe \mathcal{F} lokal-konstant mit endlichen Halmen:

Ohne Einschränkung ist Z zusammenhängend. Dann ist H zusammenhängend, denn $H \rightarrow Z$ ist abgeschlossen (als endlicher Morphismus) und offen (als étaler Morphismus von endlichem Typ). Sei \bar{x} ein geometrischer Punkt von Z . Dann entspricht H einer zusammenhängenden endlichen $\pi_1(Z, \bar{x})$ -Menge $M = \pi_1(Z, \bar{x})/U$, wobei $U \subseteq \pi_1(Z, \bar{x})$ eine offene Untergruppe ist. Es gibt einen offenen Normalteiler $N \subseteq \pi_1(Z, \bar{x})$ mit $N \subseteq U$, und dieser entspricht einer étalen Überlagerung

$$H' \rightarrow H \rightarrow Z.$$

Ist \bar{y} ein geometrischer Punkt von H' über \bar{x} , so ist $\pi_1(H', \bar{y}) \cong N$, und die Einschränkung von $M' = \pi_1(H, \bar{x})$ auf $\pi_1(H', \bar{x})$ ist trivial. Dies zeigt, dass das Pullback $H' \times_Z H' \rightarrow H'$ der Überlagerung $H' \rightarrow Z$ trivial ist, also auch das Pullback $H \times_Z H' \rightarrow H'$. Daher ist die Einschränkung von $\text{Hom}_Z(\cdot, H)$ auf H' konstant.

Nach dem Yoneda-Lemma erhält man also eine Kategorienäquivalenz

$$\left(\begin{array}{c} \text{endliche étale kommutative} \\ \text{Gruppenschemata über } Z \\ H \end{array} \right) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \mapsto \end{array} \left(\begin{array}{c} \text{lokal konstante Garben} \\ \text{mit endlichen Halmen auf } Z \\ \text{Hom}_Z(-, H) \end{array} \right)$$

Wir berechnen noch den Halm von $\mathcal{F} = \text{Hom}_Z(-, H)$ in einem geometrischen Punkt $\bar{x} = \text{Spec}(\Omega)$: Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{x}} &= \varinjlim \text{Hom}_Z(U, H) \xrightarrow{(1)} \text{Hom}_Z(\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}), H) \\ &= \text{Hom}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}})}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}), H \times_Z \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}})) \\ &\xrightarrow[\sim]{(2)} \text{Hom}_{\text{Spec}(k(\bar{x}))}(\text{Spec}(k(\bar{x})), H \times_Z \text{Spec}(k(\bar{x}))) \\ &= \text{Hom}_Z(\text{Spec}(k(\bar{x})), H) \xrightarrow[\sim]{(3)} \text{Hom}_Z(\bar{x}, H) = \phi_{\bar{x}}(H). \end{aligned}$$

Hierbei läuft der Limes ohne Einschränkung über affine étale Umgebungen von \bar{x} , deswegen ist (1) eine Bijektion [Mi] II 3.3), $k(\bar{x})$ ist der Restklassenkörper des henselschen Rings $\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}$, deswegen ist (2) eine Bijektion [Mi] I 4.4), und (3) ist eine Bijektion, da für einen Punkt $y \in H$ über dem Bildpunkt x von \bar{x} die Restklassenerweiterung $k(y)/k(x)$ separabel ist und deswegen $\text{Hom}_{k(x)}(k(y), k(\bar{x})) = \text{Hom}_{k(x)}(k(y), \Omega)$ für die separabel abgeschlossenen Körper $k(\bar{x})$ und Ω .

Zusammen mit der Kategorienäquivalenz in 2.1 (e) ergibt sich eine Kategorienäquivalenz für

zusammenhängendes quasi-kompaktes Z mit geometrischem Punkt \bar{x} :

$$\left(\begin{array}{c} \text{lokal-konstante Garben} \\ \text{mit endlichen Halmen} \\ \mathcal{F} \end{array} \right) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \mapsto \end{array} \left(\begin{array}{c} \text{endliche diskrete} \\ \pi_1(z, \bar{x})\text{-Moduln} \\ \mathcal{F}_{\bar{x}} \end{array} \right)$$

Es gibt noch eine andere Charakterisierung von lokal-konstanten Garben.

Definition 2.4 (a) Ein geometrischer Punkt \bar{x} eines Schemas Z heißt Spezialisierung eines anderen geometrischen Punktes \bar{y} von Z , wenn es einen Ringhomomorphismus über Z

$$\varphi : \mathcal{O}_{Z, \bar{x}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z, \bar{y}}$$

der strikten Henselisierungen gibt. Wir nennen φ (oder $\text{Spec}(\varphi)$) dann einen Spezialisierungsmorphismus.

(b) Ist \mathcal{F} eine étale Garbe auf Z , so erhält man hieraus eine Spezialisierungsabbildung

$$\varphi_* : \mathcal{F}_{\bar{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{y}}$$

wie folgt. Da $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}) = \varprojlim_U U$, wo U über die étalen Umgebungen von \bar{x} läuft, entspricht φ einem Element aus

$$\varprojlim_U \text{Hom}_Z(\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{y}}), U).$$

Ohne Einschränkung seien dabei die U von endlichem Typ über Z . Da analog $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{y}}) = \varprojlim_V V$, wobei V über die étalen Umgebungen von \bar{y} läuft, die ohne Einschränkung als affin angenommen werden können, ist

$$\text{Hom}_Z(\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{y}}), U) = \varinjlim_V \text{Hom}_Z(V, U)$$

(vergl. [Mi] II 3.3). Daher entspricht φ einem Element in

$$\varprojlim_U \varinjlim_V \text{Hom}_Z(V, U),$$

also einem Morphismus zwischen Pro-Objekten $(V) \rightarrow (U)$. Dieser induziert dann einen Homomorphismus

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} = \varinjlim_U \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim_V \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_{\bar{y}}.$$

Bemerkung 2.5 (a) Unter Verwendung von Garben-Pullbacks zum kommutativen Diagramm

$$f = \text{Spec}(\varphi) : \begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{y}}) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}) \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & Z & \end{array}$$

kann man $\varphi_* = f^*$ auch als die folgende Komposition erhalten:

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} = (\pi^* \mathcal{F})_{\bar{x}} \stackrel{(1)}{=} (\pi^* \mathcal{F})(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}) \xrightarrow{f^*} (\pi'^* \mathcal{F})(\mathcal{O}_{Z, \bar{y}}) \stackrel{(2)}{=} (\pi'^* \mathcal{F})_{\bar{y}} = \mathcal{F}_{\bar{y}},$$

wobei die Isomorphie (1) aus der Tatsache folgt, dass \bar{x} für den strikten Henselschen Ring $\mathcal{O}_{Z,\bar{x}}$ nur triviale étale Umgebungen besitzt, analog für (2) und \bar{y} . Der mittlere Pfeil ist von der (Adjunktions-)Abbildung

$$\pi^* \mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \pi^* \mathcal{F} = f_* \pi'^* \mathcal{F}$$

induziert.

(b) Ist \mathcal{F} eine konstante Garbe, mit Halm A , so ist φ_* offenbar ein Isomorphismus, da die obigen U und V alle so gewählt werden können, dass sie zusammenhängend sind: dann sind alle Gruppen gleich A und die Abbildungen Identitäten.

(c) Schließlich bemerken wir noch, dass \bar{x} eine Spezialisierung von \bar{y} ist, wenn der Bildpunkt $x \in Z$ eine Spezialisierung des Bildpunktes y von \bar{y} ist, d.h., im Abschluß $\overline{\{y\}}$ enthalten ist. Für jede étale Umgebung U von \bar{x} ist dann nämlich y im Bild von U enthalten und damit die Menge $\text{Hom}_Z(\bar{y}, U)$ nicht-leer und endlich. Weiter stimmt diese Menge mit $\text{Hom}_Z(\text{Spec } \mathcal{O}_{Z,\bar{y}}, U)$ überein, und der projektive Limes

$$\text{Hom}_Z(\text{Spec } \mathcal{O}_{Z,\bar{y}}, \text{Spec } \mathcal{O}_{Z,\bar{x}}) = \varprojlim_U \text{Hom}_Z(\text{Spec } \mathcal{O}_{Z,\bar{y}}, U)$$

von endlichen Mengen ist nicht-leer.

Lemma 2.6 Sei Z ein lokal noethersches Schema. Eine étale Garbe \mathcal{F} auf Z mit endlichen Halmen ist genau dann lokal konstant, wenn alle Spezialisierungsabbildungen bijektiv sind.

Beweis Eine Richtung folgt aus 2.5 (b). Seien umgekehrt alle Spezialisierungsabbildungen Isomorphismen. Da die Frage lokal ist, können wir annehmen, dass Z noethersch ist. Sei \bar{x} ein geometrischer Punkt von Z , und sei $A = \mathcal{F}_{\bar{x}}$. Dann ist

$$A = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z} \cdot t_i$$

mit $t_1, \dots, t_r \in A$ und $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$.

Es gibt eine étale Umgebung U von \bar{x} und Schnitte $s_1, \dots, s_r \in \mathcal{F}(U)$, die auf t_1, \dots, t_r abgebildet werden. Weiter können wir (durch Übergang zu einer ‘kleineren’ étalen Umgebung) annehmen, dass s_i von m_i annulliert wird. Wir erhalten einen Morphismus von étalen Garben

$$\psi_U : \mathcal{G} = \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z} \right)_U \rightarrow \mathcal{F}|_U,$$

der das Basiselement t_i von $\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$ auf s_i abbildert, wobei links die zu A assoziierte Garbe auf U steht. φ_U induziert einen Isomorphismus der Halme

$$\psi_{\bar{x}} : \mathcal{G}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

Seien Z_1, \dots, Z_k die irreduziblen Komponenten von Z , die den Bildpunkt x von \bar{x} enthalten, seien Z_{k+1}, \dots, Z_m die restlichen Komponenten und sei $V \subseteq U$ die offene Teilmenge, die durch Entfernen der Urbilder von Z_{k+1}, \dots, Z_m entsteht. Sind dann $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_k$ geometrische Punkte von V über den generischen Punkten η_1, \dots, η_k von Z_1, \dots, Z_k , so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\bar{\eta}_i} & \xrightarrow{\psi_{\bar{\eta}_i}} & \mathcal{F}_{\bar{\eta}_i} \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \mathcal{G}_{\bar{x}} & \xrightarrow[\sim]{\psi_{\bar{x}}} & \mathcal{F}_{\bar{x}} \end{array}$$

wobei wir vertikale Isomorphismen durch eine Spezialisierungsabbildung haben (für \mathcal{G} nach 2.5 (b), und für \mathcal{F} nach Voraussetzung). Daher sind die $\psi_{\bar{\eta}_i}$ Isomorphismen. Ist nun \bar{y} ein beliebiger geometrischer Punkt von V , auch aufgefasst als geometrischer Punkt von Z , so ist \bar{y} Spezialisierung von (mindestens) einem $\bar{\eta}_i$, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\bar{\eta}_i} & \xrightarrow[\sim]{\psi_{\bar{\eta}_i}} & \mathcal{F}_{\bar{\eta}_i} \\ \wr \uparrow & & \uparrow \wr \\ \mathcal{G}_{\bar{y}} & \xrightarrow{\psi_{\bar{y}}} & \mathcal{F}_{\bar{y}}. \end{array}$$

Also ist $\psi_{\bar{y}}$ ein Isomorphismus und, da \bar{y} beliebig war, $\psi : \mathcal{G}|_V \rightarrow \mathcal{F}|_V$ ein Isomorphismus.

Definition 2.7 Eine Garbe \mathcal{F} auf Z heißt **konstruierbar**, wenn es für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subset Z$ ein offenes nicht-leeres Unterschema $U \subset Y$ gibt, so dass $\mathcal{F}|_U$ lokal konstant mit endlichen Halmen ist.

Bemerkung 2.8 Ist Z noethersch, so ist dies äquivalent dazu, dass es eine Stratifizierung $Z = \dot{\cup} Z_i$ durch endlich viele lokal-abgeschlossene Unterschemata Z_i gibt, so dass $\mathcal{F}|_{Z_i}$ lokal konstant mit endlichen Halmen ist für alle i .

Beispiele 2.9 (a) Sei ℓ prim und $\mu_{\ell^n} = \text{Ker}(\mathbb{G}_m \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_m)$, d.h., die étale Garbe auf Z mit

$$\mu_{\ell^n}(U) = \{\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{O}) \mid \alpha^{\ell^n} = 1\}$$

für U étale über Z . Dann ist μ_{ℓ^n} darstellbar durch

$$\mu_{\ell^n, Z} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^{\ell^n} - 1)) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Z \quad ,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \text{Hom}_Z(U, \mu_{\ell^n, Z}) &= \text{Hom}(U, \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^{\ell^n} - 1))) \\ &= \text{Hom}_{\text{Ringe}}(\mathbb{Z}[T]/(T^{\ell^n} - 1), \Gamma(U, \mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} \mu_{\ell^n}(U) \quad , \end{aligned}$$

wobei die letzte Abbildung einen Ringhomomorphismus φ auf das Element $\varphi(T)$ abbildet. Ist ℓ invertierbar, so ist $\mu_{\ell^n, Z}$ endlich und étale über Z : Da diese Eigenschaften bei Basiswechsel respektiert werden, reicht es zu zeigen, dass

$$\mu_{\ell^n, Z[\frac{1}{\ell}]} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}][T]/(T^{\ell^n} - 1))$$

endlich und étale über $\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$ ist (beachte, dass $Z \rightarrow \text{Spec} \mathbb{Z}$ nach Voraussetzung über $\text{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$ faktorisiert). Die Endlichkeit ist klar, und μ_{ℓ^n} ist étale, da das von $T^{\ell^n} - 1$ und seiner Ableitung $\ell^n T^{\ell^n - 1}$ erzeugte Ideal die 1 enthält, falls ℓ invertierbar ist (vgl. das Kriterium [Mi] I 3.4). Ist ℓ invertierbar, so ist also μ_{ℓ^n} eine lokal-konstante Garbe mit endlichen Halmen. Ist $\bar{x} = \text{Spec}(\Omega)$ ein geometrischer Punkt von \bar{x} , so berechnet sich der Halm weiter wie folgt:

$$(\mu_{\ell^n})_{\bar{x}} = \varinjlim \mu_{\ell^n}(U) = \mu_{\ell^n}(\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}) \xrightarrow{\sim} \mu_{\ell^n}(k(\bar{x})) = \mu_{\ell^n}(\Omega) \quad .$$

Hierbei läuft U über die étalen Umgebungen von \bar{x} , $k(\bar{x})$ ist der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{Z, \bar{x}}$, und der vorletzte Pfeil ist ein Isomorphismus nach dem Henselschen Lemma.

(b) Ist $j : U \hookrightarrow Z$ eine offene Immersion und \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe auf U , so ist $j_! \mathcal{F}$, die Fortsetzung durch null, konstruierbar auf Z . Ist \mathcal{F} lokal-konstant, so ist $j_! \mathcal{F}$ aber im allgemeinen nicht mehr lokal-konstant, z.B. nicht, wenn Z zusammenhängend und $\emptyset \neq U \neq Z$ ist.

Lemma 2.10 Sei Z lokal noethersch.

(a) Quotienten und Untergarben von konstruierbaren Garben sind wieder konstruierbar.

(b) Erweiterungen von konstruierbaren Garben sind wieder konstruierbar, d.h., ist

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben, so ist mit \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' auch \mathcal{F} konstruierbar.

(c) Tensorprodukte von konstruierbaren Garben sind wieder konstruierbar.

(d) Ist Z noethersch, so sind die folgenden Aussagen äquivalent für eine Garbe \mathcal{F} auf Z :

(i) \mathcal{F} ist konstruierbar.

(ii) \mathcal{F} ist eine noethersche Torsionsgarbe (d.h., ein noethersches Objekt in der Kategorie der Torsionsgarben).

(iii) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und $j : U \rightarrow Z$ étale von endlichem Typ, so dass \mathcal{F} Quotient von $j_! \mathbb{Z}/m$ ist.

Beweis Wir behaupten zunächst: Ist

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$$

ein Morphismus von konstruierbaren Garben auf einem beliebigen Schema Z , so sind $\text{Ker } f$ und $\text{Coker } f$ konstruierbar. Es reicht nämlich, die analoge Aussage zu beweisen, bei der “konstruierbar” durch “konstant mit endlichem Halm” ersetzt wird. Dann ist die Behauptung aber klar.

Nun zeigen wir (d).

(i) \Rightarrow (ii): Ohne Einschränkung ist Z irreduzibel. Sei $U \subset Z$ offen nicht-leer so, dass \mathcal{F} lokal konstant auf U ist, und sei $\bar{\eta}$ ein geometrischer Punkt über dem generischen Punkt η von U . Nach 2.6 sind für alle geometrischen Punkte \bar{x} , die Spezialisierungsabbildungen

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

Isomorphismen. Sei nun $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von Untergarben. Wir haben zu zeigen, dass die Folge stationär wird. Da $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ endlich ist, wird die Folge der $\mathcal{F}_{i, \bar{\eta}}$ stationär, ist also ohne Einschränkung konstant. Die Spezialisierungsabbildungen

$$\mathcal{F}_{i, \bar{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{i, \bar{\eta}}$$

sind nach dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{i, \bar{x}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i, \bar{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{F}_{\bar{x}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\bar{\eta}} \end{array}$$

injektiv. Seien s_1, \dots, s_r Erzeuger von $\mathcal{F}_{1, \bar{\eta}}$, und sei V eine étale Umgebung von $\bar{\eta}$ so, dass s_1, \dots, s_r alle von Schnitten in $\mathcal{F}_1(V)$ kommen. Dann sind für \bar{x} über V die Halmabbildungen $\mathcal{F}_{1, \bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}_{i, \bar{x}}$ bijektiv, wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_1(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{1, \bar{\eta}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{i, \bar{\eta}} \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathcal{F}_{1, \bar{x}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i, \bar{x}} \end{array}$$

Damit ist die Folge der \mathcal{F}_i konstant auf dem offenen Bild V' von V in Z . Mit noetherscher Induktion zeigt man nun, dass die Folge auf dem abgeschlossenen Komplement $Z - V'$ ebenfalls konstant wird, und damit die Behauptung.

(ii) \Rightarrow (iii): Ist $j : U \rightarrow Z$ étale, so ist per definitionem $j_!$ linksadjungiert zu j^* ; insbesondere gilt

$$\text{Hom}_Z(j_! \mathbb{Z}/m, \mathcal{F}) = \text{Hom}_U(\mathbb{Z}/m, j^* \mathcal{F}) = {}_m \mathcal{F}(U),$$

wobei ${}_m A = \{a \in A \mid ma = 0\}$ für eine abelsche Gruppe A . Ist \bar{x} ein geometrischer Punkt von Z und $f \in \mathcal{F}_{\bar{x}}$, so gibt es also $m \in \mathbb{N}$ und U wie oben, so dass f im Bild eines Morphismus $j_! \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathcal{F}$ liegt (Dies bedeutet, dass die $j_! \mathbb{Z}/m$ eine Familie von Generatoren in der Kategorie der Torsionsgarben sind). Ist nun \mathcal{F} noethersch, so gibt es also endlich viele U_1, \dots, U_r und m_1, \dots, m_r und einen surjektiven Morphismus

$$\bigoplus_{i=1}^r (j_i)_! \mathbb{Z}/m_i \rightarrow \mathcal{F}.$$

Es folgt die Behauptung, mit $U = \coprod U_i$ und $m = \text{kgV}(m_i)$.

(iii) \Rightarrow (i) Wähle eine Surjektion

$$\varphi : j_! \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathcal{F}.$$

Da $j_! \mathbb{Z}/m$ offenbar konstruierbar ist, also noethersch, gibt es mit denselben Argumenten wie oben einen Epimorphismus

$$j'_! \mathbb{Z}/m \rightarrow \text{Ker} \varphi$$

für einen étalen Morphismus von endlichem Typ $j' : U' \rightarrow Z$. Also ist \mathcal{F} konstruierbar, nach der anfangs des Beweises gezeigten Behauptung, als Kokern eines Morphismus

$$j'_! \mathbb{Z}/m \rightarrow j_! \mathbb{Z}/m.$$

Hieraus folgt nun leicht (a): Die Behauptung über Quotienten folgt sofort mit dem Kriterium (c) (iii); damit ist aber eine Untergarbe \mathcal{F}' einer konstruierbaren Garbe konstruierbar als Kern des Morphismus von konstruierbaren Garben $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

(b): Es genügt, die entsprechende Aussage für lokal konstante Garben zu zeigen. Sei

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben. Haben \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' endliche Halme, so gilt dies offenbar auch für \mathcal{F} . Seien \bar{x} und \bar{y} geometrische Punkte von Z , und ist

$\varphi : \mathcal{O}_{Z,\bar{x}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,\bar{y}}$ ein Spezialisierungsmorphismus, so haben wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_{\bar{x}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\bar{x}} & \longrightarrow & \mathcal{F}''_{\bar{x}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_{\bar{y}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\bar{y}} & \longrightarrow & \mathcal{F}''_{\bar{y}} \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

Sind die vertikalen Spezialisierungsabbildungen φ_* Isomorphismen für \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' , so auch für \mathcal{F} , nach dem Fünferlemma. Die Behauptung folgt also mit Lemma 2.6.

(c): Es genügt wieder, dies für lokal konstante und dann für konstante Garben zu zeigen, wo die Behauptung offensichtlich folgt.

3 Konstruierbare \mathbb{Z}_ℓ -Garben

Definition 3.1 (siehe SGA 5 VI) (a) Eine \mathbb{Z}_ℓ -Garbe \mathcal{F} auf einem Schema Z ist ein projektives System

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}_1$$

von Garben auf Z , so dass gilt

- (i) \mathcal{F}_n wird von ℓ^n annulliert, ist also eine \mathbb{Z}/ℓ^n -Garbe,
 - (ii) $\mathcal{F}_{n+1}/\ell^n \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n$ ist ein Isomorphismus. Wir schreiben im Folgenden nur $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$.
- (b) Morphismen von \mathbb{Z}_ℓ -Garben sind Morphismen von projektiven Systemen, also kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{F}_n & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \mathcal{G}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{G}_n & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathcal{G}_1 \end{array}$$

(Es folgt wegen (a) (ii):

$$\text{Hom}((\mathcal{F}_n), (\mathcal{G}_n)) = \varprojlim_n \text{Hom}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n) \quad ,$$

wobei die Übergangsabbildungen durch

$$\text{Hom}(\mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{G}_{n+1}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{G}_n) \xrightarrow[\text{(ii)}]{\sim} \text{Hom}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n)$$

gegeben sind).

(c) \mathbb{Q}_ℓ -Garben sind als Objekte dasselbe wie \mathbb{Z}_ℓ -Garben, nur sind die Morphismenmengen mit \mathbb{Q}_ℓ tensoriert.

(d) (naive Definition) Die Kohomologie einer \mathbb{Z}_ℓ -Garbe $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ ist definiert als

$$H^i(Z, \mathcal{F}) = \varprojlim_n H^i(X, \mathcal{F}_n) \quad .$$

Der Halm in einem geometrischen Punkt \bar{x} von Z wird definiert als

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} = \varprojlim_n (\mathcal{F}_n)_{\bar{x}} \quad .$$

Für \mathbb{Q}_ℓ -Garben tensoriert man diese Gruppen mit \mathbb{Q}_ℓ .

(e) Eine \mathbb{Z}_ℓ - oder \mathbb{Q}_ℓ -Garbe \mathcal{F} heißt **getwistet konstant**, wenn die Komponenten \mathcal{F}_n lokal konstante Garben sind. \mathcal{F} heißt **konstruierbar**, wenn die Komponenten konstruierbar sind. Konstruierbare getwistet konstante Garben heißen auch **glatt**.

(f) Das Tensorprodukt zweier \mathbb{Z}_ℓ - (oder \mathbb{Q}_ℓ -)Garben \mathcal{F} und \mathcal{G} wird definiert durch $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = (\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{G}_n)$, mit dem Tensorprodukt der Übergangsabbildungen. Das Dual wird definiert durch $\mathcal{F}^\vee = (\mathcal{F}_n^\vee)$, mit dem \mathbb{Z}/ℓ^n -Dual $\mathcal{F}_n^\vee = \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}_n, \mathbb{Z}/\ell^n)$. Hierbei ist $\underline{\text{Hom}}$ das Garben-Hom, und die Übergangsabbildungen sind analog wie in (b) gebildet.

(g) Eine Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

von \mathbb{Z}_ℓ -Garben (bzw. \mathbb{Q}_ℓ -Garben) heißt exakt, wenn für alle geometrischen Punkte \bar{x} von Z die assoziierte Sequenz der Halme exakt ist.

Beispiel 3.2 Für ℓ invertierbar auf Z und $m \in \mathbb{Z}$ setze $\mathbb{Z}_\ell := (\mathbb{Z}/\ell^n(m))$ mit den offensichtlichen Übergangsabbildungen, wobei

$$\mathbb{Z}/\ell^n(m) = \begin{cases} \mu_{\ell^n}^{\otimes m} & m \geq 0, \\ (\mu_{\ell^n}^{\otimes |m|})^\vee & m < 0 \end{cases}.$$

Dann ist $\mathbb{Z}_\ell = \mathbb{Z}_\ell(0)$ konstant und die $\mathbb{Z}_\ell(m)$ sind glatte \mathbb{Z}_ℓ -Garben für alle $m \in \mathbb{Z}$ nach Beispiel 2.9 (a). Offenbar gelten die Regeln $\mathbb{Z}_\ell(m)^\vee = \mathbb{Z}_\ell(-m)$ und $\mathbb{Z}_\ell(m) \otimes \mathbb{Z}_\ell(n) = \mathbb{Z}_\ell(m+n)$.

Proposition 3.3 Sei Z lokal noethersch.

- (a) Eine \mathbb{Z}_ℓ -Garbe \mathcal{F} auf Z ist genau dann konstruierbar, wenn \mathcal{F}_1 konstruierbar ist.
- (b) Eine \mathbb{Z}_ℓ -Garbe \mathcal{F} auf Z ist konstruierbar genau dann, wenn es für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subset Z$ ein offenes nicht-leeres Unterschema $U \subset Y$ gibt derart, dass $\mathcal{F}|_U$ glatt ist.
- (c) Ist Z noethersch und zusammenhängend und $\bar{x} \rightarrow X$ ein geometrischer Punkt, so gibt es eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} (\text{glatte } \mathbb{Z}_\ell\text{-Garben auf } Z) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \text{endlich erzeugte } \mathbb{Z}_\ell\text{-Modul} \\ \text{mit stetiger Operation von } \pi_1(Z, \bar{x}) \end{array} \right) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}_{\bar{x}}. \end{array}$$

Dasselbe gilt, wenn \mathbb{Z}_ℓ durch \mathbb{Q}_ℓ ersetzt wird.

Beweis (a): Die Aussage ist lokal, es sei also ohne Einschränkung Z noethersch. Sei \mathcal{F}_1 konstruierbar. Wir zeigen durch Induktion über n , dass alle \mathcal{F}_n konstruierbar sind. Ist dies für n bereits bewiesen, so betrachte die exakten Sequenzen

$$(3.3.1) \quad 0 \rightarrow \ell^n \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}/\ell^n \mathcal{F}_{n+1} \cong \mathcal{F}_n \rightarrow 0$$

$$(3.3.2) \quad \mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_{n+1}/\ell \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\ell^n} \ell^n \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow 0,$$

wobei der erste Isomorphismus in (3.3.2) durch Iteration aus 3.1 (ii) folgt:

$$\mathcal{F}_{n+1}/\ell \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n/\ell \mathcal{F}_n \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2/\ell \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_1.$$

Es folgt dann aus Lemma 2.10, dass $\ell^n \mathcal{F}_{n+1}$ und \mathcal{F}_{n+1} konstruierbar sind.

(b): Für eine \mathbb{Z}_ℓ -Garbe \mathcal{F} auf Z sei

$$gr^r \mathcal{F} := \text{Ker}(\mathcal{F}_r \rightarrow \mathcal{F}_{r-1}) = \ell^{r-1} \mathcal{F}_r$$

für $r \in \mathbb{N}$ (wobei $\mathcal{F}_0 := 0$). Dann ist

$$gr \mathcal{F} := \bigoplus_{r \geq 1} gr^r \mathcal{F}$$

ein graduerter $\mathbb{F}_\ell[T]$ -Modul wie folgt: erkläre

$$T^s : \quad gr^r \mathcal{F} \longrightarrow gr^{r+s} \mathcal{F}$$

als Komposition der Morphismen

$$\ell^{r-1} \mathcal{F}_r \cong \ell^{r-1} (\mathcal{F}_{r+s} / \ell^r \mathcal{F}_{r+s}) \xrightarrow{\cdot \ell^s} \ell^{r+s-1} \mathcal{F}_{r+s} \quad ,$$

und setze die Operation \mathbb{F}_ℓ -linear fort. (Erklärung: käme \mathcal{F} wirklich von einem Objekt mit \mathbb{Z}_ℓ -Operation, so wäre $\mathcal{F}_r = \mathcal{F} / \ell^r \mathcal{F}$, und die obige die übliche Operation von $gr \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{r \geq 0} \ell^r \mathbb{Z}_p / \ell^{r+1} \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_\ell[T]$ auf $gr \mathcal{F} = \bigoplus_{r \geq 0} \ell^r \mathcal{F} / \ell^{r+1} \mathcal{F}$). Die im Beweis von (a) konstruierten Surjektionen $\mathcal{F}_1 \longrightarrow gr^p \mathcal{F}$ definieren eine Surjektion von graduierten $\mathbb{F}_\ell[T]$ -Garben

$$\varphi : \mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow gr \mathcal{F} \quad .$$

Nun benötigen wir das bekannte

Hilbert-Lemma 3.4 Ist \mathcal{F}_1 eine noethersche Garbe, so ist $\mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{F}_1$ noethersch als graduierte $\mathbb{F}_\ell[T]$ -Garbe (dies gilt allgemeiner für ein Objekt in einer abelschen Kategorie).

Der Beweis dieser Aussage folgt leicht durch Betrachtung einer Doppelfiltrierung in \mathcal{F}_1 , vgl. SGA 5 V 5.1.4.

Wie im Beweis von Lemma 2.10 (c) erhält man eine Surjektion von graduierten $\mathbb{F}_\ell[T]$ -Garben

$$\mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{G} \twoheadrightarrow Ker \varphi \quad ,$$

mit einer konstruierbaren, graduierten Garbe \mathcal{G} auf Z . Damit ist $gr \mathcal{F}$ der Kokern von

$$\mathbb{F}_\ell[T] \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}_q[T] \otimes \mathcal{F}_1 \quad .$$

Da \mathcal{F}_1 und \mathcal{G} konstruierbar sind, folgt nun, dass $gr \mathcal{F}$ konstruierbar ist in dem Sinne, dass es für jedes abgeschlossene Y in Z ein offenes U in Y gibt derart, dass $gr \mathcal{F}$ eingeschränkt auf U lokal konstant ist, d.h., dies gilt für alle $gr^p \mathcal{F}$. Da lokal konstante Garben abgeschlossen gegenüber Erweiterungen sind (siehe den Beweis von Lemma 2.10 (b)), folgt die Behauptung: auf U sind alle \mathcal{F}_n lokal konstant.

Die Aussage (c) von Proposition 3.3 ist klar; man beachte, dass man die folgende Kategorienäquivalenz hat.

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \text{endlich erzeugte} \\ \mathbb{Z}_\ell\text{-Moduln mit} \\ \text{stetiger Operation von } \pi_1(Z, \bar{x}) \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \ell\text{-adische projektive} \\ \text{Systeme von endlichen} \\ \text{diskreten } \pi_1(Z, \bar{x})\text{-Moduln} \end{array} \right) \\ M & \mapsto & (M / \ell^n M) \\ \lim_{\leftarrow, n} (M_n) & \leftarrow & (M_n) . \end{array}$$

Ein ℓ -adisches projektives System in einer abelschen Kategorie ist dabei ein projektives System

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_n \rightarrow \cdots \rightarrow A_1$$

mit (i) $\ell^n A_n = 0$ und (ii) $A_{n+1} / \ell^n A_{n+1} \xrightarrow{\sim} A_n$. Schließlich erhält man aus der linksstehenden Kategorie die Kategorie der \mathbb{Q}_ℓ -Darstellungen von $\pi_1(Z, \bar{x})$, d.h., der endlich-dimensionalen \mathbb{Q}_ℓ -Vektorräume, wenn man die Homomorphismenmengen über \mathbb{Z}_ℓ mit \mathbb{Q}_ℓ tensoriert.

4 Kohomologie mit kompakten Träger

Wir notieren weitere Definitionen und Eigenschaften der étalen Kohomologie, die zum Verständnis der Lefschetz-Formel KOH 8/Theorem 1.6 benötigt werden.

KOH 9 Kohomologie mit kompaktem Träger: Sei X separiert von endlichem Typ über einem Körper k . Nach Nagata gibt es eine offene Immersion $\mu : X \hookrightarrow X_1$ in ein eigentliches k -Schema X_1 , und für eine Torsionsgarbe \mathcal{F} auf X definiert man die Kohomologie mit kompaktem Träger durch

$$H_c^i(X, \mathcal{F}) := H^i(X_1, \mu_! \mathcal{F}),$$

wobei $\mu_! \mathcal{F}$ die Fortsetzung durch null von \mathcal{F} auf X_1 ist: $\mu_! \mathcal{F}$ ist assoziiert zur Prägarbe $\mu_!^P \mathcal{F}$:

$$\mu_!^P \mathcal{F}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & V \rightarrow X_1 \text{ faktorisiert über } X, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 4.1 (a) $H_c^i(X, \mathcal{F})$ hängt nicht von der Wahl der ‘‘Kompaktifizierung’’ $\mu : X \hookrightarrow X_1$ ab.

(b) $\mathcal{F} \mapsto H_c^i(X, \mathcal{F})$ ist ein exakter δ -Funktorkomplex.

(c) Ist $i : Z \hookrightarrow X$ abgeschlossen mit offenem Komplement $j : U \hookrightarrow X$, so hat man eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_c^{i-1}(Z, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^i(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^i(Z, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^{i+1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow \dots,$$

wobei die Einschränkungen $i^* \mathcal{F}$, $j^* \mathcal{F}$ wieder mit \mathcal{F} bezeichnet sind.

Zum Beweis von (a) benötigt man

KOH 10 Eigentliches Basiswechsel: Sei $f : X \rightarrow Y$ eigentlich.

(a) Ist \mathcal{F} konstruierbar auf X , so ist $R^i f_* \mathcal{F}$ konstruierbar für alle $i \geq 0$.

(b) Für ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

und eine Torsionsgarbe \mathcal{F} auf X ist der Basiswechsellmorphismus

$$g^* R^i f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^i f'_* g'^* \mathcal{F}$$

ein Isomorphismus für alle $i \geq 0$.

Bemerkungen 4.2 (a) Der schwierige Teil ist (a); Teil (b) folgt leicht daraus, vgl. [Mi] VI §2.

(b) Für $i = 0$ wird der Basiswechselformorphismus wie folgt definiert: da g^* linksadjungiert zu g_* ist, genügt es, einen Morphismus

$$f_*\mathcal{F} \longrightarrow g_*f'_*g'^*\mathcal{F} = f_*g'_*g'^*\mathcal{F}$$

anzugeben; dieser ist das Bild unter f_* des Adjunktionsmorphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow g'_*g'^*\mathcal{F}.$$

Für $i \geq 0$ erhält man den Morphismus durch Betrachtung injektiver Auflösungen.

(c) Sei X ein quasi-kompaktes Schema, k ein Körper mit separablem Abschluß k_s und $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ ein Morphismus. Ist \mathcal{F} eine Garbe auf X und bezeichnet \bar{x} den geometrischen Punkt $\text{Spec}(k_s) \rightarrow \text{Spec}(k)$, so hat man eine kanonische Isomorphie

$$(R^i f_*\mathcal{F})_{\bar{x}} \cong H^i(X \times_k k_s, \bar{x}^*\mathcal{F}),$$

wobei \bar{x} auch für den Basiswechsel $X \times_k k_s \rightarrow X$ von \bar{x} steht. Da nämlich $R^i f_*\mathcal{F}$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe $(g : U \rightarrow \text{Spec}(k)) \mapsto H^i(X \times_k U, g^*\mathcal{F})$ ist, und diese dieselben Halme hat, folgt die Behauptung aus der Verträglichkeit von Kohomologie mit Limiten (vergl. [Mi]III 1.16), nämlich aus der Gleichheit

$$\varinjlim_K H^i(X \times_k K, h_K^*\mathcal{F}) = H^i(X \times_k k_s, \bar{x}^*\mathcal{F}),$$

wobei $h_K : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(k)$ die zusammenhängenden étalen Umgebungen von \bar{x} durchläuft, also die endlichen separablen Erweiterungen K von k in k_s .

Insbesondere folgt aus KOH 10 (a), dass für eigentliches f und konstruierbares \mathcal{F} auf X die Gruppe $H^i(X \times_k k_s, \bar{x}^*\mathcal{F})$ endlich ist. Als Spezialfall ($k = k_s, \mathcal{F} = \mathbb{Z}/\ell^n$) folgt KOH 5.

(d) Ist $f : X \rightarrow Y$ eigentlich, $\bar{y} \rightarrow Y$ ein geometrischer Punkt und

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{y}} & \xrightarrow{\pi'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bar{y} & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm, so folgt aus (c) und KOH 10 (b), dass es für Torsionsgarben \mathcal{F} auf X kanonische Isomorphismen

$$(R^i f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} \cong H^i(X_{\bar{y}}, (\pi')^*\mathcal{F})$$

gibt, da die linke Seite gleich $(\pi^* R^i f_*\mathcal{F})_{\bar{y}}$ ist, und die rechte Seite gleich $(R^i f'_*\pi'^*\mathcal{F})_{\bar{y}}$.

Beweis von 4.1: Wir beweisen hier nur (a); (b) und (c) folgen leicht aus der Exaktheit von $\mu_!$, siehe [Mi] III 1.29.

Sei $\nu : X \hookrightarrow X_2$ eine zweite Kompaktifizierung von X . Durch Betrachtung des Abschlusses von X in $X_1 \times X_2$ kann man ohne Einschränkung annehmen, dass es einen Morphismus $g : X_1 \rightarrow X_2$ gibt mit $g\nu = \nu$. Die Behauptung folgt dann aus der Leray-Spektralsequenz für $\mu_!\mathcal{F}$,

$$E_2^{p,q} = H^p(X_2, g_*\mu_!\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X_1, \mu_!\mathcal{F}),$$

wenn man zeigt

$$R^q g_* \mu_! \mathcal{F} = \begin{cases} \nu_! \mathcal{F} & q = 0, \\ 0 & q > 0 \end{cases} .$$

Es reicht, dies auf den Halmen in einem geometrischen Punkt \bar{x} von X_2 zu zeigen (für $q = 0$ beachte, dass $g_* \mu_! \mathcal{F}$ und $\nu_! \mathcal{F}$ Untergarben von $g_* \mu_* \mathcal{F} = \nu_* \mathcal{F}$ sind). Nach eigentlichem Basiswechsel (siehe 4.2 (d)) gilt aber

$$(R^q g_* \mu_! \mathcal{F})_{\bar{x}} = H^q(X_{1,\bar{x}}, \mu_! \mathcal{F}|_{X_{1,\bar{x}}}) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}} & q = 0 \text{ und } x \in X, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

da $\mu_! \mathcal{F}|_{X_{1,\bar{x}}} = 0$, falls das Bild x von \bar{x} in X_2 nicht in X liegt, und da $X_{1,\bar{x}}$ nur aus dem Punkt \bar{x} besteht, falls x in X liegt.

Alles Gesagte überträgt sich auf \mathbb{Z}_ℓ - und \mathbb{Q}_ℓ -Garben. Insbesondere ist für ein eigentliches Schema X_1 von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper L und eine konstruierbare \mathbb{Z}_ℓ - (bzw. \mathbb{Q}_ℓ -) Garbe \mathcal{F} auf X die Kohomologie $H^q(X_1, \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter \mathbb{Z}_ℓ - (bzw. \mathbb{Q}_ℓ -) Modul. Ist $j : X \hookrightarrow X_1$ eine offene Immersion und \mathcal{F} eine (konstruierbare) \mathbb{Z}_ℓ - (bzw. \mathbb{Q}_ℓ -) Garbe auf X , so gilt dies auch für $j_! \mathcal{F}$ auf X_1 . Es folgt, dass $H_c^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X_1, j_! \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter \mathbb{Z}_ℓ - (bzw. \mathbb{Q}_ℓ -) Modul ist.

5 Der Frobenius-Endomorphismus

Um auch noch die letzten Bezeichnungen in 1.6 zu erklären, betrachten wir die folgende Funktorialität.

Für jeden Morphismus $f : X' \rightarrow X$ von Schemata hat man einen Homomorphismus

$$(5.1.1) \quad H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, f^* \mathcal{F}),$$

definiert durch die Komposition

$$H^i(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} H^i(X, f_* f^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} H^i(X', f^* \mathcal{F}),$$

wobei α vom Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ induziert wird und β der Kantenmorphismus für die Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_* \mathcal{G}) \Rightarrow H^{p+q}(X', \mathcal{G}),$$

für $\mathcal{G} = f^* \mathcal{F}$. Alternativ wird

$$\beta : H^0(X, f_* \mathcal{G}) = H^0(X' \times_X X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^0(X', \mathcal{G})$$

durch die kanonische Identifizierung $X' \times_X X = X'$ definiert und mittels injektiver Auflösungen von \mathcal{G} und $f_* \mathcal{G}$ auf die höheren Kohomologiegruppen fortgesetzt.

Mittels des kommutativen Diagramms

$$(5.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} X' & & & & \\ & \searrow f & & & \\ & & X & & \\ & \searrow g & \longrightarrow & & \\ & & X' \times_X X & & \\ & \searrow id & \downarrow pr_1 & & \downarrow id \\ & & X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kann $X' \times_X X$ mittels der zueinander inversen Morphismen pr_1 und g mit X' identifiziert werden.

Nun betrachten wir den Fall, dass X ein Schema über \mathbb{F}_q ist, \mathcal{F} eine (gewöhnliche oder \mathbb{Z}_ℓ - oder \mathbb{Q}_ℓ -) Garbe auf X , und dass $f = F : X \rightarrow X$ der q -Frobenius ist.

Lemma 5.1 Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$F_{/X}^* : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} F_* \mathcal{F}.$$

Beweis: Sei U étale über X , dann induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

einen Morphismus von X -Schemata

$$F_{U/X} : U \longrightarrow X_{F \times_X} U .$$

Da $U \rightarrow X$ und damit $X_{F \times_X} U \rightarrow X$ étale sind, ist $F_{U/X}$ étale ([MI] I 3.6), und da F ganz und radizial ist, sieht man leicht, dass $F_{U/X}$ ein Isomorphismus ist (vergl. SGA 5 XV). Wir erhalten einen Isomorphismus

$$F_{U/X}^* : (F_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(X_{F \times_X} U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U) ,$$

der funktoriell in U ist, und daher den gewünschten Isomorphismus.

Durch Adjunktion liefert $(F_{/X}^*)^{-1}$ einen Morphismus

$$F^* : F^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} .$$

Lemma 5.2 Der induzierte Homomorphismus in der Kohomologie

$$H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, F^* \mathcal{F}) \xrightarrow{F^*} H^i(X, \mathcal{F})$$

ist die Identität.

Beweis Für $i = 0$ erhalten wir dies wie folgt. Seien

$$Ad : \mathcal{F} \rightarrow F_* F^* \mathcal{F} \quad \text{und} \quad ad : F^* F_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

die Adjunktionsmorphisme. Per Definition ist dann F^* durch die Komposition

$$F^* \mathcal{F} \xrightarrow{F^*((F^*/_x)^{-1})} F^* F : * \mathcal{F} \xrightarrow{ad} \mathcal{F}$$

gegeben. Die Behauptung folgt nun aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{Ad} & H^0(X, F_* F^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta} & H^0(X, F^* \mathcal{F}) \\ \downarrow (F^*/_x)^{-1} & (1) & \downarrow F_* F^* (F^*/_x)^{-1} & (2) & \downarrow F^* (F^*/_x)^{-1} \\ H^0(X, F_* \mathcal{F}) & \xrightarrow{Ad F_*} & H^0(X, F_* F^* F_* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta} & H^0(X, F^* F_* \mathcal{F}) \\ & (3) & \downarrow F_* ad & (4) & \downarrow ad \\ & & H^0(X, F_* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta} & H^0(X, \mathcal{F}) . \end{array}$$

Hier sind (1) und (4) kommutativ, da Ad und ad natürliche Transformationen sind, (3) ist kommutativ nach Definition der Adjunktionsmorphisme, und (2) ist kommutativ, da β funktoriell ist. Schließlich sind $(F^*/_x)^{-1}$ und β zueinander invers wie in (5.1.2) bemerkt.

Für $i > 0$ folgt die Behauptung aus der Betrachtung injektiver Auflösungen, da die funktorielle Isomorphie $\mathcal{F} \cong F_* \mathcal{F}$ auch zeigt, dass F_* exakt ist.

Sei nun $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ und $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ die Projektion. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{F \times id} & \bar{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

und einen induzierten Homomorphismus

$$(F \times id)^* \pi^* \mathcal{F} = \pi^* F^* \mathcal{F} \xrightarrow{\pi^*(F^*)} \pi^* \mathcal{F}.$$

Es ergibt sich ein Homomorphismus in der Kohomologie durch Komposition

$$F = F^* : H^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) \rightarrow H^i(\overline{X}, (F \times id)^* \pi^* \mathcal{F}) \rightarrow H^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}).$$

Bemerkung 5.3 Dies überträgt sich auf die Kohomologie mit kompaktem Träger für ein separiertes \mathbb{F}_q -Schema von endlichem Typ, da F endlich ist und damit eine Abbildung

$$H_c^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) \longrightarrow H_c^i(\overline{X}, (F \times id)^* \pi^* \mathcal{F})$$

induziert: für eine Kompaktifizierung $\mu : X \hookrightarrow X_1$ gilt $\mu_! F_* = F_* \mu_!$. Dies liefert den Frobenius-Endomorphismus in 1.6.

Sei andererseits $\sigma : \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q \rightarrow \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q$ der q -Frobenius (also der arithmetische Frobenius). Dann haben wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{id \times \sigma} & \overline{X} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & X & \end{array}$$

und daher eine Gleichheit $(id \times \sigma)^* \pi^* \mathcal{F} = \pi^* \mathcal{F}$. Damit ergibt sich eine induzierte Abbildung

$$\sigma : H^i(\overline{X}, \pi^* \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}, (id \times \sigma)^* \mathcal{F}) = H^i(\overline{X}, \mathcal{F}),$$

die eine Operation der Galoisgruppe liefert.

Offenbar ist $Fr \times \sigma = (Fr \times id) \circ (id \times \sigma) = (id \times \sigma) \circ (Fr \times id)$ der q -Frobenius von \overline{X} . Aus Lemma 5.2 folgt also:

Satz 5.4 Es gilt $F = \sigma^{-1}$.

Hieraus folgt insbesondere KOH 6.

Schließlich erklären wir die Frobenius-Operation auf den Halmen. Zunächst gibt es kanonische Bijektionen

$$(5.5.1) \quad \overline{X}_0 \xrightarrow{\sim} \overline{X}(\overline{\mathbb{F}}_q) = \text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q, \overline{X}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q, X) = X(\overline{\mathbb{F}}_q),$$

(wobei \overline{X}_0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von \overline{X} bezeichnet), die wie folgt definiert sind: Ist $\overline{x} \in \overline{X}_0$, so ist die Komposition

$$p_{\overline{x}} : \text{Spec } k(\overline{x}) \xrightarrow{i_{\overline{x}}} \overline{X} \xrightarrow{p} \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)$$

notwendigerweise ein Isomorphismus, und wir ordnen \overline{x} den Morphismus $\varrho_{\overline{x}} = i_{\overline{x}} p_{\overline{x}}^{-1}$ zu. Die zweite Abbildung in (5.5.1) ist die Hinterschaltung der Projektion $\pi : \overline{X} \rightarrow X$. Das

kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(k(\bar{x})) & \longrightarrow & \bar{X} \\
 \downarrow & & \downarrow F \times id \\
 \text{Spec}(k((F \times id)\bar{x})) & \longrightarrow & \bar{X}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \nearrow \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \text{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q)
 \end{array}$$

zeigt, dass dabei die Operation von $F \times id$ auf \bar{X} der Operation von $F \times id$ auf $\bar{X}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ (Operation durch Hinterschalten) entspricht. Diese wiederum entspricht unter der zweiten Bijektion der Frobeniusoperation auf $X(\bar{\mathbb{F}}_q)$, die wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_q & \xrightarrow{f} & X \\
 F \downarrow & & \downarrow F \\
 \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_q & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

für jeden Morphismus f wahlweise durch Vor- oder Hinterschaltung definiert werden kann. Insbesondere erhalten wir durch Betrachtung der Potenzen von F :

Lemma 5.5 Es gibt eine Bijektion der Fixmoduln

$$\bar{X}^{(F^n \times id)} \xrightarrow{\sim} X(\mathbb{F}_{q^n}).$$

Sei nun \mathcal{F} eine Garbe auf X . Der Morphismus

$$F^* : F^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

induziert für jedes $\bar{x} \in \bar{X}_0$, aufgefaßt als geometrischer Punkt von X , einen Homomorphismus der Halme

$$F_{\bar{x}} = F_{\bar{x}}^* : \mathcal{F}_{F\bar{x}} \cong (F^* \mathcal{F})_{\bar{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\bar{x} \in \bar{X}^{(F^n \times id)} = X(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F^n}$ erhält man also durch Iteration einen Endomorphismus

$$F_{\bar{x}}^n : \mathcal{F}_{\bar{x}} = \mathcal{F}_{F^n \bar{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

Ist x das Bild von \bar{x} in X , so kann man $n = \deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ wählen und setzt

$$F_x = F_{\bar{x}}^{\deg(x)} : \mathcal{F}_{\bar{x}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

Das Paar $(F_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})$ hängt bis auf Isomorphie nicht von der Wahl von (einem der $\deg(x)$ vielen) \bar{x} über x ab, und daher ist der Ausdruck

$$\det(1 - F_x T \mid \mathcal{F}_{\bar{x}})$$

wohldefiniert, d.h., hängt nur von x ab; insbesondere gilt dies für

$$\text{tr}(F_x \mid \mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

Bemerkungen 5.6 (a) Die Operation auf den Halmen kann auch mittels $F \times id$ auf $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ erklärt werden. $F_{\bar{x}}$ identifiziert sich nämlich auch mit dem Homomorphismus

$$F_{\bar{x}} = (F \times id)_x^* : (\pi^* \mathcal{F})_{(F \times id)\bar{x}} = ((F \times id)^* \pi^* \mathcal{F})_{\bar{x}} \longrightarrow (\pi^* \mathcal{F})_{\bar{x}},$$

der vom Homomorphismus $(F \times id)^* : (F \times id)^* \pi^* \mathcal{F} \longrightarrow \pi^* \mathcal{F}$ im geometrischen Punkt \bar{x} von \bar{X} induziert wird (vermöge der kanonischen Isomorphie $(\pi^* \mathcal{F})_{\bar{x}} = \mathcal{F}_{\bar{x}}$, wobei \bar{x} links $\rho_{\bar{x}}$ und rechts $\pi_{\bar{x}} := \pi \rho_{\bar{x}}$ bezeichnet). Dies führt alles auf Objekte (Garben, Endomorphismen etc.) zurück, die für $\bar{X}/\bar{\mathbb{F}}_q$ erklärt sind.

(b) Andererseits kann in der obigen Situation, wo alles von X/\mathbb{F}_q herkommt, die Operation auf den Halmen auch Galois-theoretisch erklärt werden. Dazu beachte man, dass auf dem Halm $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ im geometrischen Punkt \bar{x} von X immer die Galoisgruppe $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/k(x))$ operiert (x das Bild von \bar{x} in X). Ist $\varphi_x : a \mapsto a^{q^{\deg(x)}}$ der arithmetische Frobenius von $\bar{\mathbb{F}}_q$ über $k(x)$, so ist

$$F_x = \varphi_x^{-1} \text{ auf } \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

Um dies einzusehen, beachte man, dass man dies nur für $\deg(x) = 1$ zeigen muß (nach Basiswechsel zu $k(x) = \mathbb{F}_{q^{\deg(x)}}$), da $F^{\deg(x)}$ der $q^{\deg(x)}$ -Frobenius ist. Dann identifiziert sich $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ mit dem Galoismodul $H^0(\bar{\mathbb{F}}_q, \pi_{\bar{x}}^* \mathcal{F}) = H^0(\text{Spec}(k(x)) \times_{\bar{\mathbb{F}}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \pi^*(i_x^* \mathcal{F}))$ (wobei $i_x : \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$, $\pi : \text{Spec}(k(x)) \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q \rightarrow \text{Spec}(k(x))$ die kanonischen Morphismen sind), und die Behauptung folgt aus Satz 5.4 für $X = \text{Spec}(k(x))$ und die Garbe $i_x^* \mathcal{F}$ hierauf.

6 Delignes Satz: Formulierung und erste Reduktionen

Zusammen mit Grothendiecks Formel erhält man die Weil-Vermutungen I - III offenbar aus dem folgenden Resultat.

Satz 6.1 (Deligne) Sei X eine glatte projektive Varietät über \mathbb{F}_q . Für jedes $i \geq 0$ hat das charakteristische Polynom

$$\det(1 - FT \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) \quad (\ell \neq p)$$

ganze Koeffizienten, die unabhängig vom ℓ sind. Ist

$$\det(1 - FT \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) = \prod_{\alpha} (1 - \alpha T) \quad \text{mit } \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C};$$

so gilt

$$|\alpha| = q^{\frac{i}{2}} \quad \text{für alle } \alpha.$$

Man beachte: die α sind gerade die Eigenwerte von F auf $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Reduktion 1 Es genügt zu zeigen:

W(X,i): Für jedes $i \geq 0$ und jedes $\ell \neq p$ sind die Eigenwerte von F auf $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ algebraische Zahlen, deren komplexe Konjugierte α alle den Betrag

$$|\alpha| = q^{\frac{i}{2}}$$

haben.

Beweis Sei ℓ fest, $P_i(T) = \det(1 - FT \mid H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))$ und M_i die Menge der Nullstellen von $P_i(T)$. Setze

$$\begin{aligned} P(T) &= \prod_{i \text{ ungerade}} P_i(T), \\ Q(T) &= \prod_{i \text{ gerade}} P_i(T), \end{aligned}$$

so dass

$$Z(X, T) = \frac{P(T)}{Q(T)}.$$

Sei K ein galoisscher Zahlkörper, der alle Nullstellen enthält. Dann kann die letzte Gleichung als Gleichung in $K[[T]]$ aufgefaßt werden, und die Galoisgruppe $Gal(K/\mathbb{Q})$ operiert auf diesem Ring, indem sie auf den Koeffizienten der Potenzreihen operiert. Für $\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})$ ist $\sigma Z(X, T) = Z(X, T)$, da $Z(X, T) \in \mathbb{Z}[[T]]$. Andererseits ist nach $W(X, i)$ für alle i das Polynom $\sigma P_i(T)$ prim zu $P_j(T)$ für $j \neq i$, da $\sigma(M_i)$ disjunkt ist zu M_j für $i \neq j$. Da alle $P_i(T)$ konstanten Koeffizienten 1 haben, ist $\sigma P_i(T) = P_i(T)$, also $P_i(T) \in \mathbb{Q}[T]$, da dies für alle σ gilt. Das folgende Lemma zeigt, dass P und Q sogar aus $\mathbb{Z}[T]$ sind.

Lemma 6.2 Seien $P, Q \in \mathbb{Q}[T]$ prim zueinander mit konstanten Koeffizienten 1 und $P/Q = Z \in \mathbb{Z}[[T]]$. Dann sind $P, Q \in \mathbb{Z}[T]$.

Beweis Sei p eine Primzahl und $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ eine Nullstelle von $Q(T)$. Wir behaupten, dass λ^{-1} p -ganz ist. Ist dies nicht der Fall, so ist λ p -ganz, also $|\lambda|_p < 1$ für die auf $|p|_p = \frac{1}{p}$ normierte p -adische Bewertung von \mathbb{Q}_p . Da Z ganze Koeffizienten hat, konvergiert $Z(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p < 1$, und wir erhalten

$$P(\lambda) = Q(\lambda) \cdot Z(\lambda) = 0,$$

im Widerspruch zur Annahme, dass P und Q prim sind. Da dies für alle p gilt, sind also die Inversen der Nullstellen von $Q(T)$ ganz. Weil Q konstanten Koeffizienten 1 hat, folgt, dass die rationalen Koeffizienten ganz sind. Damit ist auch $P(T) = Q(T) \cdot Z(T) \in \mathbb{Z}[T]$.

Wir schließen nun weiter, dass auch die $P_i(T)$ ganze Koeffizienten haben, da sie konstanten Koeffizienten 1 haben und ihre reziproken Nullstellen ganz sind als reziproke Nullstellen von P oder Q (man kann auch das Lemma von Gauss benutzen). Die Unabhängigkeit der Koeffizienten von ℓ folgt so: Die reziproken Nullstellen von $P_i(T)$ sind diejenigen reziproken Nullstellen von $P(T)$ oder $Q(T)$, deren komplexe Konjugierte alle den Betrag $q^{\frac{i}{2}}$ haben. Da die Nullstellen von $P(T)$ und $Q(T)$ durch $Z(X, T)$ bestimmt sind, ist diese Beschreibung unabhängig von ℓ .

Bemerkung 6.3 (a) Der obige Beweis ist [Fr-K] entnommen (dort Seite 258). Er liefert unabhängig die Rationalität von $Z(X, T)$, ohne die Hankel-Determinanten zu benutzen, wie das bei Deligne ([D1] Seite 276) geschieht. Lemma 6.2 scheint das Lemma von Fatou zu sein, dass bei Deligne zitiert wird.

(b) Deligne hat allgemeiner bewiesen ([D2]3.3.4), dass für ein separiertes Schema X von endlichem Typ über \mathbb{F}_q die Frobenius-Eigenwerte auf $H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ für jedes $i \geq 0$ und $\ell \neq p = \text{char}(\mathbb{F}_q)$ algebraische Zahlen sind. Es ist aber bis jetzt nicht bekannt, ob diese Zahlen unabhängig von ℓ ($\neq p$) sind; man weiß nicht einmal, ob $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ unabhängig von ℓ ist.

Reduktion 2 Es reicht, $W(X, i)$ nach Übergang zu einer endlichen Erweiterung \mathbb{F}_{q^n} von \mathbb{F}_q zu zeigen. Genauer gilt: $W(X, i) \Leftrightarrow W(X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}, i)$, da bei Basiswechsel zu \mathbb{F}_{q^n} die Eigenwerte α zu α^n werden und q zu q^n .

Reduktion 3 Es reicht, geometrisch irreduzible X über beliebigem \mathbb{F}_q zu betrachten. Dies folgt aus Reduktion 2 und der folgenden offensichtlichen Tatsache: Ist $X = \coprod X_j$, so gilt: $W(X, i) \Leftrightarrow W(X_j, i)$ für alle j .

Sei also im folgenden X geometrisch irreduzibel, von der Dimension d .

Reduktion 4 Es reicht, $W(X, i)$ für $i \leq d$ zu zeigen. Wegen Poincaré-Dualität ist nämlich $W(X, i) \Leftrightarrow W(X, d-i)$: sind $\{\alpha\}$ die Eigenwerte von F auf $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, so sind $\{q^d \alpha^{-1}\}$ die Eigenwerte auf $H^{2d-i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Reduktion 5 Es reicht, $W(X, d)$ zu zeigen (für alle X wie oben). Es gilt nämlich

KOH 11 Schwacher Lefschetz: Ist X glatt projektiv der Dimension d und $Y \subseteq X$ ein glatter Hyperebenenschnitt, so ist die Restriktionsabbildung

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(\overline{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$$

bijektiv für $0 \leq i \leq d - 2$ und injektiv für $i = d - 1$.

Die Reduktion erfolgt dann durch Induktion über die Dimension von X : Weiß man in der Situation von KOH 11 schon $W(Y, i)$ für alle $i \leq \dim(Y) = d - 1$, so gilt wegen der Injektion auch $W(X, i)$ für alle $i \leq d - 1$. Man beachte dazu: es gibt nach Bertini immer einen glatten Hyperebenenschnitt von X , der über einer endlichen Erweiterung von \mathbb{F}_q definiert ist.

Bevor wir mit den Reduktionen fortfahren, zeigen wir noch, wie man KOH 11 aus den folgenden fundamentalen Eigenschaften der étalen Kohomologie ableitet.

KOH 12 Schwacher Lefschetz (2. Version): Ist X affin und von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper L , so gilt für die kohomologische Dimension $cd(X)$ von X

$$cd(X) = \dim(X),$$

d.h., für alle étalen Torsionsgarben \mathcal{F} auf X ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für $i > \dim(X)$ (siehe etwa [Mi] VI 7.2).

KOH 13 Poincaré-Dualität (2. Version): Sei X ein glattes, separiertes Schema der reinen Dimension d über einem Körper k mit separablem Abschluß k_s , und sei ℓ prim zur Charakteristik von k .

(a) Es gibt kanonische, Galois-äquivalente Homomorphismen (wobei $\bar{X} = X \times_k k_s$)

$$tr : H_c^{2d}(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n,$$

die verträglich mit den Projektionen $\mathbb{Z}/\ell^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n$ sind.

(b) Ist \mathcal{F} eine konstruierbare lokal-konstante \mathbb{Z}/ℓ^n -Garbe auf X , so ist die Komposition von Cupprodukt und tr

$$H_c^i(\bar{X}, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}(\bar{X}, \mathcal{F}^\vee)(d) \longrightarrow H^{2d}(\bar{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \xrightarrow{tr} \mathbb{Z}/\ell^n$$

eine perfekte Dualität (die Kohomologiegruppen sind endlich nach 2.9 (c)). (Siehe etwa [Mi] VI 11.2).

Lemma 6.4 KOH 11 folgt aus KOH 12 und KOH 13.

Beweis Ist X glatt, projektiv, geometrisch irreduzibel über einem Körper k und ist $Y \subseteq X$ ein glatter Hyperebenenschnitt, so ist das Komplement $U = X - Y$ affin (für eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}^N$ ist $\mathbb{P}^N - H \cong \mathbb{A}^N$ affin, und eine abgeschlossene Immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ ist affin). Nach KOH 12 und KOH 13 gilt dann

$$H_c^i(\bar{U}, \mathcal{F}) = 0 \text{ für } i < d = \dim X$$

für jede lokal-konstante \mathbb{Z}/ℓ^n -Garbe \mathcal{F} mit endlichen Halmen auf U ($\ell \neq \text{char}(k)$ und $\bar{U} = U \times_k k_s$ wie oben). Für eine solche Garbe \mathcal{F} auf X ist also die Restriktionsabbildung

$$H^i(\bar{X}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\bar{Y}, \mathcal{F})$$

bijektiv für $i < d - 1$ und injektiv für $i = d - 1$, nach der langen exakten Kohomologiesequenz in 2.8 (c) (beachte, dass $H^i = H_c^i$ für X und Y). Die Behauptung folgt nun aus dieser Aussage für $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/\ell^n$ durch Übergang zum Limes.

Reduktion 6 (“Rankin-Trick”) Es reicht, die folgende Aussage zu zeigen: Für jedes q existiert ein $N \geq 0$ so, dass für alle geometrisch irreduziblen glatten projektiven Varietäten der Dimension d über \mathbb{F}_q gilt:

W(X, d; N): Die Eigenwerte von F auf $H^d(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ sind algebraische Zahlen, deren komplexe Konjugierte α alle den Betrag

$$|\alpha| \leq q^{\frac{d}{2} + \frac{N}{2}}$$

haben.

Weiter kann man sich auf Dimensionen d beschränken, die von einer festen natürlichen Zahl M geteilt werden.

Beweis Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist nach der Künneth-Formel α^k Eigenwert von F auf $H^{kd}(\overline{X}^k, \mathbb{Q}_\ell)$. Nach $W(X^k, kd; N)$ gilt dann

$$|\alpha^k| \leq q^{\frac{dk}{2} + \frac{N}{2}},$$

also

$$|\alpha| \leq q^{\frac{d}{2} + \frac{N}{2k}}.$$

Da dies für alle k gilt, muss gelten

$$|\alpha| \leq q^{\frac{d}{2}}.$$

Nach Poincaré-Dualität ist $q^d \alpha^{-1}$ auch Eigenwert, also auch $|q^d \alpha^{-1}| \leq q^{\frac{d}{2}}$, d.h.,

$$|\alpha| \geq q^{\frac{d}{2}},$$

womit Gleichheit und damit $W(X, d)$ gilt. Schließlich können wir uns auf solche k beschränken, die von M geteilt werden.

Bemerkung 6.5 Der Trick, höhere Potenzen zu betrachten, sei es von X oder von Garben auf X , taucht an verschiedenen Stellen in Delignes Beweis auf. Deligne schreibt ([D 1] S. 283), dass er von Rankins Arbeit [Ran] inspiriert wurde, in der dieser seine Abschätzung für die Ramanujan-Funktion erhält (vergl. §0 Anwendung 1!), indem er statt $\sum \tau(n)n^{-s}$ die Dirichlet-Reihe

$$\sum \tau(n)^2 n^{-s}$$

betrachtet.

Reduktion 7 In den obigen Aussagen kann man die Bedingung “die Eigenwerte des Frobenius sind algebraische Zahlen, deren komplexe Konjugierte α den Betrag $|\alpha| \leq r \in \mathbb{R}$ haben”, jeweils ersetzen durch die Bedingung “die Eigenwerte $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ des Frobenius haben die Eigenschaft, dass $|\iota\alpha| \leq r$ für jede Einbettung $\iota: \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ”. Aus der letzteren Eigenschaft folgt nämlich automatisch, dass α algebraisch ist: ist α transzendent über \mathbb{Q} , so gibt es für jede transzendente Zahl $\beta \in \mathbb{C}$ eine Einbettung: $\iota: \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $\iota(\alpha) = \beta$; denn offenbar gibt es eine solche Einbettung für $\overline{\mathbb{Q}_\ell}(\alpha)$, und diese läßt sich auf $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ fortsetzen. Damit kann aber $|\iota\alpha|$ groß werden.

Bemerkung 6.6 Für die Fortsetzung der Einbettung $\mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{C}$ auf $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ benötigt man das Auswahlaxiom. Will man dieses hier nicht verwenden, so ist es im folgenden immer möglich, einen endlich erzeugten Körper $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ auszuwählen, in dem alle jeweils betrachteten Eigenwerte liegen, so dass man nur die unproblematischen Einbettungen von K benötigt. Die Einbettungen von $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ dienen eher einer bequemen Sprechweise.

7 Gewichte und Determinanten-Gewichte

Die bisherigen Betrachtungen legen die folgenden Definitionen nahe.

Definition 7.1 Sei q eine Primzahlpotenz und $n \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl α heißt rein vom Gewicht n , bezüglich q , wenn sie algebraisch ist und alle ihre komplexen Konjugierten den Betrag $q^{\frac{n}{2}}$ haben.

Definition 7.2 Sei X ein Schema von endlichem Typ über \mathbb{Z} und sei \mathbb{F} eine konstruierbare \mathbb{Q}_ℓ -Garbe auf X .

(a) \mathcal{F} heißt **rein** vom Gewicht $n \in \mathbb{Z}$, wenn für alle abgeschlossenen Punkte x von X die Eigenwerte von F_x auf $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ rein vom Gewicht n sind, bezüglich $N(x)$ (hierbei ist $\bar{x} : \text{Spec}(\overline{k(x)}) \rightarrow X$ ein geometrischer Punkt über x , $F_x \in \text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$ der geometrische Frobenius, der auf $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ operiert, und $N(x) = |k(x)|$).

(b) \mathcal{F} heißt **gemischt**, wenn es eine endliche Filtrierung $\dots \subseteq \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ durch konstruierbare Untergarben besitzt derart, dass die sukzessiven Quotienten $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1}$ rein sind. Die Gewichte der nichttrivialen Quotienten heißen die Gewichte von \mathcal{F} .

Beispiele 7.3 (a) $\mathbb{Q}_\ell(m)$ ist rein vom Gewicht $-2m$ (F_x operiert durch Multiplikation mit $N(x)^{-m}$).

(b) Sei X glatt und projektiv über \mathbb{F}_q . Fasst man die $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ -Darstellung $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ als \mathbb{Q}_ℓ -Garbe auf $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ auf, so besagt $W(X, i)$, dass $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ rein vom Gewicht i ist.

Lemma 7.4 (a) Die Kategorie der Garben, die rein vom Gewicht n sind, ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Quotienten, Untergarben, Erweiterungen, inversen Bildern sowie direkten Bildern bei endlichen Morphismen.

(b) Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} rein vom Gewicht m bzw. n , so ist \mathcal{F}^\vee rein vom Gewicht $-m$ und $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ rein vom Gewicht $m + n$.

(c) Die Kategorie der gemischten Garben ist abgeschlossen gegenüber den Bildungen in (a) sowie unter Bildung von Tensorprodukt und Dual.

Die Aussagen folgen sofort aus der Verträglichkeit der Operationen mit Halmbildung: man beachte, dass man für einen endlichen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ und $y \in Y$ einen Galois-äquivarianten Isomorphismus

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} \cong \bigoplus_{f(x)=y} \mathcal{F}_{\bar{x}}$$

hat. Weiter ist das Tensorprodukt exakt auf der Kategorie der \mathbb{Q}_ℓ -Garben.

Die letzte Reduktion in §6 motiviert die folgende

Definition 7.5 Sei $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung.

(a) Für eine Primzahlpotenz q heißt $\iota\text{-}w_q(\alpha) := 2 \log_q |\iota\alpha| \in \mathbb{R}$ das ι -Gewicht, bezüglich q , einer Zahl $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. (Also $|\iota\alpha| = q^{\frac{\iota\text{-}w_q(\alpha)}{2}}$).

(b) Sei X von endlichem Typ über \mathbb{Z} und \mathcal{F} eine konstruierbare \mathbb{Q}_ℓ -Garbe auf X . \mathcal{F} heißt ι -rein vom Gewicht $\beta \in \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in |X|$ und alle Eigenwerte α von F_x auf $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ gilt: $\iota w_{N(x)}(\alpha) = \beta$, d.h., $|\alpha| = N(x)^{\frac{\beta}{2}}$.

(c) Die Garbe \mathcal{F} heißt ι -gemischt, wenn sie eine endliche Filtrierung mit sukzessiven ι -reinen Quotienten besitzt.

Es gelten die offensichtlichen Analoga von 7.4. Die ersten nicht-trivialen Aussagen über Gewichte werden mit den sogenannten Determinanten-Gewichten erhalten. Sei dazu X ein normales geometrisch zusammenhängendes Schema von endlichem Typ über \mathbb{F}_q und sei \bar{y} ein geometrischer Punkt. Man hat eine exakte Sequenz der Fundamentalgruppen

$$(7.6.1) \quad 1 \rightarrow \pi_1(\bar{X}, \bar{y}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{y}) \rightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \rightarrow 1,$$

wobei \bar{y} auch einen über \bar{y} liegenden geometrischen Punkt von \bar{X} bezeichnet: Für normales X folgt dies sofort aus der Galoistheorie von Körpern: ohne Einschränkung liegt \bar{x} über dem generischen Punkt von X , dann sind $\pi_1(\bar{X}, \bar{y})$ und $\pi_1(X, \bar{y})$ die Galoisgruppen der maximalen Erweiterungen der Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(\bar{X})$ bzw. $\mathbb{F}_q(X)$, die unverzweigt über \bar{X} bzw. X sind, und $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ ist isomorph zur Galoisgruppe der unverzweigten Erweiterung $\mathbb{F}_q(X) \cdot \bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q(X)$.

Definition 7.6 Die Weilgruppe $W(X, \bar{y})$ ist das volle Urbild in $\pi_1(X, \bar{y})$ der Untergruppe $\{F^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \subseteq \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

Wir haben also eine exakte Sequenz

$$(7.6.2) \quad 1 \rightarrow \pi_1(\bar{X}, \bar{y}) \rightarrow W(X, \bar{y}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

wobei man den Homomorphismus $W(X, \bar{y}) \rightarrow \mathbb{Z}$ mit deg bezeichnet und die Gradabbildung nennt.

Im folgenden betrachten wir glatte \mathbb{Q}_ℓ -Garben auf X . Diese entsprechen stetigen \mathbb{Q}_ℓ -Darstellungen von $\pi_1(X, \bar{y})$, aber für die folgenden Schlüsse ist es zweckmäßig, mit $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Koeffizienten zu arbeiten. Wir definieren daher:

Definition 7.7 Eine glatte $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe \mathcal{F} auf X ist eine stetige endlich-dimensionale $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Darstellung von $\pi_1(X, \bar{y})$.

Da $\pi_1(X, \bar{y})$ kompakt ist, kommt jede $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Darstellung durch Tensorieren mit $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ von einer E -Darstellung für eine endliche Erweiterung E von \mathbb{Q}_ℓ . Umgekehrt gibt jede glatte \mathbb{Q}_ℓ -Garbe eine glatte $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe durch Tensorieren mit $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Für einen anderen geometrischen Punkt \bar{x} von X ist $\pi_1(X, \bar{x})$ isomorph zu $\pi_1(X, \bar{y})$, und dieser Isomorphismus ist eindeutig bis auf innere Automorphismen. Daher erhält man für jedes $\bar{x} \in X(\bar{\mathbb{F}}_q)$, mit Bild x in X , einen Homomorphismus

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/k(x)) = \pi_1(\{x\}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{y}),$$

der wohldefiniert ist bis auf Konjugation in $\pi_1(X, \bar{y})$. Der Halm einer $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe in \bar{x} ist die $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Darstellung von $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/k(x))$, die man durch Restriktion mittels des obigen Homomorphismus erhält. Insbesondere sind dann die Eigenwerte von F_x definiert, und man kann die Begriffe Reinheit, ι -Gewicht etc. übertragen.

Proposition 7.8 Eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe \mathcal{F} vom Rang 1 ist ι -rein für jedes $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$.
Genauer gilt:

(a) Sei $\chi : W(X, \overline{y}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ der durch \mathcal{F} induzierte Charakter. Dann ist χ Produkt eines endlichen Charakters und eines Charakters der Form

$$w \mapsto c^{\deg(w)}$$

für ein $c \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$.

(b) \mathcal{F} ist ι -rein vom Gewicht $\iota \cdot w_q(c)$.

Beweis Offenbar folgt (b) aus (a), da

$$|\iota\chi(F_x)| = |(\iota c)^{\deg(x)}| = |\iota c|^{\deg(x)} = N(x)^{\frac{\iota \cdot w(c)}{2}}$$

für alle $x \in |X_0|$. Für (a) genügt es zu zeigen, dass die Einschränkung von χ auf $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ endliche Ordnung hat. Dann ist nämlich χ^n von der Form $w \mapsto b^{\deg(w)}$ für n genügend groß, und die Behauptung folgt mit einer n -ten Wurzel c aus b . Es gilt aber, dass $\chi(\pi_1(\overline{X}, \overline{y}))$ als kompakte Untergruppe in E^\times für eine endliche Erweiterung E/\mathbb{Q}_ℓ Produkt einer endlichen und einer pro- ℓ -Gruppe ist. Andererseits kann man zeigen (beachte, dass $\ell \neq p$):

Satz 7.9 Das Bild von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ in der Faktorkommutatorgruppe $W(X, \overline{y})^{ab} (= W(X, \overline{y})$ modulo dem Abschluß der Kommutatorgruppe) ist Produkt einer endlichen Gruppe und einer pro- p -Gruppe.

Beweis Wir zeigen dies nur für eine glatte Kurve X , da nur dieser Fall später benötigt wird. Sei X_1 die glatte Kompaktifizierung von X und sei $S = X_1 - X$.

1. Beweis, mit Klassenkörpertheorie: Nach dieser ist

$$W(X, \overline{y})^{ab} \cong k^\times \setminus A^\times / \prod_{x \in X_0} O_x^\times,$$

wobei K der Funktionenkörper von X ist, A^\times die Idealgruppe von K und O_x die Komplettierung des lokalen Rings von X bei x . Das Bild von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ ist der Kern der Gradabbildung hierauf. Der Kern der Abbildung

$$W(X, \overline{y})^{ab} \longrightarrow W(X_1, \overline{y})^{ab} = K^\times \setminus A^\times / \prod_{x \in (X_1)_0} O_x^\times$$

ist aber Produkt einer endlichen und einer pro- p -Gruppe, als Quotient von $\prod_{x \in S} O_x^\times$, und der Kern der Gradabbildung auf $W(X_1, \overline{y})^{ab}$ ist die endliche Klassengruppe $Pic^0(X_1)$ von X_1 .

2. Beweis, geometrisch: Es genügt zu zeigen, dass für $\ell \neq p$ die Ordnung der Fixmoduln unter dem Frobenius F

$$Hom(\pi_1(\overline{X}, \overline{y}), \mathbb{Z}/\ell^n)^F = H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n)^F$$

beschränkt ist, unabhängig von ℓ und n . Nach Poincaré-Dualität ist dies dual zu $H_c^1(\overline{X}, \mu_{\ell^n})_F$, dem Kofixmodul für F . Wegen der exakten Sequenz

$$H^0(\overline{S}, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H_c^1(\overline{X}, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H^1(\overline{X}_1, \mu_{\ell^n}) \longrightarrow 0$$

reicht es, die Ordnungen von $H^0(\overline{S}, \mu_{\ell^n})_F$ und $H^1(\overline{X}_1, \mu_{\ell^n})_F$ zu beschränken, und wegen der exakten Sequenz

$$(7.9.1) \quad 0 \longrightarrow A^F \longrightarrow A \xrightarrow{F-1} A \longrightarrow A_F \longrightarrow 0$$

für einen F -Modul A kann man die Ordnung der Fixmoduln betrachten, denn für endliches A folgt aus (7.9.1), dass A^F und A_F dieselbe Ordnung haben. Es sind aber

$$H^0(\overline{S}, \mu_{\ell^n})^F = H^0(S, \mu_{\ell^n}) = \bigoplus_{x \in S} \mu_{\ell^n}(k(x)) \subseteq \bigoplus_{x \in S} k(x)^\times$$

und

$$H^1(\overline{X}_1, \mu_{\ell^n})^F \stackrel{(1)}{=} {}_{\ell^n} \text{Pic}(\overline{X}_1)^F = {}_{\ell^n} \text{Pic}^0(\overline{X}_1)^F \stackrel{(2)}{\subseteq} \text{Pic}^0(X_1)$$

in endlichen Gruppen enthalten, da wir uns über einem endlichen Körper befinden. Die Gleichung (1) folgt aus der Isomorphie $\text{Pic}(\overline{X}_1) \cong H^1(\overline{X}_1, \mathbb{G}_m)$ und der Kohomologiesequenz zur Kummersequenz

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^n} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0,$$

da $H^0(\overline{X}_1, \mathbb{G}_m) = \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ ℓ -divisibel ist. Die Inklusion (2) folgt aus der Hochschild-Serre Spektralsequenz, da $H^1(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}}_q^\times) = 0$ (Hilbert 90) und $H^2(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}}_q^\times) = 0$ ($cd(\mathbb{F}_q) = 1$). Ein geometrischer Beweis der Endlichkeit von $\text{Pic}^0(X_1)$ ergibt sich z.B. daraus, dass dies die Menge der \mathbb{F}_q -rationalen Punkte einer abelschen Varietät über \mathbb{F}_q ist, nämlich der Jacobi-Varietät von X_1 .

Nach 7.8 macht die folgende Definition Sinn.

Definition 7.10 Sei \mathcal{F} eine glatte $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe auf X und $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung. Die ι -Determinanten-Gewichte von \mathcal{F} sind die Zahlen $\frac{1}{g} \cdot (\iota\text{-Gewicht von } \Lambda^g \mathcal{G})$, wobei \mathcal{G} ein Kompositionsfaktor (= irreduzibler Subquotient) von \mathcal{F} ist und $g = \dim \mathcal{G}$.

Nicht-triviale Aussagen über Determinanten-Gewichte folgen aus der Theorie der algebraischen (Monodromie-) Gruppen.

Definition 7.11 Sei \mathcal{F} eine glatte $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe auf X . Sei G_1 der Zariski-Abschluss des Bildes von $\pi_1(X, \overline{y})$ in $GL(\mathcal{F}_{\overline{y}})$ und sei G das semi-direkte Produkt von \mathbb{Z} mit G_1 , welches das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\overline{X}, \overline{y}) & \longrightarrow & W(X, \overline{y})^{\text{deg}} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & Gl(\mathcal{F}_{\overline{y}}) & & \end{array}$$

kommutativ macht (ist $F \in \text{deg}^{-1}(1)$, so normalisiert F den Normalteiler $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$, also auch G_1 , die Operation ist algebraisch, und G ist semi-direktes Produkt von $\langle F \rangle$ und G_1).

Satz 7.12 (Grothendieck) Sei G_1° die Zusammenhangskomponente der Eins von G_1 . Das Radikal von G_1° ist unipotent.

Zum Beweis benutzen wir:

Lemma 7.13 Ist \mathcal{F} halbeinfach, so ist G_1° halbeinfach. (Eine Darstellung heißt halbeinfach, wenn sie direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ist. Analog werden halbeinfache Objekte in einer abelschen Kategorie definiert).

Beweis Ist \mathcal{F} halbeinfach, so ist auch die Einschränkung auf den Normalteiler $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ halbeinfach: ist $W \subset V = \mathcal{F}_{\overline{y}}$ ein einfacher $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ -Modul, so ist die Summe W' seiner $W(X, \overline{y})$ -Konjugierten ein halbeinfacher $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ -Modul und besitzt ein Komplement in V (für $W(X, \overline{y})$ und daher für $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$). Dann ist G_1° reduktiv, d.h., das unipotente Radikal ist trivial (Ohne Einschränkung ist hierfür V einfach; dann benutzt man, dass eine unipotente Gruppe immer einen Fixvektor $\neq 0$ hat, also das unipotente Radikal einen Fixmodul $0 \neq V' \neq V$ hätte). Es ist zu zeigen, dass der maximale zentrale Torus T_1 trivial ist.

$W(X, \overline{y})$ operiert durch Konjugation auf T_1 und daher auf dem Charaktermodul $X(T_1) = \text{Hom}(T_1, \mathbb{G}_m)$, wobei die endliche Menge E der Charaktere respektiert wird, mit denen T_1 auf V operiert. Diese Menge E erzeugt $X(T_1)$, da T_1 nach Voraussetzung treu auf V operiert. Also faktorisiert die Operation von $W(X, \overline{y})$ über einen endlichen Quotienten von \mathbb{Z} , und wir können ohne Einschränkung den Kern dieser Operation betrachten, was einem Basiswechsel zu einer endlichen Erweiterung von \mathbb{F}_q entspricht. Dann ist die Operation auf T_1 trivial. Aber es gibt nur endlich viele äußere Automorphismen, die trivial auf T_1 sind, durch weiteren Basiswechsel sei also die Operation auf G_1° trivial. Durch Übergang zu einer offenen Untergruppe von $\pi_1(X, \overline{y})$, d.h., einer endlichen Überlagerung von X , ist schließlich ohne Einschränkung $G_1 = G_1^\circ$.

Wir können also annehmen, dass $G = G_1^\circ \times \mathbb{Z}$. Sei T der maximale Torus-Quotient von G_1° . Dieser ist isogen zu T_1 , es ist also zu zeigen, dass T_1 trivial ist. Die Abbildung $W(X, \overline{y}) \rightarrow G \rightarrow G_1^\circ \rightarrow T$ hat die Eigenschaft, dass das Bild von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ Zariski-dicht ist. Da T kommutativ ist, ist dieses Bild aber endlich nach Satz 7.9, also $T = \{1\}$.

Beweis von Satz 7.12 Sei F^\cdot eine Jordan-Hoelder-Filtrierung von V , P die Untergruppe von $GL(V)$, die die Filtrierung F^\cdot respektiert und $N \subseteq P$ die Untergruppe, die trivial auf den Quotienten von F^\cdot operiert, und $L = P/N$. Dann ist $G_1 \subseteq P$, das Bild G_2 in L der Zariski-Abschluss von $\pi_1(\overline{X}, \overline{y})$ in $GL(\text{Gr}_{F^\cdot} V)$ und der Kern von $G_1 \rightarrow G_2$ ein unipotenter Normalteiler von G_1 (da N unipotenter Normalteiler von P ist). Nach 7.13 ist G_2° reduktiv, und die Behauptung folgt.

Corollar 7.14 Sei \mathcal{F} halbeinfach und Z das Zentrum von G . Dann sind Kern und Kokern von $\text{deg} : Z \rightarrow \mathbb{Z}$ endlich.

Beweis $Z \cap G_1$ ist im Zentrum von G_1 enthalten und daher endlich. Weiter wurde im Beweis von 7.13 gezeigt, dass ein Element g in G mit $\text{deg}(g) = n \neq 0$ existiert, welches mit G_1° vertauscht. Eine geeignete Potenz vertauscht dann mit G , d.h., liegt in Z :

Zunächst können wir wir nämlich annehmen, dass g trivial durch Konjugation auf G_1/G_1° operiert. Sei dann für $h \in G_1$ das Element $x_h \in G_1^\circ$ definiert durch

$$ghg^{-1} = x_h \cdot h.$$

Dann ist $x_{hh'} = x_h$ und $x_{h'h} = h'x_h(h')^{-1}$ für $h' \in G_1^\circ$. Da G_1° ein Normalteiler in G_1 ist, folgt $h'x_h(h')^{-1} = x_h$, d.h., x_h liegt im Zentrum von G_1° . Da dieses endlich ist, gibt es ein $m \neq 0$

mit

$$g^m h g^{-m} = x_h^m \cdot h = h$$

für alle $h \in G_1$.

Corollar 7.15 Sei \mathcal{F} halbeinfach und g ein zentrales Element in G mit $\deg(g) = n \neq 0$. Sei \mathcal{F}' eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe auf X , die durch eine Darstellung V' von G induziert wird. Dann ist $\beta \in \mathbb{R}$ ein ι -Determinantengewicht auf \mathcal{F} genau dann, wenn es einen Eigenwert α von g auf V' gibt mit $|\iota\alpha| = q^{\frac{n\beta}{2}}$.

Beweis Ohne Einschränkung ist V' einfach. Dann ist g skalar (hier benötigt man $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Koeffizienten, nämlich das Lemma von Schur!), etwa gleich der Multiplikation mit α , und der Eigenwert auf $\det V'$ gleich α^r , $r = \dim V'$. Nach Proposition 7.8 ist das Determinantengewicht β gleich $\frac{1}{n} \cdot \iota\text{-}w(\alpha)$: Ist χ der Charakter zu $\det V'$, so ist $|\iota\chi(w)| = q^{\frac{\deg(w) \cdot \beta \cdot r}{2}}$; wählt man w mit $\deg(w) = n$, so ist $|\iota\chi(w)| = |\iota\alpha|$.

Satz 7.16 (a) Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei $n(\beta)$ die Summe der Ränge der Kompositionsfaktoren mit ι -Determinanten-Gewicht β . Dann sind die Determinantengewichte von $\Lambda^a \mathcal{F}$ die Summen

$$\sum m(\beta)\beta$$

mit $m(\beta) \in \mathbb{Z}$, $\sum m(\beta) = a$ und $0 \leq m(\beta) \leq n(\beta)$.

(b) Sind die glatten $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garben \mathcal{F} und \mathcal{F}' von reinem ι -Determinantengewicht β und β' , so ist $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ von reinem ι -Determinantengewicht $\beta + \beta'$.

(c) Sei $f : X' \rightarrow X$ ein dominanter Morphismus normaler zusammenhängender Schemata, die von endlichem Typ über \mathbb{F}_q sind. Eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe \mathcal{F} auf X ist genau dann von reinem ι -Determinantengewicht β , wenn $f^*\mathcal{F}$ es ist.

Beweis (a) Die Eigenwerte von Z auf $\Lambda^a \mathcal{F}$ sind Produkte von a Eigenwerten auf \mathcal{F} , die zu verschiedenen Eigenvektoren in \mathcal{F} gehören. Durch ι -Betragsbildung und Logarithmieren sieht man, dass man gerade alle Summen von a Determinanten-Gewichten erhält, bei denen höchstens $n(\beta)$ gleich β sind.

(b) ist analog, durch Betrachtung der algebraischen Monodromiegruppe von $\mathcal{F} \otimes G$.

(c) Aus der Voraussetzung folgt, dass das Bild von $\pi_1(\overline{X}')$ in $\pi_1(\overline{X})$ von endlichem Index ist: da die Schemata normal sind, genügt es, die Faser über dem generischen Punkt η von \overline{X} zu betrachten ($\text{Gal}(\overline{k(\eta)}/k(\eta)) \rightarrow \pi_1(\overline{X})$ ist surjektiv), und diese besitzt einen rationalen Punkt in einer endlichen Erweiterung von $k(\eta)$. Es folgt, dass für die entsprechenden Zariski-Abschlüsse G'_1 und G_1 das Bild von G'_1 endlichen Index in G_1 hat, also G_1° enthält. Das Bild des Zentrums Z' von G' zentralisiert also G_1° , und mit demselben Schluß wie im Beweis von 7.14 sieht man, dass es endlichen Index im Zentrum Z von G hat. Hieraus folgt offenbar die Behauptung.

8 Kohomologie von Kurven und L -Reihen

Sei X eine glatte geometrisch irreduzible Kurve über \mathbb{F}_q und sei \mathcal{F} eine glatte \mathbb{Q}_ℓ -Garbe auf X , mit Halm $V = \mathcal{F}_{\bar{y}}$ in einem geometrischen Punkt \bar{y} von X . Sei \mathcal{F}' (bzw. \mathcal{F}'') die größte Untergarbe (bzw. Quotientengarbe) von \mathcal{F} , die konstant auf \bar{X} ist. Wegen (7.6.1) sind dann \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' Urbilder von Garben auf $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$, d.h., kommen von \mathbb{Q}_ℓ -Darstellungen F' und F'' von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$.

Lemma 8.1 (a) $H^0(\bar{X}, \mathcal{F}) = V^{\pi_1(\bar{X}, \bar{y})} = F'$.

(b) $H_c^0(\bar{X}, \mathcal{F}) = \begin{cases} H^0(\bar{X}, \mathcal{F}) & \text{falls } X \text{ eigentlich ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(c) $H_c^2(\bar{X}, \mathcal{F}) = V_{\pi_1(\bar{X}, \bar{y})}(-1) = F''(-1)$.

(d) Ist \mathcal{F} eine beliebige konstruierbare \mathbb{Q}_ℓ -Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen, so ist $H_c^2(\bar{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_c^2(\bar{X}, \mathcal{F})$.

Beweis (a) folgt aus der Kategorienäquivalenz zwischen glatten Garben und Darstellungen der Fundamentalgruppe. (b) für nichteigentliches X folgt aus der Tatsache, dass eine glatte Garbe keine Schnitte mit Träger in endlich vielen Punkten hat (es reicht, dies für konstante Garben einzusehen). Alternativ kann man Poincaré-Dualität und schwachen Lefschetz verwenden. (c) folgt aus (a) mit Poincaré-Dualität. (d) folgt aus der relativen Kohomologie-sequenz für $U \subset X \supset X - U$, da $H^i(\bar{X} - \bar{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $i > 0$ ($\bar{X} - \bar{U}$ besteht aus endlich vielen Kopien von $\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}_q})$).

Corollar 8.2 Sei α ein Eigenwert von F auf $H^0(\bar{X}, \mathcal{F})$ oder $H_c^0(\bar{X}, \mathcal{F})$ (bzw. auf $H_c^2(\bar{X}, \mathcal{F})$).

(a) Für jedes $x \in X^0$ ist $\alpha^{\deg(x)}$ (bzw. $(q^{-1}\alpha)^{\deg(x)}$) ein Eigenwert von F_x auf \mathcal{F} (d.h., auf V).

(b) Die Zahl $\iota\text{-}w_q(\alpha)$ (bzw. $\iota\text{-}w_q(\alpha) - 2$) ist ein ι -Determinantengewicht von \mathcal{F} (d.h., der assoziierten $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe).

Für das Folgende benutzen wir die Grothendieck-Lefschetz-Formel

$$(8.3.1) \quad \prod_{x \in X_0} \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F})^{-1} = \prod_{i \geq 0} \det(1 - FT | H_c^i(\bar{X}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

für eine konstruierbare \mathbb{Q}_ℓ -Garbe \mathcal{F} auf einem Schema X von endlichem Typ über \mathbb{F}_q , die aus Theorem 1.6 und (1.5.2) folgt. Die linke Seite wird kontrolliert durch

Proposition 8.3 Gilt $\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha) \leq \beta$ für alle Eigenwerte α von F_x auf \mathcal{F} , für alle $x \in X_0$, so konvergiert $\iota \prod_{x \in X_0} \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F})^{-1}$ absolut für $|T| < q^{-\frac{\beta}{2} - \dim(X)}$ (d.h., für $\text{Re}(s) > \frac{\beta}{2} + \dim(X)$ falls $T = q^{-s}$), hat also weder Pol- noch Nullstelle in diesem Gebiet.

Beweis Sei $d = \dim(X)$; dann gibt es eine endliche Überdeckung von X so, dass jedes Mitglied quasi-endlich über einem affinen Raum $A_{\mathbb{F}_q}^d$ ist (Noether-Normalisierung). Hieraus folgt

$$\#\{x \in X_0 \text{ mit } \deg(x) = n\} \leq C \cdot q^{dn}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ (die die Summe der generischen Grade abschätzt), da $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathbb{F}_{q^n}^d$. Die Konvergenz folgt somit aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\sum_n q^{nd} q^{\frac{n\beta}{2}} |T|^n.$$

Corollar 8.4 Ist X eine affine glatte geometrisch irreduzible Kurve, so gilt für die Eigenwerte α von F auf $H_c^1(\overline{X}, \mathcal{F})$

$$\iota\text{-}w_q(\alpha) \leq \beta + 2.$$

Beweis Die rechte Seite der Formel (8.3.1) wird

$$\frac{\det(1 - FT|H_c^1(\overline{X}, \mathcal{F}))}{\det(1 - FT|H_c^2(\overline{X}, \mathcal{F}))}$$

Nach 8.2 (a) gilt $\iota\text{-}w_q(\alpha) \leq \beta + 2$ für die reziproken Nullstellen α des Nenners, und nach 8.3 gilt dies auch für die reziproken Nullstellen des Gesamtbruchs.

Sei nämlich α ein Eigenwert von F auf $H_c^2(\overline{X}, \mathcal{F})$. Nach 8.2 (a) ist dann $(q^{-1}\alpha)^{\deg(x)}$ Eigenwert von F_x auf \mathcal{F} , also nach Voraussetzung

$$\beta \geq \iota\text{-}w_{N(x)}(q^{-1}\alpha)^{\deg(x)} = -2 + \iota\text{-}w_q(\alpha).$$

Ist andererseits α ein Eigenwert von F auf $H_c^1(\overline{X}, \mathcal{F})$, so muss nach (8.3.1) und 8.3 $(1 - \iota\alpha T) \neq 0$ für alle $|T| < q^{-\frac{\beta}{2}-1}$ sein, also $|\iota\alpha| \leq q^{\frac{\beta}{2}+1}$, d.h., $\iota\text{-}w_q(\alpha) \leq \beta + 2$.

9 Reinheit von reellen \mathbb{Q}_ℓ -Garben

Dieser Abschnitt behandelt eine wichtige Methode, die in beiden Arbeiten von Deligne zur Weil-Vermutung benutzt wird.

Definition 9.1 Sei \mathcal{F} eine glatte $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe auf einem Schema X , welches von endlichem Typ über \mathbb{Z} ist.

(a) \mathcal{F} heißt total reell, wenn die Koeffizienten von

$$\det(1 - F_x T | \mathcal{F}) := \det(1 - F_x T | \mathcal{F}_x)$$

für jedes $x \in X_0$ total reelle algebraische Zahlen sind.

(b) \mathcal{F} heißt ι -reell für $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$, wenn

$$\iota \det(1 - F_x T | \mathcal{F})$$

für alle $x \in X_0$ reelle Koeffizienten hat.

Bemerkungen 9.2 Ist \mathcal{F} rein (bzw. ι -rein), so ist \mathcal{F} direkter Summand einer total reellen (bzw. ι -reellen) Garbe, nämlich von $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\vee(-n)$, falls n das Gewicht (bzw. ι -Gewicht) von \mathcal{F} ist: zu $\iota\alpha$ mit $|\iota\alpha| = N(x)^{\frac{n}{2}}$ ist $N(x)^n \cdot \iota\alpha^{-1}$ komplex konjugiert.

Satz 9.3 Sei X eine glatte geometrisch irreduzible Kurve über \mathbb{F}_q . Die Kompositionsfaktoren einer glatten, ι -reellen $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe auf X sind ι -rein.

Wir benutzen:

Lemma 9.4 Sei \mathcal{F} eine glatte ι -reelle $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe auf X und sei ϱ das größte ι -Determinatengewicht von \mathcal{F} . Für jedes $x \in X_0$ und jeden Eigenwert α von F_x auf \mathcal{F} gilt dann $\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha) \leq \varrho$.

Beweis Durch eventuelles Weglassen eines Punktes, den man gerade nicht betrachtet, ist ohne Einschränkung X affin. Die Lefschetz-Formel gibt dann für jede positive ganze Zahl k

$$(9.3.1) \quad \prod_{x \in X_0} \iota \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F}^{\otimes 2k})^{-1} = \frac{\iota \det(1 - FT | H_c^1(\overline{X}, \mathcal{F}^{\otimes 2k}))}{\iota \det(1 - FT | H_c^2(\overline{X}, \mathcal{F}^{\otimes 2k}))}$$

Hierbei ist

$$\iota \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F}^{\otimes 2k})^{-1} = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \iota \text{Tr} F_x^n | \mathcal{F}^{\otimes 2k}\right) \frac{T^{n \cdot \deg(x)}}{n}$$

eine formale Potenzreihe mit nicht-negativen reellen Koeffizienten, da nach Voraussetzung

$$\iota \text{Tr}(F_x^n | \mathcal{F}^{\otimes 2k}) = \iota \text{Tr}(F_x^n | \mathcal{F})^{2k}$$

nicht-negativ reell ist. Nach 7.16 (b) sind die ι -Determinanten-Gewichte von $\mathcal{F}^{\otimes 2k}$ höchstens gleich $2k\varrho$, und nach 8.2 (b) hat also die rechte Seite der Lefschetz-Formel (9.3.1) keinen

Pol für $|T| < q^{-\frac{1}{2}(2k\varrho+2)}$ (d.h., für die reziproken Nullstellen α' des Nenners gilt $\iota\text{-}w_q(\alpha') \leq 2k\varrho + 2$). Nach dem folgenden Lemma hat also auch

$$\iota \det(1 - F_x T^{\deg(x)} | \mathcal{F}^{\otimes 2k})^{-1}$$

keinen Pol für $|T| < q^{\frac{1}{2}(2k\varrho+2)}$. Für einen Eigenwert α von F_x auf \mathcal{F} ist $\iota\alpha^{-2k/\deg(x)}$ ein Pol; es folgt

$$|\iota\alpha|^{2k/\deg(x)} \leq q^{(2k\varrho+2)/2},$$

d.h.,

$$|\iota\alpha| \leq N(x)^{(\varrho+\frac{1}{k})/2}.$$

Da dies für alle k gilt, folgt die Behauptung.

Lemma 9.5 Sei $f_i = \sum_n a_{i,n} T^n$ eine Folge von formalen Potenzreihen, mit konstanten Term 1 und nicht-negativen reellen Koeffizienten. Die Ordnung von $f_i - 1$ gehe gegen unendlich mit i , und es sei $f = \prod_i f_i$. Dann ist der absolute Konvergenzradius für jedes f_i mindestens so groß wie für f . Sind f und die f_i Taylorentwicklungen von meromorphen Funktionen, so gilt

$$\inf\{|z| \mid f(z) = \infty\} \leq \inf\{|z| \mid f_i(z) = \infty\}$$

für jedes i .

Beweis Ist $f = \sum_n a_n T^n$, so folgt die erste Aussage daraus, dass $a_{i,n} \leq a_n$ ist für alle i . Für meromorphe Funktionen sind die angegebenen Infima gerade die absoluten Konvergenzradien.

Beweis von Satz 9.3. Sei \mathcal{F} eine glatte ι -reelle $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -Garbe auf X . Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{F}(\beta)$ die Summe der Kompositionsfaktoren von \mathcal{F} mit ι -Determinantengewicht β und $n(\beta)$ der Rang von $\mathcal{F}(\beta)$. Sei $x \in X_0$, und seien $\alpha_1^\beta, \dots, \alpha_{n(\beta)}^\beta$ die Eigenwerte von F_x auf $\mathcal{F}(\beta)$. Es ist zu zeigen, dass $\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i^\beta) = \beta$ für alle i .

Nach Definition des Determinantengewichts ist

$$(9.3.2) \quad \sum_i \iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i^\beta) = n(\beta)\beta.$$

Sei ohne Einschränkung $\mathcal{F}(\beta) \neq 0$, und N die Summe der $n(\gamma)$ mit $\gamma > \beta$. Nach 7.16 (a) sind die ι -Determinanten-Gewichte der $(N+1)$ -ten äußeren Potenz von $\mathcal{F} \leq \beta + \sum_{\gamma>\beta} n(\gamma)\gamma$.

Da jedes $\alpha_i^\beta \prod_{\gamma>\beta} \prod_{i=1}^{n(\gamma)} \alpha_i^\gamma$ Eigenwert von F_x auf $\Lambda^{N+1}\mathcal{F}$ ist, gilt nach dem obigen Lemma 9.4

$$\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i) + \sum_{\gamma>\beta} \sum_i \iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i^\gamma) \leq \beta + \sum_{\gamma>\beta} n(\gamma)\gamma.$$

Nach der Gleichung (9.3.2) (für jedes $\gamma > \beta$) folgt

$$\iota\text{-}w_{N(x)}(\alpha_i) \leq \beta.$$

Durch Aufsummieren über i muss man die Gleichung (9.3.2) für β erhalten, also muss hier die Gleichheit gelten.

10 Der Formalismus naher und verschwindender Zykel

Um Induktion über Dimension zu benutzen, benutzt Deligne Faserungen $f : X \rightarrow S$ über einer glatten Kurve S , wobei f über einer offenen Menge $U \subseteq S$ glatt ist, und nur an den endlich vielen Punkten $s \in S - U$ Fasern X_s mit (milden) Singularitäten hat. Die Kohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ wird mittels der Grothendieck-Leray-Spektralsequenz

$$H^p(S, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

studiert. Um die Garben $R^q f_* \mathcal{F}$ an den schlechten Stellen $s \in S - U$ zu untersuchen, geht man zum lokalen Ring $\mathcal{O}_{S,s}$ über (der ein diskreter Bewertungsring ist) bzw. zu seiner Henselisierung $\mathcal{O}_{S,s}^h$; dies ist ein henselscher diskreter Bewertungsring.

Ein strikter henselscher diskreter Bewertungsring A ist für die étale Topologie das Analogon der offenen Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ in \mathbb{C} : Es ist $\pi_1(D) = 0$ und $\pi_1(D \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$; entsprechend ist $\pi_1(\text{Spec}(A)) = 0$ und

$$\pi_1(\text{Spec}(A) - \{s\}) = \prod_{\ell \neq \text{char}(k(s))} \mathbb{Z}_\ell,$$

wobei s der abgeschlossene Punkt von $\text{Spec}(A)$ ist. Der Punkt s entspricht also dem Punkt $0 \in D$, und der generische Punkt η entspricht einem "allgemeinen Punkt" $t \in D^* - \{0\}$.

In der klassischen Topologie hat man die Theorie verschwindender Zykel für eine Faserung $f : X \rightarrow D$, mit f glatt auf D^* und eventuell singulärer Faser X_0 über 0 . In der étalen Topologie betrachtet man das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_\eta & \hookrightarrow & X & \longleftarrow & X_s \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \eta & \longrightarrow & \text{Spec}(A) & \longleftarrow & s \end{array}$$

Vorüberlegungen 10.1 Sei $T = \text{Spec } A$ für einen henselschen diskreten Bewertungsring A .

(a) Nach dem Zerlegungssatz gibt es eine Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie $Sh(T_{\text{ét}})$ der étalen Garben auf T und der Kategorie aller Tripel $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi)$, wobei

- (i) \mathcal{F}_0 eine Garbe auf dem abgeschlossenen Punkt $s \xrightarrow{i} T$ ist,
- (ii) \mathcal{F}_1 eine Garbe auf dem generischen Punkt $\eta \xrightarrow{j} T$ ist, und
- (iii) $\varphi : \mathcal{F}_0 \rightarrow i^* j_* \mathcal{F}_1$ ein Morphismus von Garben ist.

Hierbei wird eine Garbe \mathcal{F} auf T auf das Tripel

$$(i^* \mathcal{F}, j^* \mathcal{F}, sp : i^* \mathcal{F} \rightarrow i^* j_* j^* \mathcal{F})$$

abgebildet, wobei man den sogenannten Spezialisierungsmorphismus sp durch Anwenden von i^* auf den Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \rightarrow j_* j^* \mathcal{F}$ erhält.

(b) Dies besitzt die folgende Uminterpretation mittels Galoismoduln: Sei $\overline{k(\eta)}$ ein separabler Abschluss von $k(\eta)$ und $\overline{\eta} = \text{Spec}(\overline{k(\eta)}) \rightarrow T$ der zugehörige geometrische Punkt über η .

Dies definiert einen geometrischen Punkt $\bar{s} \rightarrow T$ über s wie folgt. Sei \tilde{A} der ganze Abschluss von A in $\overline{k(\eta)}$, d.h., $\tilde{T} = \text{Spec}(\tilde{A})$ die Normalisierung von T in $\bar{\eta}$. Dann ist \tilde{A} lokal und der Restklassenkörper eine separabel abgeschlossene Erweiterung von $k(s)$ und definiert einen geometrischen Punkt $\bar{s} \rightarrow T$ über s . Weiter erhält man eine Surjektion

$$G_\eta = \text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta)) \rightarrow G_s = \text{Gal}(k(\bar{s})/k(s));$$

der Kern I heißt die Trägheitsgruppe. Die strikte Henselisierung $\mathcal{O}_{T,\bar{s}}^h$ von T in \bar{s} identifiziert sich mit \tilde{A}^I .

Die Tripel in (a) entsprechen dann Tripeln (M_0, M_1, ϕ) , wobei

- (i) M_0 ein diskreter G_s -Modul,
- (ii) M_1 ein diskreter G_η -Modul, und
- (iii) $\phi : M_0 \rightarrow M_1^I$ ein Morphismus von G_s -Moduln ist.

Der Übergang von den Tripeln in (a) hierzu erfolgt durch Halmbildung, d.h., mittels

$$M_0 = \mathcal{F}_{\bar{s}} = (i^* \mathcal{F})_{\bar{s}} \quad \text{und} \quad M_1 = \mathcal{F}_{\bar{\eta}} = (j^* \mathcal{F})_{\bar{\eta}},$$

wobei man sich überlegt, dass $i^* j_*$ der Fixmodulbildung unter I entspricht.

(c) Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die Komposition

$$\mathcal{F}_{\bar{s}} \xrightarrow{sp} \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^I \hookrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

gerade die Spezialisierungsabbildung der Halme ist, die vom Morphismus

$$\mathcal{O}_{T,\bar{s}}^h \hookrightarrow \mathcal{O}_{T,\bar{\eta}}^h = k(\eta)_s$$

induziert wird (vergl. 2.4). Insbesondere ist \mathcal{F} lokal konstant genau dann, wenn I trivial auf $\mathcal{F}_{\bar{\eta}} = M_1$ operiert und sp ein Isomorphismus ist.

(d) Ist nun $f : X \rightarrow T$ ein Morphismus und \mathcal{F} eine Garbe auf X , so ist also die höhere Bildgarbe $R^i f_* \mathcal{F}$ beschrieben durch das Tripel

$$((R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}}, (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}}, sp : (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}} \rightarrow (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}}^I).$$

Ist f eigentlich, so identifiziert sich dies nach dem eigentlichen Basiswechsel mit einem Tripel

$$(H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}), H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}), sp : H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F})^I),$$

wobei $X_{\bar{s}} = X \times_T \bar{s} = X_s \times_{k(s)} k(\bar{s})$ und $X_{\bar{\eta}} = X \times_T \bar{\eta} = X_\eta \times_{k(\eta)} k(\bar{\eta})$ die geometrischen Fasern von f bei \bar{s} und $\bar{\eta}$ sind.

10.2 Das Hilfsmittel zur Berechnung der Spezialisierungsabbildung ist die allgemeine Theorie der verschwindenden Zykel. Dafür betrachten wir ein kartesisches Diagramm

$$(10.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_s \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ \eta & \longrightarrow & T & \longleftarrow & s, \end{array}$$

wobei zunächst f beliebig von endlichem Typ sei. Sei $k(\bar{\eta})^I \subset L \subset k(\bar{\eta})$ ein beliebiger Zwischenkörper und B der ganze Abschluss von A in L ist, d.h., $\bar{T} = \text{Spec } B$ die Normalisierung von T in $\text{Spec } L$ (in der Literatur werden sowohl $L = K(\bar{\eta})^I$, d.h., $B = O_{T, \bar{s}}^h$, als auch $L = K(\bar{\eta})$, d.h., $B = \tilde{A}$ betrachtet). Ist $\bar{X} = X \times_T \bar{T}$, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$(10.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_{\bar{s}} \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ \bar{\eta} & \longrightarrow & \bar{T} & \longleftarrow & \bar{s} \end{array}$$

welches aus (10.2.1) durch Basiswechsel mit der unteren Zeile hervorgeht, und in dem die beiden Quadrate wieder kartesisch sind.

Definition/Lemma 10.3 Sei Y ein Schema über einem Körper k mit separablem Abschluss \bar{k} , sei $\bar{Y} = Y \times_k \bar{k}$ und $u : G \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$ ein Homomorphismus topologischer Gruppen.

(a) Eine G -Garbe auf \bar{Y} ist eine Garbe \mathcal{F} auf \bar{Y} mit einer stetigen Operation von G , die verträglich ist mit der (Recht-) Operation von $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ auf \bar{Y} ; d.h., für jedes $\sigma \in G$ habe man einen Morphismus

$$\sigma_* : \mathcal{F} \longrightarrow (\text{Spec}(u(\sigma)))_* \mathcal{F},$$

so dass $\tau_* \sigma_* = (\tau \sigma)_*$. Dabei operiere G für jedes quasikompakte étale $U \rightarrow Y$ diskret auf $\mathcal{F}(\bar{U}) = \mathcal{F}((\text{Spec } \sigma)^{-1} \bar{U})$, $\bar{U} = U \times_k \bar{k}$. Sei $\text{Sh}(\bar{Y}, G)$ die Kategorie der G -Garben auf \bar{X} .

(b) Sei $\pi : \bar{Y} \rightarrow Y$ die Projektion. Dann gibt es eine Kategorienäquivalenz (wobei immer Garbe = étale Garbe)

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}(Y) = (\text{Garben auf } Y) & \leftrightarrow & \text{Sh}(\bar{Y}, \text{Gal}(\bar{k}/k)) = (\text{Gal}(\bar{k}/k)\text{-Garben auf } Y) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \pi^* \mathcal{F} \\ (\pi_* \mathcal{G})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} & \leftarrow & \mathcal{G}, \end{array}$$

Für den Beweis von (b) siehe SGA7 XIII 1.1. Wir bemerken nur, dass der Morphismus

$$\sigma_* : \pi^* \mathcal{F} \longrightarrow (\text{Spec } \sigma)_* \pi^* \mathcal{F} \stackrel{(1)}{=} (\text{Spec } \sigma)_* (\text{Spec } \sigma)^* \pi^* \mathcal{F}$$

der Adjunktionsmorphismus ist ((1) kommt daher, dass $\pi = \pi \text{Spec } \sigma$ ist).

Dies erlaubt die Definition der folgenden Kategorie und Funktoren.

Definition 10.4 Sei $\text{Sh}(X_{\bar{s}} \times_s T)$ die abelsche Kategorie der Tripel $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi)$, wobei

- (i) \mathcal{F}_0 eine G_s -Garbe auf $X_{\bar{s}}$,
- (ii) \mathcal{F}_1 eine G_η -Garbe auf $X_{\bar{s}}$ (bezüglich $G_\eta \rightarrow G_s$), und
- (iii) $\varphi : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1$ ein G_η -äquivarianter Morphismus ist.

Definition 10.5 Seien $\pi : \bar{X} \rightarrow X$, $\pi_0 : X_{\bar{s}} \rightarrow X_s$ und $\pi_1 : X_{\bar{\eta}} \rightarrow X_\eta$ die Projektionen. Definiere dann

$$\begin{array}{lcl} \Psi_{\bar{s}} : \text{Sh}(X_s) & \longrightarrow & \text{Sh}(X_{\bar{s}}, G_s) \\ \Psi_{\bar{\eta}} : \text{Sh}(X_\eta) & \longrightarrow & \text{Sh}(X_{\bar{s}}, G_\eta) \quad (\text{Operation bezüglich } G_\eta \rightarrow G_s) \\ \Psi : \text{Sh}(X) & \longrightarrow & \text{Sh}(X_{\bar{s}} \times_s T) \end{array}$$

durch

$$\begin{aligned}
\Psi_{\bar{s}}\mathcal{F} &= \pi_0^*\mathcal{F} \\
\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F} &= \bar{i}^*\bar{j}_*\pi_1^*\mathcal{F} \\
\Psi\mathcal{F} &= (\bar{i}^*\pi^*\mathcal{F}, \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{j}^*\pi^*\mathcal{F}, \bar{i}^*\pi^*\mathcal{F} \xrightarrow{\bar{i}^*ad} \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{j}^*\pi^*\mathcal{F}) \\
&= (\pi_0^*i^*\mathcal{F}, \bar{i}^*\bar{j}_*\bar{j}^*\pi_1^*j^*\mathcal{F}, \varphi_F = \bar{i}^*ad) \\
&= (\Psi_{\bar{s}}i^*\mathcal{F}, \Psi_{\bar{\eta}}j^*\mathcal{F}, \varphi_F).
\end{aligned}$$

Diese Funktoren sind additiv, linksexakt und besitzen Rechtsableitungen $R^i\Psi_{\bar{s}}$, $R^i\Psi_{\bar{\eta}}$ und $R^i\Psi$, bzw. $R\Psi_{\bar{s}}$, $R\Psi_{\bar{\eta}}$ und $R\Psi$ in den derivierten Kategorien: Ist $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung, so wird $R\Psi\mathcal{F}$ durch ΨI^\bullet repräsentiert (eindeutig bis auf eindeutige Homotopie), und es ist $R^i\Psi\mathcal{F} = H^i(\Psi I^\bullet)$ (i -tes Homologieobjekt, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus), entsprechend hat man $R^i\Psi_{\bar{\eta}}$ und $R\Psi_{\bar{\eta}}$, während $\Psi_{\bar{s}}$ exakt ist und keine höheren Ableitungen hat.

Einen Komplex in $Sh(X_{\bar{s}} \times_s T)$ kann man deuten als ein Objekt $(\mathcal{F}_0^\bullet, \mathcal{F}_1^\bullet, \varphi)$, wobei \mathcal{F}_0^\bullet ein Komplex in $Sh(X_{\bar{s}}, G_s)$ ist, \mathcal{F}_1^\bullet ein Komplex in $Sh(X_{\bar{s}}, G_\eta)$ und $\varphi : \mathcal{F}_0^\bullet \rightarrow \mathcal{F}_1^\bullet$ ein äquivarianter Morphismus von Komplexen ist. Definieren wir den Funktor

$$sp^* : Sh(X_{\bar{s}}, G_s) \longrightarrow Sh(X_{\bar{s}}, G_\eta)$$

durch $sp^*\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$, mit G_η -Operation via $G_\eta \rightarrow G_s$, so können wir φ auch als Morphismus

$$\varphi : sp^*\mathcal{F}_0^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}_1^\bullet$$

von Komplexen in $Sh(X_{\bar{s}}, G_\eta)$ deuten. Jedem $(\mathcal{F}_0^\bullet, \mathcal{F}_1^\bullet, \varphi)$ kann man dann funktoriell eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1^\bullet \rightarrow Cone(\varphi) \rightarrow sp^*\mathcal{F}_0^\bullet[1] \rightarrow 0$$

zuordnen, wobei $Cone(\varphi)$ der Kegel von φ ist (siehe etwa [Mi]S.174,167). Setzen wir

$$\Phi(\mathcal{F}_0^\bullet, \mathcal{F}_1^\bullet, \varphi) = Cone(\varphi),$$

so führt Φ Quasiisomorphismen in Quasiisomorphismen über, und für eine Garbe \mathcal{F} mit injektiver Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet$ ist

$$R\Phi\mathcal{F} := \Phi R\Psi\mathcal{F} \quad (= \Phi\Psi I^\bullet)$$

eindeutig bis auf eindeutigen Quasiisomorphismus, also wohldefiniert in der derivierten Kategorie von $S(X_{\bar{s}}, G_\eta)$.

Definition 10.6 $R\Phi\mathcal{F}$ heisst der Komplex der verschwindenden Zykel. Setze

$$R^i\Phi\mathcal{F} = H^i(R\Phi\mathcal{F}) \quad (= H^i(\Phi\Psi I^\bullet))$$

für die i -te Garbe der verschwindenden Zykel von \mathcal{F} .

Nach Konstruktion haben wir funktoriell für jedes \mathcal{F} in $Sh(X_{et})$ ein ausgezeichnetes Dreieck von Komplexen in $Sh(X_{\bar{s}}, G_\eta)$

$$(10.6.1) \quad sp^*i^*\mathcal{F} \longrightarrow R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F} \longrightarrow R\Phi\mathcal{F} \longrightarrow sp^*i^*\mathcal{F}[1],$$

welches wohldefiniert in der derivierten Kategorie von $Sh(X_{\bar{s}}, G_\eta)$ ist. Hierbei hätten wir eigentlich $sp^*\Psi_{\bar{s}}i^*\mathcal{F}$ schreiben müssen, identifizieren aber im folgenden $Sh(X_s)$ und $Sh(X_{\bar{s}}, G_s)$

via $\Psi_{\bar{s}}$ und schreiben auch sp^* für $sp^*\Psi_{\bar{s}}$. Für eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet$ wird (10.6.1) durch

$$\bar{i}^* I^\bullet \xrightarrow{\bar{i}^* ad} \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{j}^* I^\bullet \longrightarrow Cone(\bar{i}^* ad) \longrightarrow$$

repräsentiert, wobei wir hier π^* unterdrückt haben. Wir lassen π^* , π_0^* und π_1^* auch im Folgenden oft weg. Beachte, dass $\bar{i}^* \mathcal{F}$ quasiisomorph zu $\bar{i}^* I^\bullet$ ist.

Etwas ungenauer können wir (10.6.1) auch schreiben als

$$\bar{i}^* \mathcal{F} \longrightarrow \bar{i}^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{F} \longrightarrow R\Phi\mathcal{F} \longrightarrow .$$

Bei dieser Schreibweise ist nicht so deutlich, dass es sich um Komplexe von G_η -Garben handelt; außerdem lässt sich $R\Phi\mathcal{F}$ hierdurch nicht definieren: beachte, dass die Kegelbildung nicht wohldefiniert in der derivierten Kategorie ist.

10.7 Im Formalismus verschwindender Zykel wird die Operation der Trägheitsgruppe I durch die sogenannte Variation beschrieben: Ist $\sigma \in I$, so faktorisiert der Endomorphismus $\sigma - 1$ von $R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F}$ wegen der trivialen Operation von I auf $sp^*i^*\mathcal{F}$ über $R\Phi\mathcal{F}$, und wir erhalten, funktoriell in \mathcal{F} , ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$(10.7.1) \quad \begin{array}{ccccccc} sp^*i^*\mathcal{F} & \longrightarrow & R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F} & \longrightarrow & R\Phi\mathcal{F} & \longrightarrow & \\ \downarrow 0 & & \sigma-1 \downarrow Var(\sigma) & \swarrow & \downarrow \sigma-1 & & \\ sp^*i^*\mathcal{F} & \longrightarrow & R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F} & \longrightarrow & R\Phi\mathcal{F} & \longrightarrow & . \end{array}$$

Der induzierte Morphismus

$$Var(\sigma) : R\Phi\mathcal{F} \rightarrow R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F}$$

(und die davon in der Kohomologie induzierte Abbildung) heißt die Variation von σ . Wegen der trivialen Formel

$$(\sigma\tau - 1) = (\sigma - 1) + (\tau - 1) + (\sigma - 1)(\tau - 1)$$

hat man dabei

$$(10.7.2) \quad \begin{aligned} Var(\sigma\tau) &= Var(\sigma) + Var(\tau) + (\sigma - 1)Var(\tau) \\ &= Var(\sigma) + Var(\tau) + Var(\sigma)(\tau - 1) . \end{aligned}$$

Die Theorie verschwindender Zykel hat die folgende Anwendung: Durch Bildung der Kohomologie auf $X_{\bar{s}}$ bekommt man aus (10.6.1) eine lange exakte Sequenz von G_η -Moduln

$$(10.8.1) \quad \rightarrow H^\nu(X_{\bar{s}}, i^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma} H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F}) \rightarrow H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Phi\mathcal{F}) \rightarrow H^{\nu+1}(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots .$$

Weiter haben wir das folgende Resultat.

Lemma 10.8 (i) Es gibt kanonische Homomorphismen

$$(a) \Psi : H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^*\mathcal{F}) \rightarrow H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F})$$

$$(b) \Psi' : H_c^\nu(X_{\bar{s}}, R\bar{\Psi}_{\bar{\eta}}\mathcal{F}) \rightarrow H_c^\nu(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^*\mathcal{F}) \text{ für alle } \nu \in \mathbb{Z}.$$

(ii) (a): Ψ ist in kontravarianter Weise funktoriell für offene Immersionen $\mu : U \hookrightarrow X$, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\Psi_X} & H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F}) \\ \downarrow \mu^* & & \downarrow \mu^* \\ H^\nu(U_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{F}|_U) & \xrightarrow{\Psi_U} & H^\nu(U_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F}|_U) \end{array}$$

ist kommutativ.

(b): Ψ' ist in kovarianter Weise funktoriell, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_c^\nu(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^\nu(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{F}) \\ \uparrow \mu_! & & \uparrow \mu_! \\ H_c^\nu(U_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F}|_U) & \longrightarrow & H_c^\nu(U_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{F}|_U) \end{array}$$

ist kommutativ.

(iii) Ist f eigentlich und \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf X , so sind (a) und (b) zueinander inverse Isomorphismen.

(iv) Die Verknüpfung

$$H^\nu(X_{\bar{s}}, \bar{i}^* \mathcal{F}) \xrightarrow{sp} H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\Psi} H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F})$$

ist gleich der Abbildung γ in (10.8.1).

Beweis (i) (a): Für jede Garbe \mathcal{G} auf $X_{\bar{\eta}}$ definiere die Komposition

$$(10.8.2) \quad \Psi : H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{G}) \xrightarrow{(1)} H^\nu(\bar{X}, R\bar{j}_* \mathcal{G}) \xrightarrow{(2)} H^\nu(X_{\bar{s}}, \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G})$$

Hierbei ist (1) ein Isomorphismus (Komposition von derivierter Funktoren) und (2) ist der Basiswechselformismus, induziert vom Basiswechselformismus

$$(10.8.3) \quad \bar{i}^* Rf_* R\bar{j}_* \mathcal{G} \rightarrow R(f_{\bar{s}})_* \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G}.$$

Ist f eigentlich und \mathcal{G} Torsionsgarbe, so ist (10.8.3), also auch (2) und damit Ψ ein Isomorphismus. Für $\mathcal{G} = \bar{j}^* \mathcal{F}$ erhalten wir (i)(a), da $R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F} = \bar{i}^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{F}$.

(i) (b): Sei $\mu : X \hookrightarrow X'$ eine offene Immersion in ein eigentliches S -Schema. Für jede Garbe \mathcal{G} auf $X_{\bar{\eta}}$ ist dann per Definition

$$H_c^\nu(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{G}) = H^\nu(X'_{\bar{\eta}}, (\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}).$$

Weiter haben wir den eben definierten Isomorphismus für das eigentliche X'

$$\Psi : H^\nu(X'_{\bar{\eta}}, (\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^\nu(X'_{\bar{s}}, (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}).$$

Schließlich definieren wir einen kanonischen Homomorphismus

$$\Psi_c : H_c^\nu(X_{\bar{s}}, \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G}) \rightarrow H^\nu(X'_{\bar{s}}(\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}).$$

Dieser wird erhalten durch einen Morphismus

$$(10.8.4) \quad (\mu_{\bar{s}})_! \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G} \rightarrow (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}$$

den wir durch folgende Adjunktionen bekommen. Da $(\mu_{\bar{s}})_!$ linksadjungiert zu $\mu_{\bar{s}}^*$ ist, entspricht (10.8.4) einem Morphismus

$$\bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G} \rightarrow \mu_{\bar{s}}^* (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G} = \bar{i}^* \mu^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}$$

(beachte $\mu_{\bar{i}} = \bar{i}' \mu_{\bar{s}}$). Dieser entsteht durch Anwendung von \bar{i}^* aus dem Isomorphismus

$$R\bar{j}_* \mathcal{G} = \mu^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G} = R\bar{j}_* \mu_{\bar{\eta}}^*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G}$$

(beachte, dass $\mu_{\bar{\eta}}^*(\mu_{\bar{\eta}})_! = id$).

Der Morphismus

$$\Psi' : H_c^\nu(X_{\bar{s}}, \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G}) \rightarrow H_c^\nu(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{G})$$

ist jetzt definiert als die Komposition $\Psi^{-1} \Psi_c$. Für $\mathcal{G} = \bar{j}^* \mathcal{F}$ erhalten wir (i) (b). Ist X bereits eigentlich, so ist Ψ_c die Identität und $\Psi' = \Psi^{-1}$, dies zeigt (iii).

Behauptung (iv) folgt unmittelbar aus der Definition des Basiswechselformismus.

Behauptung (ii) (a) folgt, da der Basiswechselformismus (10.8.3) mit Restriktion auf offene Unterschema verträglich ist.

Sei für (ii) (b) eine weitere offene Immersion $\rho : U \hookrightarrow X$ gegeben. Die Kovarianz für ρ bezüglich des Isomorphismus Ψ folgt daraus, dass Ψ kovariant für den Garbenmorphismus $(\rho_{\bar{\eta}})_!(\rho_{\bar{\eta}})_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ist. Für die Kovarianz von Ψ_c müssen wir ein geeignetes kommutatives Diagramm

$$(10.8.5) \quad \begin{array}{ccc} (\mu_{\bar{s}})_! \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G} & \longrightarrow & (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_! \mathcal{G} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mu_{\bar{s}})_!(\rho_{\bar{s}})_!(\bar{i}_U)^* R(\bar{j}_U)_*(\rho_{\bar{\eta}})_* \mathcal{G} & \longrightarrow & (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})_!(\rho_{\bar{\eta}})_! \rho_{\bar{\eta}}^* \mathcal{G}, \end{array}$$

konstruieren, mit den Bezeichnungen aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}_U} & U & \xleftarrow{\bar{i}_U} & U_{\bar{s}} \\ \downarrow \rho_{\bar{\eta}} & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho_{\bar{s}} \\ X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & X & \xleftarrow{\bar{i}} & X_{\bar{s}} \\ \downarrow \mu_{\bar{\eta}} & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu_{\bar{s}} \\ X'_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}'} & X' & \xleftarrow{\bar{i}'} & X'_{\bar{s}}. \end{array}$$

Hierfür bemerken wir, dass wir einen kanonischen Isomorphismus von Funktoren

$$\varepsilon_1 : (\rho_{\bar{s}})_!(\bar{i}_U)^* \xrightarrow{\sim} (\bar{i}')^* \rho_!$$

haben, sowie einen kanonischen Morphismus von Funktoren

$$(10.8.6) \quad \varepsilon_2 : \rho_! R(\bar{j}_U)_* \longrightarrow R\bar{j}_*(\rho_{\bar{\eta}})_!,$$

der per Adjuktion dem Isomorphismus

$$R(\bar{j}_U)_* = R(\bar{j}_U)_*(\rho_{\bar{\eta}})^*(\rho_{\bar{\eta}})! = \rho^* R\bar{j}_*(\rho_{\bar{\eta}})!$$

entspricht. Wir definieren dann (10.8.5) durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & (\mu_{\bar{s}})! \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathcal{G} & \longrightarrow (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})! \mathcal{G} \\ & \uparrow ad & \uparrow ad \\ (\mu_{\bar{s}})! (\rho_{\bar{s}})! (\bar{i}_U)^* R(\bar{j}_U)_*(\rho_{\bar{\eta}})^* \mathcal{G} & \xrightarrow{\varepsilon} (\mu_{\bar{s}})! \bar{i}^* R\bar{j}_*(\rho_{\bar{\eta}})! (\rho_{\bar{\eta}})^* \mathcal{G} & \longrightarrow (\bar{i}')^* R(\bar{j}')_*(\mu_{\bar{\eta}})! (\rho_{\bar{\eta}})! (\rho_{\bar{\eta}})^* \mathcal{G} . \end{array}$$

Hier entsteht das kommutative Rechteck aus der Funktorialität von (10.8.4) für den (durch Adjuktion erhaltenen) Garbenmorphismus $ad: (\rho_{\bar{\eta}})! (\rho_{\bar{\eta}})^* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, ε ist von ε_1 und ε_2 induziert, und η macht das Diagramm kommutativ.

Ist X eigentlich über T , so wird (10.8.1) also nach Lemma 10.8 zu einer exakten Sequenz

$$(10.8.7) \quad \dots \rightarrow H^\nu(X_{\bar{s}}, i^* \mathcal{F}) \xrightarrow{sp} H^\nu(X_{\bar{\eta}}, j^* \mathcal{F}) \rightarrow H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Phi \mathcal{F}) \rightarrow H^{\nu+1}(X_{\bar{s}}, i^* \mathcal{F}) \rightarrow \dots ,$$

indem wir $H^\nu(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \mathcal{F})$ mittels Ψ durch $H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F})$ ersetzen. Die Betrachtung von sp wird also auf die Berechnung der $R\Phi \mathcal{F}$ zurückgeführt.

Dies ist ein lokales Problem, und zwar in dem folgenden präzisen Sinne: für einen geometrischen Punkt \bar{a} von $X_{\bar{s}}$ hängt der Halm $(R\Phi \mathcal{F})_{\bar{a}}$ in \bar{a} nur von der strikten Henselisierung $O_{X, \bar{a}}^h$ von X in \bar{a} ab, da dies für $\mathcal{F}_{\bar{a}}$ und $(R\bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{F})_{\bar{a}}$ gilt, und man ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathcal{F}_{\bar{a}} \longrightarrow (R\bar{j}_* \bar{j}^* \mathcal{F})_{\bar{a}} \longrightarrow (R\Phi \mathcal{F})_{\bar{a}} \longrightarrow$$

hat. Nach dem nächsten Lemma ist $R\Phi \mathcal{F}$ nur in den singulären Punkten von f konzentriert, falls \mathcal{F} lokal-konstant auf dem glatten Ort von f ist.

Lemma 10.9 Ist f glatt und \mathcal{F} lokal-konstant, so ist $R\Phi \mathcal{F} = 0$.

Beweis Da man das Verschwinden auf étalen Umgebungen testen kann, ist ohne Einschränkung $\mathcal{F} = \Lambda$ konstant. Es ist zu zeigen, dass

$$(10.9.1) \quad \bar{i}^* \Lambda \xrightarrow{\bar{i}^* ad} \bar{i}^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \Lambda$$

ein Quasiisomorphismus ist. Wir betrachten dazu das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & X_{\bar{s}} \\ f_{\bar{\eta}} \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_{\bar{s}} \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{T} & \xleftarrow{\bar{i}} & \bar{s} . \end{array}$$

Zunächst bemerken wir, dass die kanonischen Morphismen

$$\Lambda_{\bar{T}} \xrightarrow{ad} \bar{j}_* \bar{j}^* \Lambda_{\bar{T}} \longrightarrow R\bar{j}_* \bar{j}^* \Lambda_{\bar{T}}$$

Isomorphismen nach Anwendung von \bar{i}^* werden, da für $\pi_1 : \bar{\eta} \rightarrow \eta$ gilt:

$$(R^\nu \bar{j}_* \Lambda)_{\bar{s}} = (R^\nu j_* \pi_{1*} \Lambda)_{\bar{s}} = H^\nu(I, \text{Ind}_I(\Lambda)),$$

wobei $\text{Ind}_I(\Lambda)$ den induzierten Modul bezeichnet. Weiter ist bekanntlich ein induzierter Modul kohomologisch trivial, also $H^\nu(I, \text{Ind}_I(\Lambda)) = 0$ für $\nu > 0$, während $H^0(I, \text{Ind}_I(\Lambda)) = \Lambda$.

Damit folgt die Behauptung von 10.9 durch Anwenden von \bar{i}^* auf den Basiswechselformismus

$$f^* R \bar{j}_* \Lambda_{\bar{\eta}} \longrightarrow R \bar{j}_* f_{\bar{\eta}}^* \Lambda_{\bar{\eta}} = R \bar{j}_* \bar{j}^* \Lambda_{\bar{X}},$$

denn letzterer ist ein Quasiisomorphismus nach dem glatten Basiswechselsatz, an den wir jetzt erinnern:

KOH 14 Glatter Basiswechsel: Sei

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y' & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm mit quasi-kompaktem π und glattem f . Ist \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf X , deren Torsion prim ist zu $\text{char}(X)$ (d.h., für alle $x \in X$ ist $\text{char}(k(x)) = 0$ oder die Multiplikation mit $\text{char}(k(x))$ ein Isomorphismus auf \mathcal{F}), so ist der Basiswechselformismus

$$f^* R^i \pi_* \mathcal{F} \longrightarrow R^i \pi'_* f'^* \mathcal{F}$$

ein Isomorphismus für alle $i \geq 0$.

Für den Beweis siehe etwa [Mi] VI §4: Im Beweis von Lemma 10.9 ist $f = f$ und $\pi = \bar{j}$.

11 Kohomologie von affinen und projektiven Räumen und Reinheit

In diesem Kapitel leiten wir einige wichtige und von Deligne benötigte Sätze aus dem glatten Basiswechsel ab.

Satz 11.1 (Homotopie-Invarianz) Sei S ein lokal noethersches Schema und \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf S , deren Torsion prim zu den Charakteristiken auf S sind (Ist $U \rightarrow S$ étale und $a \in \mathcal{F}(U)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot a = 0$, so ist m invertierbar auf S , d.h., in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, d.h., in $k(s)$ für jedes $s \in S$). Für $\pi : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow S$ ist dann

$$\pi^* : H^i(S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathbb{A}_S^1, \pi^* \mathcal{F})$$

für alle $i \geq 0$ ein Isomorphismus.

(Durch Iteration erhält man hieraus $H^i(S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathbb{A}_S^n, \mathcal{F})$ für alle $i \geq 0$).

Beweis: Durch Betrachtung der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q \pi_* \pi^* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{A}_S^1, \pi^* \mathcal{F})$$

genügt es zu zeigen:

- (i) $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* \mathcal{F}$,
- (ii) $R^\nu \pi_* \pi^* \mathcal{F} = 0$ für $\nu > 0$ (d.h., $\mathcal{F} \rightarrow R\pi_* \pi^* \mathcal{F}$ ist ein Quasiisomorphismus).

Beweis von (i) und (ii): Es genügt, die für eine konstante konstruierbare Garbe \mathcal{F} zu zeigen, also für \mathbb{Z}/r mit r invertierbar auf S . Weiter gilt die Aussage, wenn sie für die Henselisierungen in allen Punkten von S gilt. Wir führen Induktion über die Dimension von S . Sei $S = \text{Spec}(R)$ für einen reduzierten strikt Henselschen Ring mit abgeschlossenem Punkt s , und sei $U = S \setminus \{s\}$. Für $\dim(S) = 0$ ist $R = k$ ein separabler abgeschlossener Körper, und wir erhalten, da r invertierbar in k ist:

$$\begin{aligned} H^0(A_k^1, \mathbb{Z}/r) &= \mathbb{Z}/r, \\ H^1(A_k^1, \mathbb{Z}/r) &\cong H^1(A_k^1, \mu_r) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(A_k^1)[r] = 0, \\ H^\nu(A_k^1, \mathbb{Z}/r) &= 0 \quad \text{für } \nu > 1 \quad \text{schwacher Lefschetz.} \end{aligned}$$

Für $\dim(S) > 0$ ist $\dim(U) < \dim(S)$ und wir können annehmen, dass die Aussage bereits für $U \xrightarrow{j} S$ bewiesen ist. In dem ausgezeichneten Dreieck

$$(11.1.1) \quad \mathbb{Z}/r \rightarrow Rj_* j^* \mathbb{Z}/r \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow$$

ist \mathcal{G} in s konzentriert, und damit ist $\mathcal{G} \rightarrow R\pi_* \pi^* \mathcal{G}$ ein Quasiisomorphismus. Es reicht zu zeigen, dass

$$(11.1.2) \quad Rj_* j^* \mathbb{Z}/r \rightarrow R\pi_* \pi^* Rj_* j^* \mathbb{Z}/r$$

ein Quasiisomorphismus ist, dann folgt die Behauptung wegen (11.1.1) auch für \mathbb{Z}/r . Aber (11.1.2) ist die Komposition von

$$Rj_* j^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim (1)} Rj_* R\pi_* \pi'^* j^* \mathcal{F} = R\pi'_* Rj'_* \pi'^* j^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim (2)} R\pi_* \pi^* Rj_* j^* \mathcal{F}$$

($\mathcal{F} = \mathbb{Z}/r$) für das kartesische Diagramm

$$(11.1.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_U^1 & \xrightarrow{j'} & \mathbb{A}_S^1 \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{j} & S. \end{array}$$

Dabei ist (1) ein Quasiisomorphismus durch Gültigkeit der Behauptung auf U , und (2) ist ein Quasiisomorphismus nach dem glatten Basiswechsel für (11.1.3) (glatter Morphismus = p , Strukturmorphismus = j).

Wir betrachten nun projektive Räume.

Satz 11.2 Sei $q : P = \mathbb{P}_S^m \rightarrow S$ der m -dimensionale projektive Raum über dem Schema S , und sei $r \in \mathbb{N}$ invertierbar auf S . Es gibt kanonische Isomorphismen

$$R^i q_* \mathbb{Z}/r \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/r(-j) & , \quad i = 2j \text{ gerade}, 0 \leq i \leq 2m, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Genauer gilt für $m \geq 1$:

(i) $R^2 q_* \mathbb{Z}/r \cong \mathbb{Z}/r(-1)$, und

(ii) das Cupprodukt induziert einen Isomorphismus $(R^2 q_* \mathbb{Z}/r)^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} R^{2j} q_* \mathbb{Z}/r$ für $j \leq m$.

Beweis Die Kummersequenz $0 \rightarrow \mu_r \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{r} \mathbb{G}_m \rightarrow 0$ liefert ein kanonisches Element $\eta \in H^2(\mathbb{P}_S^m, \mu_r)$, das Bild der Klasse des kanonischen \mathcal{O}_P -Moduls $\mathcal{O}(1)$ unter dem Verbindungsmorphismus

$$Pic(P) = H^1(P, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\delta} H^2(P, \mu_r).$$

Bezeichne mit η auch das Bild unter dem kanonischen Morphismus (beachte, dass $R^2 q_* \mu_r$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe $U \mapsto H^2(\mathbb{P}_U^m, \mu_r)$ ist)

$$H^2(P, \mu_r) \rightarrow H^0(S, R^2 q_* \mu_r).$$

Wir behaupten, dass $R^2 q_* \mu_r \cong \mathbb{Z}/r$, mit Basis η und $R^i q_* \mathbb{Z}/r = 0$ für i ungerade oder $i > 2m$. Nach dem eigentlichen Basiswechsel genügt es, dies auf den Fasern von q zu beweisen, d.h., für $S = \text{Spec } k$ separabel abgeschlossen. Wir haben dann eine Zerlegung

$$H = \mathbb{P}_k^{m-1} \xrightarrow{i} \mathbb{P}_k^m \xleftarrow{j} \mathbb{A}_k^m = \mathbb{P}_k^m - H,$$

wobei eine Hyperebene im \mathbb{P}_k^m ist. Die lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_c^\nu(\mathbb{A}_k^m) \rightarrow H^\nu(\mathbb{P}_k^m) \xrightarrow{i^*} H^\nu(\mathbb{P}_k^{m-1}) \rightarrow H_c^{\nu+1}(\mathbb{A}_k^m) \rightarrow \dots$$

(konstante Koeffizienten) und die Tatsache, dass kanonisch

$$H_c^\nu(\mathbb{A}_k^m) \cong H^{2m-\nu}(\mathbb{A}_k^m, \mathbb{Z}/r(m))^\vee = \begin{cases} 0 & , \quad \nu \neq 2m \\ \mathbb{Z}/r(-m) & , \quad \nu = 2m \end{cases}$$

nach Poincaré-Dualität und Satz 11.1 ist, zeigen durch Induktion

$$H^2(\mathbb{P}_k^m, \mu_r) \cong \mathbb{Z}/r, \text{ mit Basis } \eta,$$

$$H^i(\mathbb{P}_k^m) = \begin{cases} 0 & , \quad i \text{ ungerade oder } i > 0, \\ \mathbb{Z}/r(-j) & , \quad 0 \leq i = 2j \leq 2m. \end{cases}$$

Um (ii) zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $H^{2m}(\mathbb{P}_k^m, \mathbb{Z}/r(m))$ von η^m erzeugt wird. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\text{tr}(\eta^m) = \text{deg}(\eta^m) = 1$ ist.

Wir kommen nun zur sogenannten Reinheit.

KOH 15= Satz 11.3 (Reinheit): Sei S ein Schema und (Y, X) ein glattes S -Paar der Kodimension c , d.h., man hat ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & & S \end{array}$$

wobei f und g glatt sind, und i eine abgeschlossene Immersion derart, dass die geometrischen Fasern $Y_{\bar{s}} \rightarrow X_{\bar{s}}$ für alle $s \in S$ konstante Kodimension c haben. Sei \mathcal{F} eine lokal konstante konstruierbare \mathbb{Z}/r -Garbe, r invertierbar auf S . Dann gilt

$$R^\nu i^! \mathcal{F} = \begin{cases} 0 & \nu \neq 2c, \\ i^* \mathcal{F} \otimes R^{2c} i^! \mathbb{Z}/r & , \quad \nu = 2c. \end{cases}$$

Weiter ist $R^{2c} i^! \mathbb{Z}/r$ (étale) lokal isomorph zu $\mathbb{Z}/r(-c)$ und verträglich mit Basiswechsel auf S .

Äquivalent: Sei $j : U \hookrightarrow X$ das offene Komplement von Y , dann ist $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_* j^* \mathcal{F}$, $R^i j_* j^* \mathcal{F} = 0$ für $i \neq 0, 2c - 1$, und $i^* R^{2c-1} j_* j^* \mathcal{F}$ lokal isomorph zu $i^* \mathcal{F}(-c)$, verträglich mit Basiswechsel auf S .

Beweis Die Äquivalenz der Bedingungen folgt aus dem ausgezeichneten Dreieck

$$(11.3.1) \quad i_* Ri^! \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Rj_* j^* \mathcal{F} \rightarrow .$$

Wir zeigen die zweite Version. Die Behauptung ist lokal auf X für die étale Topologie, deswegen ist ohne Einschränkung $\mathcal{F} = \Lambda$ konstant und (Y, X) das glatte S -Paar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_S^{m-c} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{A}_S^m \\ & \searrow & \swarrow \\ & & S. \end{array}$$

Durch Induktion genügt es weiter, den Fall $c = 1$ zu betrachten, und dann kann man als Basis \mathbb{A}_S^{m-1} nehmen, d.h., ohne Einschränkung betrachten wir $S \hookrightarrow \mathbb{A}_S^1$ (den 0-Schnitt). Genauso können wir den Nullschnitt $S \hookrightarrow \mathbb{P}_S^1$ betrachten (beachte, dass für $i : S \xrightarrow{i'} \mathbb{A}_S^1 \xrightarrow{j'} \mathbb{P}_S^1$ gilt: $i' = (i')^!(j')^*$), d.h., wir haben die Aussage für das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y = S & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_S^1 & \xleftarrow{j} & \mathbb{A}_S^1 = U \\ & \searrow & \downarrow q & \swarrow p & \\ & & S & & \end{array}$$

zu zeigen.

Dazu betrachten wir die Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{s,t} = R^s q_* R^t j_* \Lambda \Rightarrow R^{s+t} p_* \Lambda.$$

Für $t > 0$ ist $R^t j_* \Lambda$ in S konzentriert, da dann $j^* R^t j_* \Lambda = 0$ ist (es ist $j^* R j_* \cong \Lambda$). Für $t = 0$ behaupten wir, dass $j_* \Lambda = \Lambda$ ist. Dies kann in den Halmen in geometrischen Punkten \bar{x} von X nachgeprüft werden. Für \bar{x} über U ist die Behauptung klar; sei also \bar{x} über S und $\tilde{X} = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^h$ die strikte Henselisierung von X in x . Dann ist bekanntlich

$$(j_* \Lambda)_{\bar{x}} = H^0(U \times_X \tilde{X}, \Lambda),$$

und es ist zu zeigen, dass $U \times_X \tilde{X}$ zusammenhängend ist. Da wir in \bar{x} henselisiert haben, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \text{Spec}(A)$ affin ist, und die Situation

$$S \xrightarrow{i} A_S^1 = \text{Spec}(A[T]) \xleftarrow{j} \mathbb{G}_{m,S} = \text{Spec}(A[T, T^{-1}])$$

betrachten. Dann ist $U \times_X \tilde{X} = \text{Spec}(R[T, T^{-1}])$, wobei $R = \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^h$ ist und T auch das Bild von T in R bezeichnet. Da T Nichtnullteiler in R ist, ist $D(T) = \text{Spec}(R[T, T^{-1}])$ dicht in $\text{Spec}(R)$ (Ist $\emptyset \neq D(f) = \text{Spec} R_f$ eine Standard-affine Menge, so ist fT nicht nilpotent, also $\emptyset \neq D(fT) = D(f) \cap D(T)$). Da R zusammenhängend ist, gilt dies also auch für $R[T, T^{-1}]$.

In der obigen Spektralsequenz gilt also $R^s q_* R^t j_* \Lambda = 0$ für $s > 0$ und $t > 0$, da $R^s q_* i_* \mathcal{F} = R^s id_* \mathcal{F} = 0$ für $s > 0$ und jede Garbe \mathcal{F} auf S . Da weiter $R^{s+t} p_* \Lambda = 0$ für $s + t > 0$ nach Satz 10.1, folgt

$$q_* R^t j_* \Lambda \xrightarrow[\sim]{d_{t+1}^{0,t}} R^{t+1} q_*(j_* \Lambda) = R^{t+1} q_* \Lambda$$

für $t \geq 1$. Wegen $R^t j_* \Lambda \xrightarrow{\sim} i_* i^* R^t j_* \Lambda$ ($t \geq 1$) folgt hieraus

$$i^* R^t j_* \Lambda \xrightarrow{\sim} R^{t+1} q_* \Lambda \cong \begin{cases} \Lambda(-1) & t = 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

nach Satz 11.2, und damit die Behauptung – die Basiswechseleigenschaft folgt daraus, dass $R^t j_* \Lambda$ universell (d.h., in einer beliebigen durch Basiswechsel erhaltenen Situation $U' \hookrightarrow X'$) lokal konstruierbar ist (vergleiche [Mi] VI Beweis von 2.3, V 1.7).

Bemerkung 11.4 Ist in der Situation von 11.3 $S = \text{Spec } k$ für einen Körper k , so kann man zeigen, dass kanonisch

$$R^{2c} i' \Lambda \cong \Lambda(-c)$$

ist. Dies liefert einen kanonischen Isomorphismus $\Lambda \xrightarrow{\sim} R^{2c} i' \Lambda(c)$, bzw. ein kanonisches Element in $H^0(Y, R^{2c} i' \Lambda(c))$ welches man auch die lokale Zykelklasse von Y nennt.

12 Lokale Lefschetz-Theorie

Die Theorie der Lefschetz-Büschel liefert das Induktionsprinzip in Delignes beiden Arbeiten. Es geht darum, eine vorgegebene Varietät X in möglichst guter Weise über einer Kurve – sogar über dem \mathbb{P}^1 – zu fasn, d.h., einen Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ zu konstruieren, der milde Singularitäten hat. Dann kann man die Kohomologie einer Garbe \mathcal{F} auf X studieren, indem man die Leray-Spektralsequenz für f benutzt. Die Berechnung der höheren Bildgarben $R^j f_* \mathcal{F}$ hängt mit der Kohomologie auf den Fasern zusammen, die kleinere Dimension als X haben. Haben die Fasern nur milde Singularitäten, so unterscheiden sich die $R^j f_* \mathcal{F}$ in geringer Weise von glatten Garben, und die Kohomologiegruppen $H^i(\mathbb{P}^1, R^j f_* \mathcal{F})$ werden der Berechnung zugänglich.

Nun kann man einen solchen Morphismus f im allgemeinen nicht finden, aber das folgende Resultat, dessen Beweis wir in §14 erläutern werden, reicht für die Anwendungen aus.

Satz 12.1 Sei X eine glatte projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann gibt es Morphismen

$$X \xleftarrow{\pi} \tilde{X} \xrightarrow{f} \mathbb{P}_k^1$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) \tilde{X} ist die Aufblasung von X in einer glatten, abgeschlossenen Untervarietät $A \subset X$ (der Kodimension 2), insbesondere ist \tilde{X} glatt und projektiv.
- (ii) Die Fasern von f sind glatt außer über einer endlichen Menge Σ von abgeschlossenen Punkten in \mathbb{P}_k^1 .
- (iii) Für $s \in \Sigma$ hat die Faser X_s von f über s genau einen singulären Punkt, und dieser ist eine gewöhnliche quadratische Singularität (siehe unten).

Bemerkung 12.2 Die Morphismen werden wie folgt konstruiert. Sei $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$ eine abgeschlossene Immersion und $(\mathbb{P}_k^N)^\vee$ der duale projektive Raum, der die Hyperebenen in \mathbb{P}_k^N parametrisiert: Hat \mathbb{P}_k^N die homogenen Koordinaten X_0, \dots, X_N , so entspricht der Punkt $(a_0 : \dots : a_N) \in (\mathbb{P}_k^N)^\vee(k)$ der Hyperebene mit der Gleichung $a_0 X_0 + \dots + a_N X_N = 0$. Ist $\mathbb{P}_k^1 \hookrightarrow (\mathbb{P}_k^N)^\vee$ eine Gerade, so liefert dies eine Familie

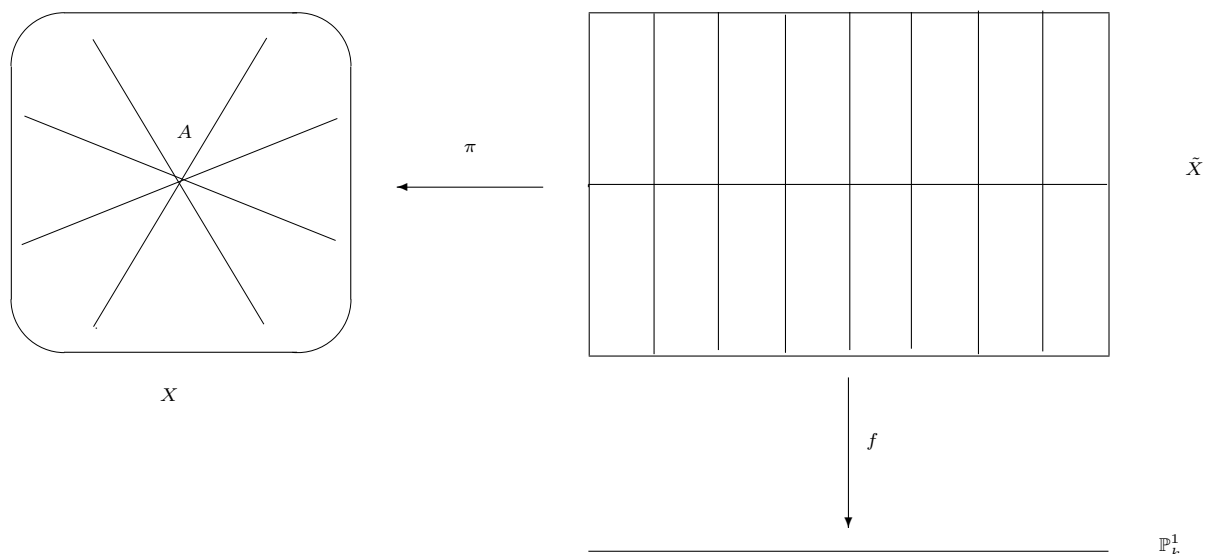
$$(H_t)_{t \in \mathbb{P}_k^1}$$

von Hyperebenen, und die Hyperebenen-Schnitte $X_t = X \cdot H_t = X \times_{\mathbb{P}_k^N} H_t$ bilden eine Familie, für die bei geeigneter Wahl von \mathbb{P}_k^1 gilt: Für $t_1 \neq t_2$ setze $A = H_{t_1} \cap H_{t_2}$. Dann ist A unabhängig von t_1, t_2 und von der Kodimension 2 in X , und (X_t) ist gerade die Familie der Hyperebenenschnitte, die A enthalten. Es gibt einen Morphismus

$$\begin{array}{c} \tilde{X} \\ \downarrow f \\ \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

mit Fasern $\tilde{X}_t = X_t$, und \tilde{X} ist die Aufblasung von X in A .

Bild (für Flächen):



Weiter gibt es solche $\mathbb{P}_k^1 \subset (\mathbb{P}_k^N)^\vee$, für die die Eigenschaften in 12.1 erfüllt sind. Dann nennt man $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ein Lefschetzbüschel und A die Achse des Büschels.

Wir erinnern an die folgende

Definition 12.3 Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und Y ein Schema von endlichem Typ über k . Ein abgeschlossener Punkt $y \in Y$ heißt gewöhnliche quadratische Singularität, wenn die Komplettierung $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ des lokalen Rings $\mathcal{O}_{Y,y}$ bei y isomorph zu einem Ring der Gestalt

$$k[[x_0, \dots, x_n]] / \langle g \rangle,$$

ist, wobei $g \in \langle x_0, \dots, x_n \rangle^2$ und

$$g \equiv Q \pmod{\langle x_0, \dots, x_n \rangle^3}$$

mit einer nicht-trivialen quadratischen Form $Q(x_0, \dots, x_n)$, die glatt ist, d.h., für die die durch $Q = 0$ im \mathbb{P}_k^n definierte Untervarietät glatt ist.

Ist k beliebig, mit algebraischen Abschluss \bar{k} , so heißt y gewöhnliche quadratische Singularität, wenn alle Punkte von $Y \times_k \bar{k}$ über y gewöhnliche quadratische Singularitäten sind.

Bemerkung 12.4 (a) Die Zahl n ist die lokale Dimension von Y bei y .

(b) Aus der Theorie der quadratischen Formen (vergl. Bourbaki Algèbre Chap. X) und dem Jacobi-Kriterium für Glattheit folgt leicht, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Q ist nicht-trivial und glatt,
- (ii) Q kann durch linearen Basiswechsel auf die folgende Standardform Q_n gebracht werden:

$$Q_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ x_0^2 + x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

(c) Ist $\text{char } k \neq 2$ oder n ungerade, so ist dies auch äquivalent zu:

(iii) die zu Q assoziierte symmetrische Bilinearform

$$B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

ist nicht-ausgeartet, oder

(iv) die Hesse-Matrix $(\frac{\delta^2 Q}{\delta x_i \delta x_j}(0))$ ist invertierbar. Sind die Bedingungen erfüllt, so heißt Q (und die Singularität y) nicht-ausgeartet.

(d) Ist $\text{char } k = 2$ und n gerade, so gibt es keine nicht-ausgearteten Q und y .

(e) Ist $n = 1$, so ist also $\hat{O}_{Y,y} \cong k[[x_0, x_1]](x_0 x_1)$, und man nennt y einen gewöhnlichen Doppelpunkt. Diese Bezeichnung wird manchmal auch für beliebiges n verwendet.

Wir studieren nun den Morphismus $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}_k^1 = S$ im Lefschetz-Büschel bei den schlechten Stellen $s \in \Sigma$. Hierfür können wir zur Henselisierung $\mathcal{O}_{S,s}^h$ übergehen; dies ist ein Henselscher diskreter Bewertungsring.

Wir betrachten also allgemeiner die folgende Situation. Sei $T = \text{Spec}(A)$ für einen Henselschen diskreten Bewertungsring, sei $s \in T$ der abgeschlossene Punkt und $\eta \in T$ der generische Punkt. Weiter sei

$$f : X \rightarrow T$$

ein eigentlicher surjektiver Morphismus. Nach §10 ist für eine Garbe \mathcal{F} auf X die höhere Bildgarbe $R^i f_* \mathcal{F}$ durch das Tripel

$$((R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}}, (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}}, sp : (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}} \rightarrow (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}}^I)$$

beschrieben, wobei $I \subset G_{k(\eta)}$ die Trägheitsgruppe ist. Da f eigentlich ist, identifiziert sich dies nach dem eigentlichen Basiswechsel mit dem Tripel

$$(H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}), H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}), sp : H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F})^I),$$

wobei $X_{\bar{s}} = X \times_T \bar{s} = X_s \times_{k(s)} k(\bar{s})$ und $X_{\bar{\eta}} = X \times_T \bar{\eta} = X_{\eta} \times_{k(\eta)} k(\bar{\eta})$ die geometrischen Fasern von f bei \bar{s} und $\bar{\eta}$ sind.

Der folgende Satz ist das Hauptresultat der lokalen Lefschetztheorie

Satz 12.5 Sei $f : X \rightarrow T$ ein flacher eigentlicher Morphismus der Faserdimension n derart, dass die generische Faser X_{η} glatt ist und die geometrische spezielle Faser $X_{\bar{s}}$ genau einen singulären Punkt a hat; dieser sei eine gewöhnliche quadratische Singularität. Schließlich sei $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$ und eine Primzahl ℓ die invertierbar auf T ist.

(a) Für $\nu \neq n, n + 1$ ist $sp : H^{\nu}(X_{\bar{s}}, \Lambda) \rightarrow H^{\nu}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ ein Isomorphismus.

(b) Ist $n = 2m + 1$ ungerade, so gilt über einer étalen Überlagerung von T :

(i) Es gibt eine exakte Sequenz von $\text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ -Moduln

$$0 \rightarrow H^n(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\alpha} \Lambda(m - n) \rightarrow H^{n+1}(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^{n+1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow 0.$$

(ii) Sei der sogenannte verschwindende Zykel $\delta \in H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)(m)$ dadurch definiert, dass $\alpha(x) = \text{tr}(x \cdot \delta)$ ist für $x \in H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$. Dann gibt es einen $\text{Gal}(k(\bar{s})/k(s))$ -äquivarianten Character

$$\chi : I \rightarrow \mathbb{Z}_{\ell}(1),$$

so dass für $x \in H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ und $\sigma \in I$ die folgende Picard-Lefschetz-Formel gilt

$$\sigma x = x + \chi(\sigma)(x, \delta)\delta, \quad \text{wobei } (x, \delta) := \text{tr}(x \cdot \delta).$$

(iii) Es ist $\chi = m t_\ell$ für ein $0 \neq m \in \mathbb{Z}$, wobei

$$t_\ell : I \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

der fundamentale Charakter ist: seine Reduktion modulo ℓ^r , $t_{\ell^r} : I \rightarrow \mu_{\ell^r}$, ist dadurch gegeben, dass $\chi(\sigma) = \sigma(\sqrt[r]{\pi})/\sqrt[r]{\pi}$ für jedes Primelement π in $A = O(T)$.

(c) Ist $n = 2m$ gerade, so gibt es nach Übergang zu einer endlichen étalen Überlagerung von T einen nicht-trivialen Charakter

$$\epsilon : G_\eta \rightarrow \{\pm 1\}$$

so dass gilt:

(i) Es gibt eine exakte Sequenz von $\text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ -Moduln

$$0 \rightarrow H^n(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\alpha} \Lambda(m-n)(\epsilon) \rightarrow H^{n+1}(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^{n+1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow 0,$$

wobei $\Lambda(m-n)(\epsilon) = \Lambda(m-n) \otimes \Lambda(\epsilon)$. Hier ist $\Lambda(\epsilon) \cong \Lambda$ als abelsche Gruppe, mit Operation von G_η via ϵ .

(ii) Die Picard-Lefschetz-Formel lautet hier

$$\sigma x = x \pm \frac{\epsilon(\sigma) - 1}{2}(x, \delta)\delta;$$

insbesondere gilt $\sigma x = x$ für $\sigma \in \text{Ker}(\epsilon)$.

Wir beweisen nur (a) und (b) (i) und (ii), für ungerades $n = 2m + 1$, da nur dies im Folgenden benötigt wird. Wir verwenden die folgende lokale Beschreibung von gewöhnlichen quadratischen Singularitäten.

Lemma 12.6 Sei $T = \text{Spec } A$ für einen strikt Henselschen Ring A und sei $f : X \rightarrow T$ ein flacher Morphismus von endlichem Typ. Sei die relative Dimension n von f ungerade. Dann hat die Faser X_s über dem abgeschlossenen Punkt $s \in T$ genau dann eine gewöhnliche quadratische Singularität im abgeschlossenen Punkt $y \in X_s$, wenn es ein $\lambda \neq 0$ aus dem maximalen Ideal \mathfrak{m} von A gibt, so dass X bei y und $X_{n,\lambda} = \text{Spec } R_{n,\lambda}$, mit

$$R_{n,\lambda} = A[x_0, \dots, x_n]/(Q_n + \lambda)$$

beim abgeschlossenen Punkt $y_n = \text{Spec } (R_{n,\lambda}/\mathfrak{m} + (x_0, \dots, x_n))$ als A -Schemata lokal für die étale Topologie isomorph sind (d.h., es gibt über A isomorphe étale Umgebungen der geometrischen Punkte y und y_n , d.h., die strikten Henselisierungen $O_{X,y}^h$ und $O_{X_{n,\lambda},y_n}$ sind isomorph über A). Hierbei ist

$$Q_n(x_0, \dots, x_n) = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

(vergleiche 12.4 (b)).

Beweis: Siehe SGA 7, 2, XV 1.3.2.

Wir benutzen nun die Theorie der verschwindenden Zyklen aus §10.

Nach Lemma 10.9 ist insbesondere für eine isolierte gewöhnliche quadratische Singularität wie in 12.5 der Komplex $R\Phi\Lambda$ im singulären Punkt a konzentriert. Um den Halm bei a zu berechnen, genügt es nach 12.6, die folgende Situation zu betrachten, wobei $T = \text{Spec } A$ wie in 12.6 ist.

Sei $X \subset \mathbb{P}_T^{n+1}$ die projektive Quadrik der relativen Dimension n , die durch die Gleichung

$$Q_n(X_0, \dots, X_n) + \lambda X_{n+1}^n = 0 \quad , 0 \neq \lambda \in \mathfrak{m} ,$$

definiert wird (mit Q wie oben, also mit n ungerade). Sei $Y \subset X \subset \mathbb{P}_T^{n+1}$ der Hyperebenenchnitt mit der Hyperebene $X_{n+1} = 0$, d.h., definiert durch

$$Q_n(X_0, \dots, X_n) = 0 \quad \text{in } \langle X_{n+1} = 0 \rangle \cong \mathbb{P}_T^n ,$$

und sei $\overset{\circ}{X} = X - Y$ das offene Komplement, das ist im affinen Raum $A_T^{n+1} = \mathbb{P}_T^{n+1} - H$ mit Koordinaten $x_0 = \frac{X_0}{X_{n+1}}, \dots, x_n = \frac{X_n}{X_{n+1}}$ die singuläre Quadrik

$$Q_n(x_0, \dots, x_n) + \lambda = 0 .$$

$\overset{\circ}{X}$ hat genau eine, gewöhnliche quadratische Singularität im Punkt $a = (0, \dots, 0)$ der speziellen Faser $\overset{\circ}{X}_s$.

Lemma 12.7 Die folgenden kanonischen Abbildungen (für Ψ und Ψ' siehe 10.8) sind Isomorphismen für alle i :

- (a) $H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\Psi} H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)$,
- (b) $H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) \xrightarrow{\sim} H^i(\{\bar{a}\}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) = (R^i\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)_{\bar{a}}$.
- (c) $H_c^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) \xrightarrow{\Psi'} H_c^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda)$,
- (d) $H_{\{a\}}^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) \rightarrow H_c^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)$.

Beweis von Lemma 12.7 (b): Nach Lemma 10.9 ist $R\Phi\Lambda$ im Punkt a konzentriert; damit gilt (b) für $R\Phi\Lambda$ anstelle von $R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda$. Wegen des ausgezeichneten Dreiecks

$$sp^*\Lambda_{\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}} \longrightarrow R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda \longrightarrow R\Phi\Lambda \longrightarrow$$

und des Fünferlemmas reicht es also, $\Lambda_{\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}}$ zu betrachten, und die Behauptung (b) folgt mit $Z = \overset{\circ}{X}_{\bar{s}}$ und $f = Q$ aus der ersten Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma 12.8 Sei k ein Körper und $Z \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$ durch eine homogene Gleichung $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ beschrieben. Dann sind für jedes in k invertierbare $r \in \mathbb{N}$ und alle i die Restriktionsabbildungen

- (1) $H^i(Z, \mathbb{Z}/r) \longrightarrow H^i(\{0\}, \mathbb{Z}/r)$
- (2) $H_{\{0\}}^i(Z, \mathbb{Z}/r) \rightarrow H_c^i(Z, \mathbb{Z}/r)$

Isomorphismen.

Beweis (1): Betrachte die Morphismen

$$(12.8.1) \quad \begin{array}{ccc} Z & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} & Z \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{m} & Z \\ & & \downarrow p & & \\ & & Z & & \end{array}$$

wobei $f_0(x) = (x, 0)$, $f_1(x) = (x, 1)$, $m((x_0, \dots, x_n), y) = (yx_0, \dots, yx_n)$ und p die erste Projektion ist. Nach Satz 11.1 ist

$$p^* : H^i(Z, \mathbb{Z}/r) \longrightarrow H^i(Z \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}/r)$$

ein Isomorphismus. Wegen $pf_0 = pf_1$ folgt $f_0^* = f_1^*$ auf $H^i(Z \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}/r)$, also gilt auch $(mf_0)^* = f_0^*m^* = f_1^*m^* = (mf_1)^*$. Aber mf_0 ist die Abbildung auf $0 = (0, \dots, 0)$, und mf_1 ist die Identität. Hieraus folgt die Behauptung: für den Strukturmorphismus $\pi : Z \longrightarrow \text{Spec } k$ und den durch den Nullpunkt gegebenen rationalen Punkt $i_0 : \text{Spec } k \longrightarrow Z$ gilt $\pi i_0 = id$, also $i_0^* \pi^* = id$, andererseits gilt nach dem Gezeigten auch $\pi^* i_0^* = id$.

(2): Nach Voraussetzung ist $Z \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$ durch eine homogene Gleichung $f(t_0, \dots, t_n) = 0$ beschrieben. Sei $W \subseteq \mathbb{P}_k^{n+1}$ ebenfalls durch $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ beschrieben und

$$V = W \cap \langle X_{n+1} = 0 \rangle .$$

Dann ist $Z = W - V \subseteq W$, und das Diagramm (12.8.1) erweitert sich zu einem Diagramm

$$(12.8.2) \quad \begin{array}{ccc} W & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} & W \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\mu} & W \\ & & \downarrow p & & \\ & & W & & \end{array}$$

wobei wieder $f_0 = (id, 0)$ der Nullschnitt und $f_1 = (id, 1)$ der Einschnitt ist, und $\mu((X_0 : \dots : X_{n+1}), \lambda) = (X_0 : \dots : X_n : \lambda X_{n+1})$. Sei $W' = W - \{(0 : \dots : 0 : 1)\}$. Für die Morphismen $W' \xrightarrow{\pi} V, x \mapsto (X_0 : \dots : X_n : 0)$, und $V \xrightarrow{i} W'$ gilt dann $\pi i = id$ und damit $i^* \pi^* = id$ in der Kohomologie, und weiter ist $i \pi = \mu f_0$ und damit $\pi^* i^* = f_0^* \mu^* = f_1^* \mu^* = (\mu f_1)^* = id$, wobei die Gleichheit $f_0^* = f_1^*$ wie in (1) folgt. Damit ist i^* ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt nun mit dem kommutativen exakten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{\{(0:\dots:0:1)\}}^\nu(W) & \longrightarrow & H^\nu(W) & \longrightarrow & H^\nu(W') & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow i^* & & \\ & \longrightarrow & H_c^\nu(Z) & \longrightarrow & H^\nu(W) & \longrightarrow & H^\nu(V) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Beweis von Lemma 12.7 (a): Es soll die Bijektivität der kanonischen Abbildungen

$$\Psi : H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)$$

gezeigt werden. Nach Konstruktion von Ψ genügt es zu zeigen, dass der Basiswechsellmorphismus für $g : \overset{\circ}{X}_{\bar{T}} \longrightarrow \bar{T}$,

$$\bar{i}^* Rg_* R\bar{j}_* \Lambda \longrightarrow R(g_{\bar{s}})_* \bar{i}^* R\bar{j}_* \Lambda$$

ein Quasiisomorphismus ist. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
& & \overline{X} - \{a\} & \xleftarrow{\mu'} & \overset{\circ}{X}_{\overline{T}} - \{a\} \\
& \nearrow \kappa' & \downarrow u & & \downarrow u' \\
\overline{Y} & \xrightarrow{\kappa} & \overline{X} & \xleftarrow{\mu} & \overset{\circ}{X}_{\overline{T}} & \xleftarrow{\bar{j}} & \overset{\circ}{X}_{\overline{\eta}} \\
& \searrow f & & & \downarrow g & & \downarrow g_{\overline{\eta}} \\
& & & & \overline{T} & \xleftarrow{\bar{j}} & \overline{\eta}.
\end{array}$$

Setzen wir $g_1 = gu'$, so ist nach dem glatten Basiswechsel der Basiswechselformorphismus

$$g_1^* R\bar{j}_* \Lambda_{\overline{\eta}} \xrightarrow{\sim} R(\bar{j}_1)_* \Lambda$$

ein Quasiisomorphismus. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $\overline{T} = \text{Spec } \overline{A}$ mit $\overline{A} =$ ganzer Abschluss von A in $K(\overline{\eta})$. Dann ist \bar{j} eine offene Immersion und $R\bar{j}_* \Lambda_{\overline{\eta}} = \bar{j}_* \Lambda_{\overline{\eta}} = \Lambda$, also $R\bar{j}_* \Lambda = R(u')_* R(\bar{j}_1)_* \Lambda \cong R(u')_* g_1^* \Lambda = R(u')_* \Lambda$. Wir haben also zu zeigen, dass der Basiswechselformorphismus

$$\bar{i}^* Rg_* Ru'_* \Lambda \longrightarrow R(g_{\overline{s}})_* \bar{i}^* Ru'_* \Lambda$$

ein Quasiisomorphismus ist. Es gibt ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathcal{E} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow Ru'_* \Lambda \longrightarrow,$$

worin \mathcal{E} in $\{a\}$ konzentriert ist. Da $\{0\} \longrightarrow \overline{X} \xrightarrow{g} \overline{T}$ eigentlich ist, gilt Basiswechsel für \mathcal{E} ; nach dem Fünferlemma können wir also $Ru'_* \Lambda$ durch Λ ersetzen. Da f eigentlich ist, gilt für Rf_* Basiswechsel, und wir haben Basiswechsel für $R\mu_* \Lambda$ und \bar{i}^* zu zeigen. Wegen des ausgezeichneten Dreiecks

$$\kappa_* R\kappa^! \Lambda \longrightarrow \Lambda \longrightarrow R\mu_* \mu^* \Lambda \longrightarrow$$

genügt es, Basiswechsel für $R\kappa^! \Lambda$ und \bar{i}^* zu zeigen. Es ist aber $R\kappa^! \Lambda = R(\kappa')^! u^* \Lambda = R(\kappa')^! \Lambda$, und die Behauptung folgt wegen Reinheit für das glatte \overline{T} -Paar $(\overline{Y}, \overline{X} - \{a\})$, die besagt, dass $R(\kappa')^! \Lambda$ lokal isomorph zu $\Lambda[-1]$ ist.

Beweis von 12.7 (d): Wir haben ein ausgezeichnetes Dreieck

$$sp^* \Lambda \rightarrow R\Psi_{\overline{\eta}} \Lambda \rightarrow R\Phi \Lambda \rightarrow,$$

in dem $R\Phi \Lambda$ in a konzentriert ist. Es genügt daher, Λ zu betrachten, und die Behauptung folgt aus 12.8 (2).

Beweis von 12.7 (c): Das Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc}
\overline{Y} & \xrightarrow{\kappa} & \overline{X} & \xleftarrow{\mu} & \overset{\circ}{X}_{\overline{T}} \\
& \searrow h & \downarrow f & & \swarrow g \\
& & \overline{T} & &
\end{array}$$

induziert den folgenden Morphismus von langen exakten Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccc}
\downarrow & & \downarrow \\
\Psi'_X : H_c^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) & \longrightarrow & H_c^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda) \\
\downarrow & (1) & \downarrow \\
\Psi_X^{-1} = \Psi'_X : H^i(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \\
\downarrow & (2) & \downarrow \\
\tilde{\Psi}^{-1} = \tilde{\Psi}' : H^i(Y_{\bar{s}}, \kappa_{\bar{s}}^* R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & H^i(Y_{\bar{\eta}}, \Lambda) \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Die Rechtecke (1) existieren nach 10.7. (ii), und Ψ'_X ist ein Isomorphismus, da X eigentlich über T ist.

Mit den Bezeichnungen aus dem folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{j_0} & \overset{\circ}{X} & \xleftarrow{i_0} & \overset{\circ}{X}_{\bar{s}} \\
\downarrow \mu_{\bar{\eta}} & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu_{\bar{s}} \\
X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_{\bar{s}} \\
\downarrow f_{\bar{\eta}} & \swarrow \kappa_{\bar{\eta}} & \downarrow f & \swarrow \kappa & \downarrow f_{\bar{s}} \\
Y_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xleftarrow{i_Y} & Y_{\bar{s}} \\
\downarrow f_{\bar{\eta}} & \swarrow \kappa_{\bar{\eta}} & \downarrow f & \swarrow \kappa & \downarrow f_{\bar{s}} \\
\bar{\eta} & \xrightarrow{j} & \bar{T} & \xleftarrow{i} & \bar{s}
\end{array}$$

werden die Rechtecke (2) von den folgenden kommutativen Diagrammen von Komplexen induziert (durch Nehmen der globalen Schnitte):

$$\begin{array}{ccc}
R(f_{\bar{s}})_* \bar{i}^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \Lambda & \xleftarrow[\sim]{\Psi_X} & \bar{i}^* Rf_* R\bar{j}_* \bar{j}^* \Lambda \\
\downarrow & & \downarrow \\
R(f_{\bar{s}})_* \bar{i}^* R\bar{j}_* (\kappa_{\bar{\eta}})_* (\kappa_{\bar{\eta}})^* j_X^* \Lambda & \xleftarrow[\sim]{\tilde{\Psi}} & \bar{i}^* Rf_* R\bar{j}_* (\kappa_{\bar{\eta}})_* (\kappa_{\bar{\eta}})^* j_X^* \Lambda
\end{array}$$

Dabei sind Ψ_X und $\tilde{\Psi}$ Isomorphismen nach dem eigentlichen Basiswechsel.

Die untere rechte Ecke liefert nach Definition die Kohomologie $H^i(Y_{\bar{\eta}}, (\kappa_{\bar{\eta}})^* j_X^* \Lambda) = H^i(Y_{\bar{\eta}}, \Lambda)$.

Für die untere linke Ecke haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\bar{i}^* R\bar{j}_* (\kappa_{\bar{\eta}})_* \kappa_{\bar{\eta}}^* \bar{j}^* \Lambda & \stackrel{(1)}{=} \bar{i}^* \kappa_* R(j_Y)_* \kappa_{\bar{\eta}}^* \bar{j}^* \Lambda \\
& \stackrel{(2)}{=} (\kappa_{\bar{s}})_* \bar{i}_Y^* R(j_Y)_* \Lambda \stackrel{(3)}{=} (\kappa_{\bar{s}})_* \Lambda,
\end{aligned}$$

in dem (1) von der Komposition derivierter Funktoren kommt (wobei $\kappa_* = R\kappa_*$, da κ_* exakt ist), (2) vom eigentlichen Basiswechsel, und (3) vom kanonischen Morphismus $\Lambda \rightarrow i_Y^* R(j_Y)_* \Lambda = R\Psi_{\bar{\eta}}^Y \Lambda$ in die nahen Zykel von Y , der ein Isomorphismus ist, da $Y \rightarrow T$ glatt ist.

Ebenso induziert der kanonische Morphismus

$$\Lambda \rightarrow R\Psi_{\bar{\eta}} \Lambda$$

in die nahen Zykel von X einen Isomorphismus

$$\Lambda = \kappa_{\bar{s}}^* \Lambda \rightarrow \kappa_{\bar{s}}^* R\Psi_{\bar{\eta}} \Lambda,$$

da X glatt an allen Punkten $x \in Y_{\bar{s}}$ ist. Also liefert die linke untere Ecke auch die Kohomologie $H^i(Y_{\bar{s}}, \kappa_{\bar{s}}^* R\Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)$, was die Kommutativität des Rechtecks (2) oben zeigt.

Die Spalten sind beide exakt, und dies impliziert, dass auch $\Psi'(\overset{\circ}{X})$ ein Isomorphismus ist.

Wir kommen nun zur Berechnung der verschwindenden Zykel. Nach 12.7 (a) und (b) haben wir Isomorphismen

$$H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} (R^i \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}}, ;$$

es gilt also, die geometrische Kohomologie der glatten Quadrik $\overset{\circ}{X}_{\eta}$ über η zu berechnen.

Sei also k ein Körper, $X \subseteq \mathbb{P}_k^{n+1}$ eine glatte Quadrik der Dimension n , gegeben durch

$$q(x_0, \dots, x_{n+1}) = 0,$$

$Y = X \cap H$ ein glatter Hyperebenenschnitt und $\overset{\circ}{X} = X - Y$ das offene Komplement. Sei

$$\eta \in H^2(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}, \Lambda(1))$$

die Klasse von H (d.h., des zugehörigen kanonischen Bündel $O(1)$), und bezeichne mit η auch das Bild in $H^2(X_{\bar{k}}, \Lambda(1))$ und $H^2(Y_{\bar{k}}, \Lambda(1))$.

Satz 12.9 Es gibt die folgenden $Gal(\bar{k}/k)$ -Isomorphismen.

(i) Für X

(a)

$$H^\nu(X_{\bar{k}}, \Lambda) \cong \begin{cases} 0 & , \nu \text{ ungerade,} \\ \Lambda(-\mu) & , \nu = 2\mu \neq n, 0 \leq \mu \leq n. \end{cases}$$

(b) Es gibt eine Basis ξ_μ von $H^{2\mu}(X_{\bar{k}}, \Lambda(\mu))$ ($2\mu \neq n$) mit

$$\eta^\mu = \begin{cases} \xi_\mu & , 0 \leq 2\mu < n, \\ 2\xi_\mu & , n < 2\mu \leq 2n. \end{cases}$$

(c) Ist $n = 2m$ gerade, so hat man nach Übergang zu einer endlichen separablen Erweiterung von k Galoisismorphismen

$$H^{2m}(X_{\bar{k}}, \Lambda) \cong \Lambda(-m) \oplus \Lambda(-m),$$

$$H^{2m}(X_{\bar{k}}, \Lambda(m))/\Lambda\eta^m \cong \Lambda.$$

(ii) Für $\overset{\circ}{X}$: Ist $n = 2m + 1$ ungerade, so gilt

$$H^\nu(\overset{\circ}{X}_{\bar{k}}, \Lambda) = \begin{cases} 0 & \nu \neq 0, n, \\ \Lambda & \nu = 0, \\ (H^{2m}(Y_{\bar{k}}, \Lambda(m))/\Lambda\eta^m)^\vee(-m-1) & \nu = n = 2m + 1. \end{cases}$$

Beweis (Skizze) (i) Man hat eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_c^\nu(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1} - X_{\bar{k}}) \rightarrow H^\nu(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}) \rightarrow H^\nu(X_{\bar{k}}) \rightarrow H_c^{\nu+1}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1} - X_{\bar{k}}) \rightarrow \dots,$$

(Koeffizienten Λ), und nach schwachem Lefschetz ($\mathbb{P}^{n+1} - X$ ist affin, da X durch eine Gleichung definiert wird!) ist $H_c^\mu(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1} - X_{\bar{k}}) = 0$ für $\mu < n + 1$. Es folgt

$$H^\nu(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}) \xrightarrow{\sim} H^\nu(X_{\bar{k}}) \quad \text{für } \nu < n$$

und damit die Behauptung (a) für $\nu < n$. Für $\nu > n$ folgt (a) dann mit Poincaré-Dualität:

$$H^\nu(X_{\bar{k}}) \cong H^{2n-\nu}(X_{\bar{k}})^\vee(-n) \quad .$$

(b) folgt daraus, dass $tr_X \eta^n = \langle H^n \cdot X \rangle = deg X = 2$: wählt man für $2\mu > n$ ein Erzeugendes ξ_μ mit $\langle \eta^{n-\mu} \cdot \xi_\mu \rangle = tr_X \eta^{n-\mu} \xi_\mu = 1$, so muss $\eta^\mu = 2\xi_\mu$ sein. (Offenbar gelten (a) und (b) allgemeiner für eine Hyperfläche X vom Grad d im \mathbb{P}_k^{n+1} , wenn man in (b) die Zahl 2 durch d ersetzt; vergleiche auch die Berechnung für vollständige Durchschnitte in SGA 4, XI 1.6).

Für (c) beachten wir, dass wir nach Übergang zu einer endlichen (separablen) Erweiterung von k durch linearen Koordinatenwechsel annehmen können, dass

$$q(x_0, \dots, x_{2m+1}) = \sum_{i=0}^m x_i x_{m+1+i}.$$

Der lineare Teilraum $\mathbb{P}_k^m \cong D \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}_k^{2m+1}$, der durch

$$x_0 = x_1 = \dots = x_m = 0$$

beschrieben wird, ist dann in X enthalten (In der Terminologie von SGA 4, XII 2.7 ist D eine "génératrice"). Für das Komplement haben wir einen wohldefinierten Morphismus

$$\begin{aligned} p: X - D &\rightarrow \mathbb{P}_k^m \\ (x_0 : \dots : x_{2m+1}) &\mapsto (x_0 : \dots : x_m). \end{aligned}$$

Für jede Standard-affine Varietät $U_i = \langle x_i \neq 0 \rangle \subseteq \mathbb{P}_k^m$ ($0 \leq i \leq m$) ist

$$p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} A_k^m \times U_i$$

$$x = (x_0 : \dots : x_{2m+1}) \mapsto \left(\frac{x_{m+1}}{x_i}, \frac{x_{m+2}}{x_i}, \dots, \widehat{\left(\frac{x_{m+1+i}}{x_i} \right)}, \dots, \frac{x_{2m+1}}{x_i}, p(x) \right),$$

wobei \hat{a} die Auslassung von a anzeigt. Dies zeigt, dass $X - D$ ein affines Faserbündel über $\mathbb{P}_{\bar{k}}^m$ ist und p dieselben Eigenschaften wie das p in Satz 11.1 hat, d.h.,

$$p^* : H^i(\mathbb{P}_{\bar{k}}^m, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\bar{k}} - D_{\bar{k}}, \Lambda)$$

ist ein Isomorphismus. Die relative Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow H^{\nu-1}(D_{\bar{k}}) \rightarrow H_c^\nu(X_{\bar{k}} - D_{\bar{k}}) \rightarrow H^\nu(X_{\bar{k}}) \rightarrow H^\nu(D_{\bar{k}}) \rightarrow H_c^{\nu+1}(X_{\bar{k}} - D_{\bar{k}}) \rightarrow \dots$$

(Koeffizienten Λ) und die Poincaré-Dualität

$$H_c^\nu(X_{\bar{k}} - D_{\bar{k}}) \cong H^{4m-\nu}(X_{\bar{k}} - D_{\bar{k}})^\vee(-2m) \cong H^{4m-\nu}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^m)^\vee(-2m)$$

liefern nun ein kommutatives Diagramm mit exakter Zeile

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Lambda(-m) & & \Lambda(-m) & & \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{2m}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^m)^\vee(-2m) & \longrightarrow & H^{2m}(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & H^{2m}(D_{\bar{k}}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & \nearrow \alpha^* & \\ & & & & H^{2m}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}) & & \end{array}$$

Dabei ist die Restriktionsabbildung α^* ein Isomorphismus, da D ein linearer Teilraum von $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}$ ist (dies folgt sofort aus Satz 11.2). Weiter ist das Bild von $H^{2m}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}, \Lambda(m)) \rightarrow H^{2m}(X_{\bar{k}}, \Lambda(m))$ gerade $\Lambda\eta^m$, und wir erhalten (c).

(ii) folgt nun aus der relativen Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow H^{\nu-1}(X_{\bar{k}}) \rightarrow H^{\nu-1}(Y_{\bar{k}}) \rightarrow H_c^\nu(\overset{\circ}{X}_{\bar{k}}) \rightarrow H^\nu(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\beta} H^\nu(Y_{\bar{k}}) \rightarrow \dots$$

Wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H^{2\mu}(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & H^{2\mu}(Y_{\bar{k}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^{2\mu}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^{n+1}) & \xrightarrow{\sim} & H^{2\mu}(H_{\bar{k}}) \end{array} \quad (\mu < n)$$

und wegen (i) ist nämlich β injektiv für $\nu = 2m$ und bijektiv für ungerades ν und für gerades $\nu \neq 2m$, $\nu < 2n = 4m + 2$ (für $\ell = 2$ betrachte zuerst $\Lambda = \mathbb{Z}/2^r$ für $r \geq 2$ und dann $\mathbb{Z}/2$). Hieraus folgt sofort, dass $H_c^\nu(\overset{\circ}{X}_{\bar{k}}) = 0$ für $\nu \neq 2m + 1, 2n$, $H_c^{2n}(\overset{\circ}{X}_{\bar{k}}) \cong \Lambda(-n)$ und

$$H_c^{2m+1}(\overset{\circ}{X}_{\bar{k}}) \cong \text{Coker}(H^{2m}(X_{\bar{k}}) \rightarrow H^{2m}(Y_{\bar{k}})) = (H^{2m}(Y_{\bar{k}}, \Lambda(m)) / \Lambda\eta^m)(-m).$$

Die Behauptung folgt nun mit Poincaré-Dualität für $\overset{\circ}{X}_{\bar{k}}$.

Lemma 12.10 In der allgemeinen Situation verschwindender Zyklen hat man für jeden abgeschlossenen Punkt $a \in X_{\bar{\eta}}$ eine kanonische Paarung

$$(R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}} \times H_{\{a\}}^{2n-\nu}(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \rightarrow \Lambda(-n),$$

die für jede étale Umgebung U von \bar{a} in X mit der Poincaré-Paarung auf $U_{\bar{\eta}}$ verträglich ist, d.h., das Diagramm

$$(12.10.1) \quad \begin{array}{ccc} (R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}} & \times & H_{\{a\}}^{2n-\nu}(X_{\bar{s}}, R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \longrightarrow \Lambda(-n) \\ \uparrow & & \downarrow \\ H^\nu(U_{\bar{s}}, R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) & & H_c^{2n-\nu}(U_{\bar{s}}, R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \\ \uparrow \Psi & & \downarrow \Psi' \\ H^\nu(U_{\bar{\eta}}, \Lambda) & \times & H_c^{2n-\nu}(U_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow \Lambda(-n) \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis: Da

$$(R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}} = (R^\nu \bar{j}_* \Lambda)_{\bar{a}} = \varinjlim_U H^\nu(U_{\bar{\eta}}, \Lambda),$$

wobei der Limes über die étalen Umgebungen von a läuft, kann die Paarung durch die Diagramme 12.10.1 definiert werden – man beachte, dass für $U' \rightarrow U$ das Diagramm der Poincaré-Paarungen

$$\begin{array}{ccc} H^\nu(U'_{\bar{\eta}}, \Lambda) & \times & H_c^{2n-\nu}(U'_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow \Lambda(-n) \\ \uparrow & & \downarrow \\ H^\nu(U_{\bar{\eta}}, \Lambda) & \times & H_c^{2n-\nu}(U_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow \Lambda(-n) \end{array}$$

kommutativ ist.

Lemma 12.11 In der Situation von Lemma 12.7 ist die kanonische Paarung

$$(R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_0 \times H_{\{0\}}^{2n-\nu}(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, R^\nu \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \rightarrow \Lambda(-n)$$

nicht ausgeartet.

Beweis: nach 12.7 (a) - (d) sind die vertikalen Morphismen in (12.10.1) Isomorphismen für $U = \overset{\circ}{X}$, außerdem ist die Poincaré-Paarung nicht ausgeartet für $U_{\bar{\eta}}$, da dies glatt ist.

Wir haben nun alle Mittel zusammen für den **Beweis von Satz 12.5** (lokale Lefschetz-Theorie) (a) und (b) (i) +(ii), für $n = 2m + 1$ ungerade:

Sei $f : X \rightarrow T$ flach eigentlich mit genau einer, gewöhnlichen quadratischen Singularität $a \in X_{\bar{s}}$. Nach der Theorie der verschwindenden Zyklen haben wir eine lange exakte Sequenz von $G_{\bar{\eta}}$ -Moduln (siehe (10.8.2))

$$(12.5.1) \quad \rightarrow H^\nu(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow (R^\nu \Phi \Lambda)_{\bar{a}} \rightarrow H^{\nu+1}(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^{\nu+1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow \dots$$

Die Berechnung von $(R^\nu \Phi \Lambda)_{\bar{a}}$ ist ein lokales Problem, und nach Lemma 12.6 können wir nach Übergang zu einer étalen Überlagerung von T annehmen, dass f Standardform besitzt, d.h., dass X in \mathbb{P}_T^{n+1} durch die Gleichung

$$Q_n(x_0, \dots, x_n) + \lambda x_{n+1}^2 = 0$$

definiert wird, für ein $0 \neq \lambda \in \mathfrak{m}$. Nach Lemma 12.7 (a) und (b) ist

$$H^i(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} (R^i \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}}$$

für alle i . Dabei ist $\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}$ das Komplement des glatten Hyperebenenchnittes $Y_{\bar{\eta}}$ in $X_{\bar{\eta}}$, der in $\langle x_{n+1} = 0 \rangle \cong \mathbb{F}_{\bar{\eta}}^n$ durch

$$Q_n(x_0, \dots, x_n) = 0$$

beschrieben wird. Nach 12.9 (d) ist

$$H^\nu(\overset{\circ}{X}_{\bar{\eta}}, \Lambda) \cong \begin{cases} 0 & \nu \neq 0, n \\ \Lambda & \nu = 0, \\ \Lambda(-m-1) & \nu = n = 2m+1. \end{cases}$$

Für $n = 2m+1$ hat nämlich $Q_n(x_0, \dots, x_n)$ gerade die im Beweis von 12.9 (c) angenommene Form: $\sum_{i=0}^m x_i x_{m+1+i}$; damit ist $H^{2m}(Y_{\bar{\eta}}, \Lambda(m))/\Lambda \eta^m \cong \Lambda$. Zusammen mit der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow R^0 \psi_{\bar{\eta}} \Lambda \rightarrow R^0 \Phi \Lambda \rightarrow 0 \quad ,$$

und den Isomorphismen

$$R^\nu \psi_{\bar{\eta}} \Lambda \xrightarrow{\sim} R^\nu \Phi \Lambda \quad (\nu > 0)$$

(von dem ausgezeichneten Dreieck $\Lambda \rightarrow R \psi_{\bar{\eta}} \Lambda \rightarrow R \Phi \Lambda \rightarrow$) erhalten wir

$$(12.5.2) \quad (R^\nu \Phi \Lambda)_{\bar{a}} = \begin{cases} 0 & \nu \neq n \\ \Lambda(-m-1) & \nu = n = 2m+1 \end{cases} \quad .$$

Dies liefert Isomorphismen

$$(12.5.3) \quad H^\nu(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow[\sim]{sp} H^\nu(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \quad \nu \neq n, n+1$$

und eine exakte Sequenz von $G_{\bar{\eta}}$ -Moduln

$$(12.5.4) \quad 0 \rightarrow H^n(X_{\bar{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\alpha} \Lambda(m-n) \rightarrow H^{n+1}(X_{\bar{s}}, \Lambda) \rightarrow H^{n+1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow 0 \quad ,$$

d.h., 12.5 (a) und (b) (i).

Für die Operation der Trägheitsgruppe I auf $H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ betrachten wir die in 10.7 definierte Variation

$$Var(\sigma) : R \Phi \Lambda \longrightarrow R \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda \quad (\sigma \in I) \quad .$$

Da $R \Phi \Lambda$ in a konzentriert ist, faktorisiert die induzierte Abbildung in der Kohomologie

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_{\bar{s}}, R \Phi \Lambda) & \xrightarrow{Var(\sigma)} & H^n(X_{\bar{s}}, R \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \\ \downarrow & & \uparrow \\ (R^n \Phi \Lambda)_{\bar{a}} & \xrightarrow{Var_{\bar{a}}(\sigma)} & H_{\{a\}}^n(X_{\bar{s}}, R \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \end{array}$$

Nach (12.10.1) haben wir ein kommutatives Diagramm von Paarungen

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) & \times & H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\langle, \rangle} \Lambda(-n) \\ \alpha = \Psi_a \downarrow & & \uparrow \Psi'_a \\ (R^n \Phi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}} \xrightarrow{\sim} (R^n \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda)_{\bar{a}} & \times & H_{\{a\}}^n(X_{\bar{s}}, R \Psi_{\bar{\eta}} \Lambda) \xrightarrow{(\cdot)} \Lambda(-n) \end{array}$$

wobei die obere die nicht-ausgeartete Poincaré-Paarung und die untere nicht-ausgeartet nach 12.11 ist. Sei η ein Erzeugendes von $(R^n\psi_{\bar{\eta}}\Lambda)_{\bar{a}}(m+1) (\cong \Lambda)$, sei ξ das Erzeugende von $H_{\{a\}}^n(X_{\bar{s}}, R\psi_{\bar{\eta}}\Lambda)(m)$ mit

$$(\eta, \xi) = 1,$$

und sei

$$\delta = \Psi'_a(\xi) \in H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda(m)) .$$

Dann gilt $(\psi_a x, \xi) = \langle x, \delta \rangle \in \Lambda(m-n)$ für $x \in H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$, also

$$\alpha(x) = \Psi_a(x) = \langle x, \delta \rangle \cdot \eta .$$

Wir haben in der exakten Sequenz (12.5.4) die Identifizierung

$$H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow[\sim]{\Psi} H^n(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)$$

benutzt und bemerken, dass diese das Inverse von

$$H^n(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\Psi'} H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$$

ist. Hieraus folgt die Formel

$$\begin{aligned} (\sigma - 1) x &= \Psi^{-1} (\sigma - 1) \Psi x \\ &= \Psi^{-1} \text{Var}(\sigma) \text{Res} \Psi x \\ &= \Psi'_a \text{Var}_a(\sigma) \Psi_a x \end{aligned}$$

für $x \in H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$, wobei $\text{Res} : H^n(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda) \rightarrow H^n(X_{\bar{s}}, R\Phi\Lambda)$ die Restriktion ist.

Wir erinnern nun an die Formel 10.8.2

$$\text{Var}(\sigma\tau) = \text{Var}(\sigma) + \text{Var}(\tau) + \text{Var}(\sigma)(\tau - 1) .$$

Da I trivial auf $(R^n\Phi\Lambda)_{\bar{a}} \cong \Lambda(m-n)$ operiert, ist der letzte Term null, und damit ist

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\bar{a}} : I &\mapsto \text{Hom}_{\Lambda} ((R\Phi\Lambda)_{\bar{a}}, H_{\{a\}}^n(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)) \\ \sigma &\mapsto \text{Var}_{\bar{a}}(\sigma) \end{aligned}$$

ein Homomorphismus. Identifizieren wir die Zielgruppe mit

$$\text{Hom}_{\Lambda} ((R\Phi\Lambda)_{\bar{a}}(m+1), H_{\{a\}}^n(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda(m)))(1) = \Lambda(1) \cdot \varphi ,$$

$\varphi(\eta) = \xi$, und $\text{Var}_{\bar{a}}$ mit einem Charakter

$$(12.5.5) \quad \chi : I \longrightarrow \Lambda(1) , \quad \text{Var}_{\bar{a}}(\sigma) = \chi(\sigma) \cdot \varphi$$

so erhalten wir die Formel

$$(\sigma - 1) x = \Psi'_a \chi(\sigma) \langle x, \delta \rangle \xi = \chi(\sigma) \langle x, \delta \rangle \delta$$

d.h., 12.5 (b)(ii).

Bemerkung 12.12 Man kann zeigen, dass der Isomorphismus

$$(R^n\Psi_{\bar{\eta}}\Lambda)_{\bar{a}}(m+1) \cong \Lambda$$

durch die Konstruktion in 12.9 eindeutig bis aufs Vorzeichen ist. Dadurch wird auch der verschwindende Zykel δ bis aufs Vorzeichen festgelegt. Für gegebenes $\chi \neq 0$ ist δ auch durch die Konstruktion im Beweis und die Formel

$$(\sigma - 1)x = \chi(\sigma) \langle x, \delta \rangle \delta$$

bis aufs Vorzeichen bestimmt. Man vergleiche 12.5 (iii) - tatsächlich kann man zeigen, dass für das χ in (12.5.5) gilt:

$$\chi(\sigma) = (-1)^{m+1} v(\lambda) t_\ell \quad ,$$

wobei v die auf Eins normierte Bewertung von A und λ das Element aus 12.6 ist.

13 Beweis von Delignes Satz

Nach den Reduktionen in §6 (siehe die Reduktionen 6 und 7) genügt es zu zeigen:

Satz 13.1 Sei X eine glatte projektive, geometrisch irreduzible Varietät der geraden Dimension d über \mathbb{F}_q . Für jedes $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \rightarrow \mathbb{C}$ sind die Eigenwerte des Frobenius auf $H^d(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ vom ι -Gewicht $\leq d + 1$.

Beweis Wir führen Induktion über d (gerade). Der Fall $d = 0$ ist trivial; sei also $d = n + 1 \geq 2$, $n = 2m + 1$. Durch eventuelle Basiserweiterung von \mathbb{F}_q können wir annehmen, dass X ein über \mathbb{F}_q definiertes Lefschetzbüschel $f : \tilde{X} \rightarrow P \cong \mathbb{P}^1$ besitzt, wobei mit den Bezeichnungen von Satz 12.1

- (i) alle in 12.1 gemachten Annahmen gelten,
- (ii) $U = P - \Sigma$ einen \mathbb{F}_q -rationalen Punkt u hat,
- (iii) $X_u = H_u \cdot X$ einen glatten über \mathbb{F}_q definierten Hyperebenenschnitt Y_u hat.

Nach einem Satz über die Kohomologie von Aufblasungen (siehe SGA 5VII §8) ist $H^d(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ ein direkter Faktor von $H^d(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$; genauer ist hier

$$H^d(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^d(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{d-2}(\overline{X \cap A}, \mathbb{Q}_\ell)(-1),$$

wobei A die Achse des Lefschetzbüschels ist. Daher genügt es, die Frobenius-Eigenwerte auf $H^d(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ zu betrachten. Wir haben die Leray-Spektralsequenz

$$(13.1.1) \quad E_2^{p,q} = H^p(\overline{P}, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell),$$

die aus den Spektralsequenzen

$$(13.1.2) \quad E_2^{p,q} = H^p(\overline{P}, R^q f_* \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}, \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z})$$

durch Übergang zum projektiven Limes über die $\mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}$ und durch Tensorisieren mit \mathbb{Q}_ℓ (über dem Ring $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_{\leftarrow, \nu} \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}$) entsteht. Nach dem eigentlichen Basiswechselsatz sind alle Gruppen in (13.1.2) endlich, und der projektive Limes ist exakt auf projektiven Systemen von endlichen Gruppen; daher erhält man aus den Spektralsequenzen (13.1.2) tatsächlich wieder eine Spektralsequenz (13.1.1).

Nach dieser genügt es zu zeigen, dass für alle (p, q) mit $p + q = d = n + 1$ die Frobenius-Eigenwerte auf $E_2^{p,q}$ vom ι -Gewicht $\leq d + 1 = n + 2$ sind. Da $H^p(\overline{P}, -) = 0$ für $p \neq 0, 1, 2$, sind dies die Gruppen $E_2^{0,n+1}$, $E_2^{1,n}$ und $E_2^{2,n-1}$.

(A): Betrachte $E_2^{2,n-1} = H^2(\overline{P}, R^{n-1} f_* \mathbb{Q}_\ell)$: Sei $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}$. Für jeden abgeschlossenen Punkt s von P und den generischen Punkt η von P haben wir gesehen, dass sich die Spezialisierungsabbildung

$$(13.1.3) \quad (R^\nu f_* \Lambda)_{\overline{s}} \rightarrow (R^\nu f_* \Lambda)_{\overline{\eta}}$$

mit der Spezialisierungsabbildung

$$(13.1.4) \quad H^\nu(X_{\overline{s}}, \Lambda) \xrightarrow{sp} H^\nu(X_{\overline{\eta}}, \Lambda)$$

aus Satz 12.5 identifiziert (eigentlicher Basiswechsel; siehe die Bemerkungen vor 12.5). Nach 12.5 (a) ist (13.1.4) ein Isomorphismus für $\nu \neq n, n+1$, also insbesondere für $\nu = n-1$. Daher ist (13.1.3) ein Isomorphismus für $\nu = n-1$, und da dies für alle s gilt, folgt hieraus, dass $R^{n-1}f_*\Lambda$ lokal konstant ist (Lemma 2.6). Daher ist $R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell$ glatt, und entspricht einer \mathbb{Q}_ℓ -Darstellung von $\pi_1(P, \bar{\eta})$. Man weiß nun aber, dass für die geometrische Fundamentalgruppe gilt

$$(13.1.5) \quad \pi_1(\bar{P}, \bar{\eta}) = \{1\}.$$

(Dies folgt aus der Riemann-Hurwitz-Formel). $R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell$ ist also konstant auf \bar{P} , und nach Lemma 8.1 (a) gilt

$$H^0(\bar{P}, R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell) = (R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{y}}$$

für jeden geometrischen Punkt \bar{y} von P . Nehmen wir $\bar{y} = \bar{u}$, so erhalten wir

$$(R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{u}} = H^{n-1}(X_{\bar{u}}, \mathbb{Q}_\ell) = H^{n-1}(\bar{X}_u, \mathbb{Q}_\ell).$$

Weiter erhalten wir aus dem schwachen Lefschetz eine Injektion

$$H^{n-1}(\bar{X}_u, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow H^{n-1}(\bar{Y}_u, \mathbb{Q}_\ell),$$

und nach der Induktion über die Dimension ($\dim Y = \dim X - 2 = n - 1$) ist $H^{n-1}(\bar{Y}_u, \mathbb{Q}_\ell)$ von ι -Gewicht $\leq n < n + 2$.

(B): Betrachte $E_2^{0, n+1} = H^0(\bar{P}, R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell)$: Aus dem lokalen Lefschetz-Theorem folgt eine exakte Sequenz für $j : U \hookrightarrow P$:

$$(13.1.6) \quad \bigoplus_{s \in \Sigma} \mathbb{Q}(m-n)_s \rightarrow R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell \rightarrow j_*j^*R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell \rightarrow 0,$$

wobei $j_*j^*R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell$ konstant auf \bar{P} ist und $\mathbb{Q}_\ell(m-n)_s$ die in s konzentrierte Garbe $\mathbb{Q}_\ell(m-n)$ bezeichnet. Dies folgt aus der exakten Sequenz

$$(13.1.7) \quad \mathbb{Q}_\ell(m-n) \rightarrow (R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{s}} \xrightarrow{sp} (R^{n+1}f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}} \rightarrow 0$$

(siehe Satz 12.5 (b) (i)), sowie der Tatsache, dass $f|_U : \tilde{X} \times_p U \rightarrow U$ glatt und eigentlich ist, also $R^\nu f_*\mathbb{Q}_\ell|_U$ glatt für alle ν nach dem gleichen Argument wie in (A) (sp ist ein Isomorphismus für $s \in U$, da die verschwindenden Zyklen dann null sind). Schließlich operiert wegen der Surjektivität von sp in (13.1.7) für jedes $s \in P$ die Trägheitsgruppe $I_s \subset G_{\bar{\eta}}$ trivial, so dass die Operation von $\pi_1(\bar{U}, \bar{\eta})$ über $\pi_1(\bar{P}, \bar{\eta}) = \{1\}$ faktorisiert, also einer konstanten Garbe auf \bar{P} entspricht. Da für $i : \Sigma \hookrightarrow P$ der Funktor i_* exakt ist, gilt $H^p(\bar{P}, i_*\mathcal{G}) \cong H^p(\bar{\Sigma}, \mathcal{G}) = 0$ für $p > 0$ und jede Garbe \mathcal{G} auf Σ , also für jede Garbe \mathcal{F} auf P , die auf Σ konzentriert ist ($\Leftrightarrow j^*\mathcal{F} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F} = i_*i^*\mathcal{F}$), also auch für jeden Quotienten von $\bigoplus_s \mathbb{Q}_\ell(m-n)_s$. Dies liefert eine exakte Sequenz

$$(13.1.8) \quad \bigoplus_{s \in \Sigma} \mathbb{Q}_\ell(m-n) \rightarrow E_2^{0, n+1} \rightarrow H^{n+1}(\bar{X}_u, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow 0$$

Nach schwachem Lefschetz hat man eine Surjektion

$$H^{n-1}(\bar{Y}_u, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \twoheadrightarrow H^{n+1}(\bar{H}_u, \mathbb{Q}_\ell) \quad ,$$

und $E_2^{0, n+1}$ wird von Garben eingeschlossen, deren ι -Gewichte $-2m + 2n = -2m + 4m + 2 = 2m + 2 = d + 1$ bzw. $\leq n - 1 + 1 + 2 = d + 1$ sind.

(C): Betrachte $E_2^{1,n} = H^1(\bar{P}, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)$. Für diesen Fall benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

Definition 13.2 Sei Z ein irreduzibles normales Schema und $D \subseteq Z$ ein Divisor. Sei $\bar{\eta}$ ein generischer geometrischer Punkt von $V = Z - D$.

(a) Für einen geometrischen Punkt \bar{a} über einem generischen Punkt a von D sei $\mathcal{O}_{Z,a}^h$ die Henselisierung von Z in a (wegen der Normalität von Z und $\dim \mathcal{O}_{Z,a} = 1$ ist dies ein Henselscher diskreter Bewertungsring), und setze $Z(a) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,a}^h)$ und $\overset{\circ}{Z}(a) = Z(a) - \{a\} = \text{Spec}(K_a)$, wobei $K_a = \text{Quot}(\mathcal{O}_{Z,a}^h)$. Sei $\mathcal{O}_{Z,\bar{a}}^{sh}$ die strikte Henselisierung von $\mathcal{O}_{Z,a}$ und $\overline{k(\eta)}$ ein separabler Abschluss von $k(\eta)$. Für jede Spezialisierung

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\overline{k(\eta)}) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\bar{a}}^{sh}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z & \end{array}$$

von $\bar{\eta}$ nach \bar{a} (siehe Definition 2.4; man spricht auch von einem Weg von $\bar{\eta}$ nach \bar{a}) heißt das Bild des von der Faktorisierung $\mathcal{O}_{Z,a} \rightarrow K_a \rightarrow \overline{k(\eta)}$ induzierten Homomorphismus

$$\pi_1(\overset{\circ}{Z}(a), \bar{\eta}) \rightarrow \pi_1(V, \bar{\eta})$$

eine Zerlegungsgruppe bei a (Es folgt, dass diese bis auf Konjugation in $\pi_1(V, \bar{\eta})$ bestimmt ist). Entsprechend heißt das Bild der Trägheitsgruppe von $\pi_1(\overset{\circ}{Z}(a), \bar{\eta})$ eine Trägheitsgruppe bei a . (Diese Bildungen sind auch möglich, wenn man für $\pi_1(V, -)$ und $\pi_1(\overset{\circ}{Z}(a), -)$ andere geometrische "Basis-"Punkte \bar{s} und \bar{t} als $\bar{\eta}$ wählt – vermöge der Isomorphismen $\pi_1(V, \bar{\eta}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V, \bar{s})$ und $\pi_1(\overset{\circ}{Z}(a), \bar{\eta}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\overset{\circ}{Z}(a), \bar{t})$, die man durch Spezialisierungen von $\bar{\eta}$ nach \bar{s} bzw. \bar{t} erhält und die bis auf Konjugation eindeutig sind.)

(b) Eine étale Überlagerung V' von V heißt zahmverzweigt entlang D , wenn für alle geometrischen Punkte a von D die Operation der Trägheitsgruppen bei a auf der $\pi_1(V, \bar{\eta})$ -Menge $V'_{\bar{\eta}} = \text{Hom}_V(\bar{\eta}, V')$ über den zahmen Quotienten der Trägheitsgruppen faktorisiert.

Bemerkungen 13.3 Sei V' eine galoissche Überlagerung von V , mit Galoisgruppe G , und sei Z' die Normalisierung von Z in V' (bzw. im Funktionenkörper von V'). Dann sind die Zerlegungsgruppen über a die Gruppen $\{\sigma \in G \mid \sigma a' = a'\}$ ($= \{\sigma \in G \mid \sigma \bar{a}' = \bar{a}'\}$) für einen Punkt a' von V' über a (bzw. ein $\bar{a}' \in \text{Hom}_Z(\bar{a}, Z')$). V' ist zahm-verzweigt bei a , wenn die Ordnung aller Trägheitsgruppen über a in G prim zu $\text{char } K(a)$ ist. Man nennt auch manchmal Z' eine entlang D zahm-verzweigte Überlagerung von Z .

Es folgt, dass es einen Quotienten $\pi_1^t(Z, D, \bar{\eta})$ von $\pi_1(V, \bar{\eta})$ gibt, der alle entlang D zahm-verzweigten Überlagerungen von V klassifiziert: dies ist der Quotient nach dem Normalteiler, der von allen Verzweigungsgruppen über allen generischen Punkten a von D erzeugt wird. Eine étale Überlagerung V' von V ist zahm-verzweigt entlang D genau dann, wenn die Operation von $\pi_1(V, \bar{\eta})$ auf $V'_{\bar{\eta}}$ über $\pi_1^t(Z, D, \bar{\eta})$ faktorisiert. Man hat Surjektionen

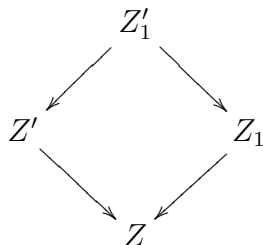
$$\pi_1(V, \bar{\eta}) \twoheadrightarrow \pi_1^t(Z, D, \bar{\eta}) \twoheadrightarrow \pi_1(Z, \bar{\eta}).$$

Lemma 13.4 (Lemma von Abhyankhar) Sei $Z = \text{Spec } A$ für einen regulären lokalen Ring A , f_1, \dots, f_r ein Teil eines regulären Parametersystems und $D \subset Z$ durch das Ideal $(f_1 \cdot$

$f_2 \dots f_r$) definiert (dies bedeutet, dass D ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist). Sei V' eine étale Überlagerung von $V = Z - D$, die zahm-verzweigt entlang D ist. Dann gibt es $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, die prim zur Restklassencharakteristik p von A sind, so dass für

$$Z_1 = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \dots, T_r^{n_r} - f_r))$$

die Normalisierung Z'_1 von Z_1 in $V \times_z Z_1$ eine étale Überlagerung von Z_1 ist:



(Z' = Normalisierung von Z in V'). Z_1 ist regulär.

Für den Beweis, der nicht sehr schwierig ist, sei auf SGA 1 XIII 5.2 verwiesen.

Corollar 13.5 Ist in 13.4 A strikt Henselsch, so ist jede zusammenhängende, entlang D zahm-verzweigte Überlagerung $Z' \rightarrow Z$ ein Quotient einer Kummer-Überlagerung Z_1 , wie in 13.4. Insbesondere gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$t_{Z,D} : \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^t(Z, D, \bar{\eta}) ,$$

wobei p die Restklassencharakteristik von A ist.

Beweis Da in der Situation von 13.4 der Morphismus $Z_1 \rightarrow Z$ endlich ist, ist $\Gamma(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1})$ wieder strikt Henselsch ([Mi] I 4.3). Daher ist Z'_1 die disjunkte Summe von Kopien von Z_1 , und die erste Behauptung folgt. Die zweite Aussage folgt daraus, dass das Urbild V_1 von V in Z_1 galoissch über V ist mit Galoisgruppe

$$\begin{aligned}
 G &\xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r \mu_{n_i} \\
 \sigma &\mapsto (\sigma(T_i)/T_i) = (\sigma \sqrt[n_i]{f_i} / \sqrt[n_i]{f_i}) \quad .
 \end{aligned}$$

Es folgt noch, dass sich der Faktor μ_{n_i} mit der (!) Zerlegungsgruppe beim generischen Punkt von $\text{Spec } A/(f_i) \subseteq D$ identifiziert.

Wir kehren nun zurück zu unserem Lefschetzbüschel für gerades $n + 1 = \dim X$. Wir können annehmen, dass die Dimension der dualen Varietät $X^\vee \subseteq (\mathbb{P}^N)^\vee$ gleich $N - 1$ ist: Ist $\dim X^\vee < N - 1$, so gibt es nach 14.16 eine Gerade $P \subseteq (\mathbb{P}^N)^\vee$ mit $P \cap X^\vee = \emptyset$, es wäre dann $U = P$ und $f : \tilde{X} \rightarrow P$ glatt. Dann sind alle $R^\nu f_* \mathbb{Q}_\ell$ glatt, also konstante Garben auf \bar{P} wegen (13.1.5), also $E_2^{1,n} = 0$, da $H^1(\bar{P}, \mathbb{Q}_\ell) = \text{Hom}(\pi_1(\bar{P}), \mathbb{Q}_\ell) = 0$. Wir betrachten für einen generischen geometrischen Punkt $\bar{\eta}$ von P die $\pi_1(U, \bar{\eta})$ - \mathbb{Q}_ℓ -Darstellung ($\ell \neq \text{char}(k)$)

$$V = (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}} \quad .$$

Proposition 13.6 Unter den gemachten Annahmen faktorisiert die Operation von $\pi_1(U, \bar{\eta})$ auf V über $\pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta})$, d.h., V ist zahm-verzweigt entlang Σ .

Beweis Für jedes $s \in \Sigma$ ist die Operation einer Trägheitsgruppe bei s durch das lokale Lefschetztheorem 12.5 (b) (ii) für den Morphismus $\tilde{X} \times_P \text{Spec } \mathcal{O}_{P,s}^h \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{P,s}^h$ gegeben. Da mit den dortigen Bezeichnungen die Operation nur von einem Charakter

$$\chi : I \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

abhängt, der notwendigerweise zahm ist (da ℓ ungleich der Charakteristik p von $k(s)$ ist), folgt die Behauptung.

Für die Wahl eines Weges von $\bar{\eta}$ nach \bar{s} (vergleiche Definition 13.2 (a)) sei

$$\gamma_s : \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1) \xrightarrow[\sim]{t_{p(s),s}} \pi_1^t(P(s), \{s\}, \bar{\eta}) \longrightarrow \pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta})$$

($p = \text{char}(k)$) die Komposition des induzierten Homomorphismus mit dem Inversen des Isomorphismus aus 13.5. Dann ist γ_s wohldefiniert bis auf Konjugation in $\pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta})$.

Proposition 13.7 Es sei angenommen, dass sich P und X^\vee nur im glatten Ort von X^\vee schneiden, und dort transversal (dies kann man nach einer Variante des Bertini-Theorems 14.16 c) annehmen). Sei k separabel abgeschlossen und

$$r : \pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta}) \longrightarrow \text{Aut}(V)$$

der Homomorphismus, der die Operation auf V beschreibt. Dann sind die Abbildungen

$$r \circ \gamma_s \cdot \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1) \rightarrow \text{Aut}(V)$$

konjugiert in $\text{Im}(r)$ für $s \in \Sigma$.

Beweis Das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & H_X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ P & \longrightarrow & (\mathbb{P}^N)^\vee \end{array}$$

und der eigentliche Basiswechsel liefern einen Isomorphismus

$$V = (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}} \xrightarrow{\sim} (R^n g_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}} \quad ,$$

der mit den Operationen von $\pi_1(U, \bar{\eta})$ und $\pi_1((\mathbb{P}^N)^\vee - X^\vee, \bar{\eta})$ verträglich ist, mittels des Homomorphismus

$$\pi_1(P - \Sigma, \bar{\eta}) \longrightarrow \pi_1((\mathbb{P}^N)^\vee - X^\vee, \bar{\eta})$$

(wie in (B) folgt, dass $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ glatt über $(\mathbb{P}^N)^\vee - X^\vee$ ist). Durch Anwendung des lokalen Lefschetztheorems auf den Morphismus $H_X \times_{(\mathbb{P}^N)^\vee} \text{Spec } (\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, a_0}^h) \rightarrow \text{Spec } (\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, a_0}^h)$, für den generischen Punkt a_0 von X^\vee (X^\vee ist ein irreduzibler Divisor) folgt wie in 13.6, dass $(R^n g_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}}$ zahmverzweigt entlang X^\vee ist. Damit faktorisiert die Darstellung von $\pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta})$ auf V über

$$q : \pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta}) \longrightarrow \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee, X^\vee, \bar{\eta}) \quad .$$

Es genügt also zu zeigen:

Lemma 13.8 (a) Die Morphismen $q\gamma_s$ sind für $s \in \Sigma$ konjugiert in $\pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee, X^\vee, \bar{\eta})$.

(b) $q : \pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta}) \rightarrow \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee, X^\vee, \bar{\eta})$ ist surjektiv.

Beweis Für ein Schema Z und einen geometrischen Punkt \bar{a} von Z sei $Z(\bar{a}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \bar{a}}^{sh})$; weiter benutzen wir die Bezeichnung $t_{Z, D}$ aus 13.5. Sei $\bar{\eta}_0$ ein generischer geometrischer Punkt von $(\mathbb{P}^N)^\vee$ und sei \bar{a}_0 ein geometrischer Punkt von X^\vee über a_0 . Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt über $s \in \Sigma$. Als irreduzibler Divisor ist X^\vee in $(\mathbb{P}^N)^\vee$ durch eine homogene Gleichung \check{f} definiert. Es ist $X^\vee \cap P = \Sigma$, und nach unseren Voraussetzungen ist \check{f} ein lokaler Parameter auf P bei allen $s \in \Sigma$. Die Wahl von kompatiblen Spezialisierungsmorphismen (“Wegen”)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec } \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, \bar{\eta}_0}^{sh} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, \bar{a}_0}^{sh} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Spec } \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, \bar{\eta}} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, \bar{s}}^{sh} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Spec } \mathcal{O}_{P, \bar{\eta}}^{sh} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{P, \bar{s}}^{sh}
 \end{array}$$

liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee(\bar{a}_0), \{\bar{a}_0\}, \bar{\eta}_0) & \longrightarrow & \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee, X^\vee, \bar{\eta}_0) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee(\bar{s}), \widetilde{X}^\vee, \bar{\eta}_0) & \longrightarrow & \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee, X^\vee, \bar{\eta}_0) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee(\bar{s}), \widetilde{X}^\vee, \bar{\eta}) & \longrightarrow & \pi_1^t((\mathbb{P}^N)^\vee, X^\vee, \bar{\eta}) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \pi_1^t(P(\bar{s}), \{\bar{s}\}, \bar{\eta}) & \longrightarrow & \pi_1^t(P, \Sigma, \bar{\eta})
 \end{array}$$

$\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1)$

$t_{(\mathbb{P}^N)^\vee(\bar{a}_0), \{\bar{a}_0\}}$ (top left arrow), $t_{(\mathbb{P}^N)^\vee(\bar{s}), \widetilde{X}^\vee}$ (middle left arrows), $t_{P(\bar{s}), \{\bar{s}\}}$ (bottom left arrow), q (bottom right arrow)

wobei \widetilde{X}^\vee das Urbild von X^\vee in $(\mathbb{P}^N)^\vee(\bar{s}) = \text{Spec } \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^N)^\vee, \bar{s}}^{sh}$ ist. Hieraus folgt (a).

Für (b) ist zu zeigen, dass für eine zusammenhängende, entlang X^\vee zahm verzweigte normale Überlagerung Z' von $(\mathbb{P}^N)^\vee$ das Pull-back $Z'_P = Z' \times_{(\mathbb{P}^N)^\vee} P$ zusammenhängend ist. Dies folgt aus einer weiteren Variante des Bertini-Theorems ().

Lemma 13.9 $\pi_1(\bar{U}, \bar{\eta})$ (und damit $\pi_1(\bar{P}, \bar{\Sigma}, \bar{\eta})$) wird von den Konjugierten aller Trägheitsgruppen über den $s \in \Sigma$ topologisch erzeugt (wobei $\bar{U} = U \times_k k_s$ etc...)

Beweis Andernfalls gäbe es eine nicht-triviale étale Überlagerung des $\mathbb{P}_{k_s}^1$ – Widerspruch zu (13.1.5).

Wir kommen nun zur Betrachtung von $E_2^{1,n} = H^1(\bar{P}, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)$. Es gibt zwei Fälle:

(1) Operiert eine Trägheitsgruppe über einem $s \in \Sigma$ trivial auf $V = (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}}$, so gilt dies nach 13.7 auch für alle anderen, für beliebiges $s \in \Sigma$. Dies bedeutet, dass $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ glatt auf P und damit konstant auf \bar{P} ist, und wir haben $E_2^{1,n} = H^1(\bar{P}, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell) = 0$ (es ist $H^1(\bar{P}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$).

(2) Im anderen Fall operieren alle Trägheitsgruppen I_s über einem $s \in \Sigma$ nicht-trivial. Nach der Picard-Lefschetz-Formel

$$\sigma x - x = \chi_s(\sigma) \langle x, \delta_s \rangle \delta_s$$

für $\sigma \in I_s$ und $x \in V$, wobei $\chi_s : I_s \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ ein Charakter und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

die Poincaré-Paarung auf $V = (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}} = H^n(\tilde{X}_{\bar{\eta}} \mathbb{Q}_\ell)$ ist, sind alle verschwindenden Zykel $\delta_s \neq 0$ und konjugiert unter $\pi_1^t(\bar{P}, \bar{\Sigma}, \bar{\eta})$. Wegen 13.9 ist der von den $\delta_s(-m)$ erzeugte \mathbb{Q}_ℓ -Vektorraum

$$E \subseteq V$$

ein $\pi_1^t(\bar{P}, \bar{\Sigma}, \bar{\eta})$ -Untermodul. E entspricht also einer glatten Garbe

$$\mathcal{E} \subseteq j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell,$$

der **Garbe der verschwindenden Zykel**.

Aus der Picard-Lefschetzformel und der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{s}} \rightarrow (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(m-n) \rightarrow 0$$

$$x \mapsto \langle x, \delta_s \rangle$$

für alle $s \in \Sigma$ folgt, dass

$$(R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{s}} \xrightarrow{\sim} V^{I_s} = \delta_s^\perp$$

für diese s , und damit

$$(13.1.9) \quad R^n f_* \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} j_* j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$$

Es sei \mathcal{E}^\perp die glatte Garbe in $j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$, die dem orthogonalen Komplement E^\perp von E bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entspricht. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

(i) Ein (und damit alle) $\delta_s \in E^\perp$ (man kann später zeigen, dass dieser Fall nicht vorkommt). Dann ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\perp$ und damit $\mathcal{G} = j_*(j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell / \mathcal{E}^\perp)$ konstant auf \bar{P} : die Trägheitsgruppe I_s operiert immer trivial auf V/E und damit hier auch auf V/E^\perp . Man hat eine exakte Sequenz

$$(13.1.10) \quad 0 \rightarrow j_* \mathcal{E}^\perp \rightarrow j_* j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \bigoplus_{s \in \Sigma} \mathbb{Q}_\ell(m-n)_s \rightarrow 0,$$

wobei $j_* \mathcal{E}^\perp$ konstant auf \bar{P} ist, denn für $s \in \Sigma$ hat man eine exakte Sequenz von Halmen

$$0 \rightarrow E^\perp \rightarrow V^{I_s} \rightarrow V/E^\perp \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(m-n) \rightarrow 0,$$

die zeigt, dass I_s trivial auf E^\perp operiert, so dass E^\perp unverzweigt ist, also konstant nach (13.1.5). Spaltet man (13.1.10) in zwei kurze exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow j_* \mathcal{E}^\perp \rightarrow R^n f_* \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \bigoplus_{s \in \Sigma} \mathbb{Q}_\ell(m-n) \rightarrow 0,$$

so gibt dies in der Kohomologie exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow E_2^{1,n} = H^1(\overline{P}, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^1(\overline{P}, \mathcal{H}) \\ \oplus_{s \in \Sigma} \mathbb{Q}_\ell(m-n) \rightarrow H^1(\overline{P}, \mathcal{H}) \rightarrow 0,$$

woraus die Behauptung folgt, da $\mathbb{Q}_\ell(m-n)$ vom ι -Gewicht $-2m+2n=d+1$ ist.

(ii) Dies ist der wichtigste und schwierigste Fall: Kein δ_s ist in E^\perp . Es folgt $E \not\subseteq \delta_s^\perp = (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\overline{s}}$, und damit

$$E + (R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\overline{s}} = V,$$

da δ_s^\perp Kodimension 1 in V hat. Es folgt die Surjektivität von

$$j_* j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell \rightarrow j_*(j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell / \mathcal{E}),$$

denn die Halme in $s \in \Sigma$ ergeben die Surjektion

$$(R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\overline{s}} \rightarrow V/E.$$

Weiter gilt, dass der Morphismus

$$j_* \mathcal{E} \rightarrow j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$$

surjektiv ist: es ist zu zeigen, dass für $s \in \Sigma$

$$E \cap \delta_s^\perp = E^{I_s} \rightarrow (E/E \cap E^\perp)^{I_s}$$

surjektiv ist. Ist aber für $x \in E$ und $\sigma \in I_s$

$$\sigma x - x \in E \cap E^\perp,$$

so folgt nach der Picard-Lefschetz-Formel

$$\langle x, \delta_s \rangle \delta_s \in E \cap E^\perp$$

(da $\chi \neq 0$). Ist $\langle x, \delta_s \rangle \neq 0$, so ist $\delta_s \in E \cap E^\perp$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $x \in E^{I_s}$.

Insgesamt erhalten wir exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow j_* \mathcal{E} \rightarrow R^n f_* \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp) \rightarrow j_* \mathcal{E} \rightarrow j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp) \rightarrow 0,$$

mit konstanten Garben $\mathcal{F} = j_*(j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell / \mathcal{E})$ und $j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$, und in der Kohomologie exakte Sequenzen

$$H^1(\overline{P}, j_* \mathcal{E}) \rightarrow H^1(\overline{P}, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{1,n} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H^1(\overline{P}, j_* \mathcal{E}) \rightarrow H^1(\overline{P}, j_*(\mathcal{E}/\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)).$$

Es genügt also, die Kohomologie von $\mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$ zu betrachten. Hierfür gilt nun der entscheidende

Satz 13.6 Für jedes $\iota: \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$ rein vom ι -Gewicht n .

Haben wir dies gezeigt, so folgt die gewünschte Abschätzung: Nach 5.4 folgt nämlich, dass

$$H^1(\bar{P}, j_*(\mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)))$$

ι -Gewichte $w \leq n + 2 = d + 1$ hat, als Quotient von

$$H_c^1(\bar{U}, \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)).$$

Beweis von Satz 13.6 Wir zeigen zunächst

Lemma 13.7 $E/(E \cap E^\perp) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ ist eine irreduzible glatte $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe auf \bar{U} .

Beweis Wir rechnen mit $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Koeffizienten und schreiben wieder E, E^\perp usw.. Sei $W \subset E$ ein $\pi_1^t(\bar{P}, \bar{\Sigma}, \bar{\eta})$ -Untermodul, der ungleich $E \cap E^\perp$ ist. Dann gibt es ein $w \in W$ und ein δ_s mit $(x, \delta_s) \neq 0$. Aus der Picard-Lefschetz-Formel

$$\sigma x - x = \chi_s(\sigma)(x, \delta_s)\delta_s$$

für ein $\sigma \in I_s$ mit $\chi_s(\sigma) \neq 0$ folgt $\delta_s \in W$ und damit $E \subset W$.

13.8 Nach Satz 9.3 ist jede ι -reelle irreduzible glatte $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe rein. Nach 13.7 genügt es also zu zeigen, dass $\mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$ über einer endlichen Erweiterung von \mathbb{F}_q ι -reell ist, denn das ι -Gewicht β ist dann wegen der nicht-ausgearteten Poincaré-Paarung

$$(\ , \) : E/E \cap F^\perp \times E/(E \cap E^\perp) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

notwendigerweise gleich n .

Für einen geometrischen Punkt \bar{t} über einem abgeschlossenen Punkt t von U ist nach der Lefschetzformel und dem eigentlichen Basiswechsel

$$\begin{aligned} Z(\tilde{X}_t, T) &= \prod_{i=0}^{2n} \det(1 - FT \mid H^i(\tilde{X}_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_{i=0}^{2n} \det(1 - FT \mid (R^i f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{t}})^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

Dieses ist Produkt von

$$Z^f = \prod_{i \neq n} \det(1 - F_t T \mid j^* R^i h_* \mathbb{Q}_\ell)^{(-1)^{i+1}} \det(1 - F_t T \mid (j^* R^n h_* \mathbb{Q}_\ell)/\mathcal{E}) \det(1 - F_t T \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$$

und

$$Z^m = \det(1 - F_t T \mid \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)),$$

wobei wir $\det(1 - F_t T \mid \mathcal{H}) := \det(1 - F_t T \mid \mathcal{H}_{\bar{t}})$ setzen. Wir haben gesehen, dass alle in Z^f auftretenden \mathbb{Q}_ℓ -Garben die Einschränkung von glatten \mathbb{Q}_ℓ -Garben auf P sind, nämlich von

$$\begin{aligned} R^i f_* \mathbb{Q}_\ell \quad (i \neq n, n+1), \\ j_* j^* R^{n+1} f_* \mathbb{Q}_\ell, \\ j_*(j^* R^n f_* \mathbb{Q}_\ell/\mathcal{E}), \\ j_*(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp). \end{aligned}$$

Diese sind konstant auf \overline{P} , kommen also durch Pull-back von Darstellungen von $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$. Für eine solche Garbe \mathcal{K} gibt es aber offenbar Einheiten $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ ($r = \dim \mathcal{K}$) mit

$$\det(1 - F_t T | \mathcal{K}) = \prod_{j=1}^r (1 - \gamma_j^{deg(t)} T)$$

für jedes $t \in U$ (sogar jedes $t \in P$). Insgesamt finden wir, dass es Einheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ und β_1, \dots, β_N in $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ gibt, so dass für alle $t \in U$

$$(13.8.1) \quad Z(\tilde{X}_t, T) = \frac{\prod_i (1 - \alpha_i^{deg(t)} T)}{\prod_j (1 - \beta_j^{deg(t)} T)} \det(1 - F_t T | \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)).$$

Dabei können wir annehmen, dass $\alpha_i \neq \beta_j$ für alle i, j .

Durch Übergang zu einer endlichen Erweiterung von \mathbb{F}_q können wir sogar annehmen, dass $\alpha_i^m \neq \beta_j^m$ für alle i, j und alle $m \in \mathbb{N}$ (die $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_i^m = \beta_j^m$ für ein j bilden ein Ideal (n_j) , welches nach Voraussetzung ungleich \mathbb{Z} ist). Die linke Seite der Gleichung 13.8.1 ist ι -reell, d.h., liegt nach Einbettung der Koeffizienten in $\mathbb{R}(T)$ (sogar in $\mathbb{Q}[T]$, siehe 10.1 (b)). Damit genügt es zu zeigen, dass die Polynome $R_t(T) = \prod_i (1 - \alpha_i^{deg(t)} T)$ und $S_t(T) = \prod_j (1 - \beta_j^{deg(t)} T)$ ι -reell sind für alle $t \in U_0$.

Lemma 13.9 Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ Einheiten in $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$, so gibt es ein $t \in |U|$ derart, dass keiner der Linearfaktoren $(1 - \gamma_i^{deg(t)} T)$ ($i = 1, \dots, r$) das Polynom $\det(1 - F_t T | \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp))$ teilt.

Beweis Wir betrachten andernfalls

$$\pi'_1 = \{ \sigma \in \pi_1(U, \overline{\eta}) \mid \sigma \text{ hat einen Eigenwert } \gamma_i^{deg(\sigma)} \text{ auf } E \}.$$

Hierbei ist $deg(\sigma) \in \mathbb{Z}$ das Bild von σ unter der Surjektion

$$deg: \pi_1(U, \overline{\eta}) \rightarrow Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \xrightarrow[\sim]{can} \widehat{\mathbb{Z}};$$

man beachte, dass für eine ℓ -adische Einheit $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ die Potenz γ^a für jedes $a \in \widehat{\mathbb{Z}}$ definiert ist. Dann ist π'_1 abgeschlossen in $\pi_1(U, \overline{\eta})$, als Vereinigung der Urbilder unter

$$\begin{aligned} \varphi_i: \pi_1(U, \overline{\eta}) &\rightarrow Aut(E \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \\ \sigma &\mapsto (e \mapsto \gamma_i^{-deg(\sigma)} \sigma e) \end{aligned}$$

der abgeschlossenen Menge $\{ \alpha \in Aut(E \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \mid \det(\alpha - id) = 0 \}$.

Gilt 13.9 nicht, so enthält π'_1 alle geometrischen Frobenius-elemente über allen $t \in |U|$. Da diese nach dem Čebotarev'schen Dichtigkeitsatz $\pi_1(U, \overline{\eta})$ erzeugen, ist $\pi'_1 = \pi_1(U, \overline{\eta})$. Wir betrachten nun Trägheitsgruppen I_1, \dots, I_e über \sum derart, dass die zugehörigen verschwindenden Zykel $\delta_1, \dots, \delta_e$ eine Basis von E bilden. Ist $\epsilon_1, \dots, \epsilon_e$ die Dualbasis, so gilt für $\epsilon = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_e$ und $\sigma_i \in I_i$ ($i = 1, \dots, e$)

$$\prod_{i=1}^e \sigma_i \epsilon = \prod_{i=1}^e (1 + \chi_i(\sigma_i)) \epsilon.$$

Für geeignete Wahl der σ_i ist (da $\chi_i \neq 0$ für alle i) dann $\prod_{i=1}^e \sigma_i$ nicht in π'_1 , was einen Widerspruch gibt.

Angewandt auf β_1, \dots, β_N , folgt aus 13.9., dass es ein $t \in U_0$ gibt derart, dass $S_t(T)$ prim zu $\det(1 - F_t T \mid \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp))$ ist. Da $S_t(T)$ auch prim zu $R_t(T)$ ist, steht für t die rechte Seite von 13.8.1 in gekürzter Darstellung, und damit ist

$$S_t(T) = \prod_j (1 - \beta_j^m T) \in \mathbb{Q}[T],$$

$m = \deg(t)$. Nach Basiserweiterung zu \mathbb{F}_{q^m} gilt dann $S_t(T) \in \mathbb{Q}[T]$ für alle $t \in U_0$. Dann gilt auch $R_t(T) \det(1 - F_t T \mid \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)) \in \mathbb{Q}[T]$ für alle $t \in U_0$. Insbesondere sind $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ algebraische Zahlen, und die Anwendung von 13.9 auf die endlich vielen Einheiten $\sigma\alpha_i$ ($i = 1, \dots, M, \sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) gibt ein $t \in U_0$ mit $R_t(T) \in \mathbb{Q}[T]$, so dass wie vorher nach Basiserweiterung zu $K(t)$ gilt: für alle $t \in U_0$ ist $R_t(T) \in \mathbb{Q}[T]$ und damit auch $\det(1 - F_t T \mid \mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)) \in \mathbb{Q}[T]$. Insbesondere ist nach den beiden Basiserweiterungen die Garbe $\mathcal{E}/(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$ ι -reell für jede Einbettung $\iota: \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$, was zu zeigen war.

14 Existenz und globale Eigenschaften von Lefschetzbüscheln

Die Existenz von Lefschetzbüscheln wird mit typischen Schlüssen der projektiven algebraischen Geometrie gezeigt (Existenz von “hinreichen guten” Hyperebenenschnitten, “generische” Eigenschaften derselben ...). Wir betrachten dazu eine irreduzible glatte projektive Varietät

$$X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^N = \mathbb{P}_k^N \quad (k \text{ ein Körper}).$$

Die Hyperebenen H in \mathbb{P}^N werden durch die Punkte des dualen projektiven Raums $(\mathbb{P}^N)^\vee$ parametrisiert: einem Punkt $(a_0 : \dots : a_N)$ in $(\mathbb{P}^N)^\vee$ wird die Hyperebene

$$H : a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_N x_N = 0$$

in \mathbb{P}^N mit Koordinaten x_i zugeordnet. Allgemeiner entsprechen die linearen Teilräume $L \subset \mathbb{P}^N$ der Kodimension m ($1 \leq m \leq N$) den linearen Teilräumen $L' \subset \mathbb{P}^N$ der Kodimension $N + 1 - m$: Schreibt man koordinatenfrei $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ für einen $(N + 1)$ -dimensionalen Vektorraum V , so besteht $L' \subseteq (\mathbb{P}^N)^\vee = \mathbb{P}(V^\vee)$ aus allen Linearformen im Dualraum V^\vee , die V annullieren.

Insbesondere entsprechen die Geraden $P \cong \mathbb{P}^1 \subseteq (\mathbb{P}^N)^\vee$ den linearen Teilräumen A der Kodimension 2 in \mathbb{P}^N . Das “Büschel” $\{H_t\}_{t \in P}$ der durch P parametrisierten Hyperebenen besteht gerade aus den Hyperebenen, die die “Achse” A enthalten, und A ist der Durchschnitt zweier verschiedener H_t .

Definition 14.1 Die Familie $\{H_t\}_{t \in P}$ heißt ein Lefschetzbüschel für X , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) A schneidet X transversal,
- (b) es existiert ein offenes, dichtes $U \subset P$ so, daß sich für $t \in U$ die Hyperebenen H_t und X transversal schneiden,
- (c) für $t \in S = P - U$ schneiden sich H_t und X transversal außer in einem Punkt, der eine gewöhnliche quadratische Singularität von $X \cdot H_t$ ist.

Bemerkung 14.2 Der schematheoretische Durchschnitt $X \cdot H_t$ ist die projektive Varietät, die durch die Gleichungen von X und die lineare Gleichung von H_t definiert wird.

Wir formulieren zunächst die Bedingungen (b) und (c) um, mit Hilfe der dualen Varietät $X^\vee \subset (\mathbb{P}^N)^\vee$. Diese besteht aus allen Hyperebenen H in \mathbb{P}^N , die X in einem Punkt x berühren: dies bedeutet, daß H den projektiven Tangentialraum von x enthält. X^\vee kann wie folgt erhalten werden. Sei J das definierende Ideal von X und $\mathcal{N} = (J/J^2)^\vee$ das Normalenbündel. Da X glatt ist, ist \mathcal{N} lokal frei vom Rang $N - n$ auf X , $n = \dim X$. Sei $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ das projektive Faserbündel zu \mathcal{N} über X . Dann gibt es eine abgeschlossene Immersion

$$\nu : \mathbb{P}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathbb{P}(O_X^{N+1}) \cong X \times (\mathbb{P}^N)^\vee$$

die auf der Faser über $x \in X$ so beschrieben wird

$$F \mapsto (x, H_F : \sum_{i=0}^N \frac{\partial F}{\partial X_i}(x) \cdot X_i = 0) \quad ,$$

wobei F ein lokaler Schnitt von J/J^2 ist. Global lässt sich ν wie folgt beschreiben: Man hat eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow J/J^2 \xrightarrow{d} \Omega_{\mathbb{P}^N|_X}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$$

von kohärenten, lokal-freien Garben auf X . Auf der anderen Seite hat man die bekannte exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^N}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{N+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \rightarrow 0 \quad ,$$

indem man “Differentialformen in homogenen Koordinaten schreibt”. Durch Restriktion auf X und Dualisieren erhalten wir eine Surjektion

$$\mathcal{O}_X(1)^{N+1} \twoheadrightarrow (J/J^2)^\vee = \mathcal{N} \quad ,$$

die die abgeschlossene Immersion

$$\nu : \mathbb{P}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_X^{N+1}) = \mathbb{P}_X^N$$

mit der vorher angegebenen lokalen Beschreibung liefert.

Für ein $x \in X$ ist unter der kanonischen Dualität zwischen dem Tangentialraum $T_{\mathbb{P}^N}(x)$ und $\Omega_{\mathbb{P}^N}^1(x)$ der Annihilator von $T_X(x)$ gerade $(J/J^2)(x)$. Übertragen auf homogene Koordinaten bedeutet dies, dass eine Hyperebene H genau dann den projektiven Tangentialraum von X bei x enthält, wenn die Linearform, die H definiert, in $(J/J^2)(x)$ liegt, via

$$(J/J^2)(x) \hookrightarrow (\mathcal{O}_X(-1)^{N+1})(x) \cong V^\vee \quad .$$

Dies zeigt, daß das Bild von $\mathbb{P}(N)$ unter der Projektion $X \times (\mathbb{P}^N)^\vee \rightarrow (\mathbb{P}^N)^\vee$ mit der dualen Varietät X^\vee übereinstimmt. Insbesondere ist X^\vee projektiv und irreduzibel, und es gilt

$$\dim X^\vee \leq \dim \mathbb{P}(\mathcal{N}) = n + (N - n - 1) = N - 1 \quad .$$

Lemma 14.3 Der Morphismus $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{N}) \rightarrow (\mathbb{P}^N)^\vee$ ist unverzweigt am abgeschlossenen Punkt (x, H) genau dann, wenn x eine nicht-ausgeartete quadratische Singularität von $X \cdot H$ ist. Insbesondere ist die Teilmenge U' dieser Punkte offen in $\mathbb{P}(\mathcal{N})$.

Beweis: später.

Es kann passieren, dass die erwähnte Teilmenge leer ist. Wir betrachten aber die Segre-Einbettung vom Grad d

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^N & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{N(d)} \\ (x_0 : \dots : x_N) & \mapsto & (\dots : x_0^{\alpha_0} \dots x_N^{\alpha_N} : \dots) \end{array}$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $\sum \alpha_i = d$, also $N(d) + 1 = \binom{N+d}{N}$ die Anzahl aller Monome vom Grad d in den x_i ist. Offenbar entsprechen die Hyperebenen in $\mathbb{P}^{N(d)}$ gerade allen Hyperflächen vom Grad d in \mathbb{P}^N , und es gilt

Lemma 14.4 Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ und jedes $d \geq 2$ gibt es eine Hyperfläche H vom Grad d , die X in x berührt und für die x eine gewöhnliche quadratische Singularität von $X \cdot H$ ist.

Beweis Durch geeigneten Koordinatenwechsel können wir annehmen, dass $x = (0 : \dots : 1)$ und dass $x_0/x_N, \dots, x_{n-1}/x_N$ lokale Koordinaten auf X bei x bilden. Dann leistet die Hyperfläche mit der Gleichung

$$x_n^{d-2} Q_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$$

das Verlangte.

Sei $F' \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{N})$ das abgeschlossene Komplement von U' , und sei F_1 das Bild von F' in $(\mathbb{P}^N)^\vee$. Durch eventuellen Übergang zu einer Einbettung von höherem Grad d können wir annehmen, dass das entsprechende $F_1(d) \neq X^\vee$ ist.

Lemma 14.5 Die Menge

$$F''(d) = \{(x, y, H) \in X \times X \times (\mathbb{P}^{N(d)})^\vee \mid x \neq y, H \text{ berührt } X \text{ in } x \text{ und } y\}$$

ist Zariski-abgeschlossen in $((X \times X)\text{-Diagonale}) \times \mathbb{P}^{N(d)}$, und es ist

$$\dim F''(d) \leq N(d) - d \quad \text{für } d \geq 3.$$

Beweis Die Abgeschlossenheit ist klar nach den Bemerkungen über X^\vee . Für die Dimension reicht es zu zeigen, dass die Faser über $(a, b) \in (X \times X)\text{-Diagonale}$ höchstens von der Dimension $N(d) - 2 - 2n$ ist. Die Faser besteht gerade aus allen Hyperflächen H , die X in a und b berühren. Offenbar genügt es zu zeigen:

Behauptung Seien $L, M \subseteq \mathbb{P}^N$ lineare Teilräume und $a \in L, b \in M, a \neq b$. Sei W der Vektorraum der homogenen Gleichungen vom Grad d ($\Rightarrow \dim W = N(d) + 1$). Dann ist die Teilmenge \tilde{W} der Gleichungen f , deren Nullstellenmenge $H_f \subseteq \mathbb{P}^N$ den Raum L in a und M in b berührt, ein Untervektorraum von W , und es ist

$$\text{codim } \tilde{W} \geq \dim L + \dim M + 2 .$$

Beweis Seien $a_1, \dots, a_{\dim L}$ bzw. $b_1, \dots, b_{\dim M}$ unabhängige Punkte von L bzw. M (d.h., sie spannen keine kleineren linearen Teilräume auf). Die Bedingung an H_f ist

- (a) $a, b \in H_f$,
- (b) $a_i \in T_a H_f, b_i \in T_b H_f$.

Dies sind lineare Bedingungen, und zwar $\dim L + \dim M + 2$ viele. Wir haben zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Dies brauchen wir nur für den Fall $L = M = \mathbb{P}^N$ zu zeigen. Durch Koordinatenwechsel ist ohne Einschränkung $a = (1 : 0 : \dots : 0), b = (0 : 1 : \dots : 0)$. Dann sind die Bedingungen für $f = \sum a_\nu X^\nu, \nu = (\nu_0, \dots, \nu_N), X^\nu = X_0^{\nu_0} \dots X_N^{\nu_N}, \sum \nu_i = d$:

- (a) die Koeffizienten von X_0^d und X_1^d sind null,
- (b) $\partial f / \partial X_j = 0$ ($j = 0, \dots, N$) bei a und b , also sind die Koeffizienten von $X_0^{d-1} X_j$ und $X_1^{d-1} X_j$ null.

Für $d \geq 3$ sind dies $2N + 2$ linear unabhängige Bedingungen.

Wir kommen nun zum Beweis von Lemma 14.3. Zunächst erinnern wir an einige Tatsachen über Fitting- und Jacobi-Ideale.

Definition 14.6 Sei A ein kommutativer Ring und M ein endlich präsentierter A -Modul. Wähle eine Präsentation

$$G \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit lokal-freien Moduln F, G von endlichem Rang und definiere das p -te Fittingideal $I^p(M) = I_A^p(M)$ durch

$$I^p(M) = \text{Im}(\Lambda^{n-p}G \otimes \Lambda^{n-p}F^\vee \rightarrow A) \quad (p \geq 0),$$

falls der Rang von F gleich n ist ($F^\vee = \text{Hom}_A(F, A)$).

Die folgenden Eigenschaften folgen leicht aus der Definition.

Proposition 14.7 (a) Die $I^p(M)$ sind unabhängig von der gewählten Präsentation.

(b) Sind F und G frei, so wird $I^p(M)$ von den Determinanten aller $(n-p) \times (n-p)$ -Minoren (einer Matrixdarstellung) von α erzeugt.

(c) Ist $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, so ist

$$B \otimes_A A/I_A^p(M) \longrightarrow B/I_B^p(B \otimes_A M)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist $I_A^p(M)$ verträglich mit Lokalisierung auf A : für eine multiplikative Teilmenge S von A ist

$$I_{S^{-1}A}^p(S^{-1}M) = S^{-1} I_A^p(M).$$

(d) Es ist

$$I^0(M) \subset I^1(M) \subset I^2(M) \subset \dots,$$

und für $x \in \text{Spec}(A)$ ist äquivalent

(i) $I^p(M)_x = A_x$ (d.h., $x \notin \text{Supp}(A/I^p(M))$),

(ii) falls $F_x \cong A_x^n$, so enthält G_x einen Untermodul A_x^{n-p} , der auf einen direkten Faktor von F_x abgebildet wird (insbesondere ist $\text{Supp} A/I^0(M) = \text{Supp}(M)$).

Dies gilt jeweils, falls $p \geq \dim_{\kappa(x)} M(x)$ (wobei $M(x) = \kappa(x) \otimes_A M$).

Wegen 14.7 (c) globalisiert sich die Definition von Fittingidealen: für einen quasi-kohärenten, endlich präsentierten O_x -Modul \mathcal{O} auf einem Schema X erhält man quasi-kohärente Idealgarben $I_X^p(\mathcal{O})$ durch

$$\Gamma(U, I_X^p(\mathcal{O})) = I_{\Gamma(U, O_X)}^p(\Gamma(U, \mathcal{O}))$$

für $U \subset X$ affin und offen. Insbesondere definiert man

Definition 14.8 Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Schema-Morphismus von endlicher Präsentation. Für $p \geq 0$ heißt das durch $I_X^p(\Omega_{X/Y}^1)$ definierte abgeschlossene Unterschema $J^p(X/Y)$ das p -te Jacobi-Schema von X über Y .

Proposition 14.9 (a) Für jeden Basiswechsel $Y' \rightarrow Y$ ist

$$J^p(X'/Y') \longrightarrow J^p(X/Y) \times_Y Y'$$

ein Isomorphismus (wobei $X' = X \times_Y Y'$).

(b) $J^0(X/Y) \supset J^1(X/Y) \supset \dots$, und $x \notin J^p(X/Y)$ für $p \geq \dim_{\kappa(x)} \Omega_{X/Y}^1(x)$.

(c) $x \notin J^p(X/Y)$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung U von x und eine abgeschlossene Y -Immersion $U \rightarrow U'$ gibt für ein glattes Y -Schema U' mit $p = \dim_x U'_{f(x)}$ (die Dimension der Faser über $f(x)$ in U' bei x).

Beweis Es ist nur noch (c) zu zeigen. Gibt es U' wie angegeben, so ist $\dim_{\kappa(x)} \Omega_{U'/Y}^1(x) \leq \dim_{\kappa(x)} \Omega_{U'/Y}^1(x) = p$ und damit $x \notin J^p(X/Y)$ nach (a) und (b). Sei umgekehrt $x \notin J^p(X/Y)$. Da die Frage lokal ist, seien ohne Einschränkung $X = \text{Spec}(B)$ und $Y = \text{Spec}(A)$ affin. Wähle eine Präsentation als Algebra

$$0 \rightarrow J \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow 0$$

mit $P = A[x_1, \dots, x_r]$. Dann ist

$$J/J^2 \xrightarrow{d} B \otimes_P \Omega_{P/A}^1 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \rightarrow 0$$

exakt und $B \otimes_P \Omega_{P/A}^1$ frei vom Rang r , daher

$$\begin{aligned} I_B^p(B/A) &= \text{Im}(\Lambda^{r-p}(J/J^2) \otimes_B \Lambda^{r-p}(B \otimes_P \Omega_{P/A}^1)^\vee \rightarrow B) \\ &= (\det(\varphi_j(df_i)) \mid f_1, \dots, f_{r-p} \in J/J^2, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-p} \in (B \otimes_P \Omega_{P/A}^1)^\vee). \end{aligned}$$

Daher ist $x \in J^p(X/Y)$ genau dann, wenn f_1, \dots, f_{r-p} in J existieren mit $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)) \neq 0$, wobei x_j $r-p$ der Variablen x_1, \dots, x_r durchläuft. Es folgt, dass

$$U' = \text{Spec}(P/(f_1, \dots, f_{r-p})) \rightarrow \text{Spec} A$$

glatt ist bei $x' = \text{Bild von } x \text{ unter der abgeschlossenen Immersion}$

$$U = \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec}(P/(f_1, \dots, f_{r-p})) \quad .$$

Weiter ist die Faserdimension von $U' \rightarrow \text{Spec} A$ bei x gleich p .

Wir kehren nun zurück zu den Hyperebenenbüscheln. Sei

$$H_{univ} \subseteq \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee$$

die Inzidenzrelation, d.h., die abgeschlossenen Punkte von H_{univ} sind die Paare (x, H) mit $x \in H$. Schematheoretisch wird H_{univ} durch die Gleichung

$$F = F(x_i, a_i) = \sum_{i=0}^N a_i x_i = 0$$

definiert. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{univ} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee = (\mathbb{P}^N)_{(\mathbb{P}^N)^\vee} \\ & \searrow f & \downarrow pr_2 \\ & & (\mathbb{P}^N)^\vee \end{array}$$

identifiziert H_{univ} mit der universellen Familie von Hyperebenen - für $t \in (\mathbb{P}^N)^\vee$ ist die Faser von f bei t die Hyperebene H_t , eingebettet in \mathbb{P}^N via pr_1 . Sei H_X die Einschränkung auf X , d.h., durch das kartesische Diagramm von abgeschlossenen Immersionen

$$\begin{array}{ccc} H_X & \hookrightarrow & X \times (\mathbb{P}^N)^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{univ} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee \end{array}$$

definiert. Es folgt, dass die Faser über t von

$$g : H_X \longrightarrow (\mathbb{P}^N)^\vee$$

gerade gleich $H_t \cdot X$ ist. Wir berechnen nun die $(n-1)$ -te Jacobi-Varietät von H_X über $(\mathbb{P}^N)^\vee$ (vergl. SGA 7 XVII Remarque 3.1.5), wobei wie vorher $n = \dim X$.

Lemma 14.10 $J^{n-1}(H_X/(\mathbb{P}^N)^\vee) = \mathbb{P}(\mathcal{N}) \hookrightarrow X \times (\mathbb{P}^N)^\vee$.

Beweis Wir haben eine exakte Sequenz

$$i^*(pr_1^*J + (F)) \rightarrow i^* \Omega_{\mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee / (\mathbb{P}^N)^\vee}^1 \rightarrow \Omega_{H_X / (\mathbb{P}^N)^\vee}^1 \rightarrow 0,$$

wobei $i : H_X \hookrightarrow \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee$ die abgeschlossene Immersion, J wie oben das definierende Ideal von X in \mathbb{P}^N und die mittlere Garbe lokal frei vom Rang N ist. Dies zeigt, dass das definierende Ideal von $J^{n-1}(H_X/(\mathbb{P}^N)^\vee)$ lokal von den $(N-n+1) \times (N-n+1)$ -Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & i = 1, \dots, N-n \\ & j = 0, \dots, N \\ a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, wobei f_1, \dots, f_{N-n} lokale Erzeugende von J sind. Diese Minoren erzeugen aber gerade das Ideal von $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ in $X \times (\mathbb{P}^N)^\vee = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$, wie aus der Definition der Injektion

$$J/J^2 \hookrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{N+1}$$

und dem folgenden elementaren Lemma folgt.

Lemma 14.11 Sei A ein Ring und $M \hookrightarrow A^{N+1}$ ein freier Untermodul vom Rang s derart, dass A^{N+1}/M ebenfalls lokal frei ist. Sei b_0, \dots, b_N eine Basis von A^{N+1} und sei a_0, \dots, a_N die Dualbasis. Dann wird der Kern des Ringepimorphismus

$$A[a_0, \dots, a_N] = \text{Sym}(A^{N+1})^\vee \longrightarrow \text{Sym} M^\vee$$

von den $(m+1) \times (m+1)$ -Minoren der $(s+1) \times (N+1)$ -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_j(m_i), & i = 1, \dots, s \\ & j = 0, \dots, N \\ a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

ist unverzweigt beim abgeschlossenen Punkt $y = (x, H_t)$ genau dann, wenn die Faser $J^{n-1}(H_t \cdot X / \text{Spec } k) \rightarrow \text{Spec } k$ unverzweigt bei y ist. Da $H_t \cdot X$ in X durch eine Gleichung definiert wird, ist $H_t \cdot X \rightarrow \text{Spec } k$ ein lokal vollständiger Durchschnitt der virtuellen Dimension $n - 1$. Weiter ist wegen $\dim_{\kappa(y)} \Omega_{H_t \cdot X/k}^1(y) \leq \dim_{\kappa(y)} \Omega_{X/k}^1(y) = n$ für jedes y das n -te Jacobischema $J^n(H_t \cdot X/k) = \emptyset$. Damit folgt die Behauptung aus der allgemeineren

Proposition 14.14 Sei Y ein lokal vollständiger Durchschnitt der virtuellen Dimension m über k . Dann sind für $y \in J^m(Y/k) \setminus J^{m+1}(Y/k)$ äquivalent:

- (a) $\Omega_{J^m(Y/k)/k}^1(y) = 0$,
- (b) für eine Umgebung U von y besteht $J^m(Y/k) \cap U$ nur aus y und ist reduziert (und damit isomorph zu $\text{Spec } k$),
- (c) y ist abgeschlossener Punkt und eine nicht-ausgeartete quadratische Singularität von Y .

Beweis Die Äquivalenz von (a) und (b) ist klar ([Mi]I 3.2). Für $y \in J^m(Y/k) - J^{m+1}(Y/k)$ gibt es eine offene affine Umgebung $U = \text{Spec } B$ und eine abgeschlossene Immersion von U in eine glatte affine Varietät $U' = \text{Spec } B'$ der Dimension $m + 1$, also eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow I \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow 0$$

und einen étalen Morphismus $A[x_0, \dots, x_m] \rightarrow B'$, der den Punkt $x_0 = x_1 = \dots = x_m = 0$ auf y abbildet. Da Y lokal vollständiger Durchschnitt der virtuellen Dimension m ist, können wir annehmen, dass I von einem Element f erzeugt wird; dabei ist notwendigerweise $f(y) = 0$.

Aus (b) folgt, dass für hinreichend kleines U die $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = 0, \dots, m$) das maximale Ideal m_y von y in B erzeugen. Damit erzeugen die $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ auch das maximale Ideal m'_y von y in B' (und es ist $m'_y / (m'_y)^2 \xrightarrow{\sim} m_y / m_y^2$). Damit folgt die Behauptung durch Kompletieren in m'_y .

Umgekehrt sei \widehat{y} abgeschlossen und eine nicht ausgeartete quadratische Singularität. Nach Definition ist $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \cong k[[x_0, \dots, x_m]] / (g)$, wobei $g \equiv Q \pmod{(x_0, \dots, x_m)^3}$, mit einer nicht-ausgearteten quadratischen Form $Q(x_0, \dots, x_m)$. Dann erzeugen $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ ($j = 0, \dots, m$) das maximale Ideal $\widehat{m}_y = m_y \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ von $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$. Es folgt

$$I_{\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}}^m(\Omega_{\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}/k}}^1) = \widehat{m}_y$$

(wobei $\widehat{}$ m_y -adische Kompletierung bedeutet). Wir haben benutzt, dass für einen noetherschen Ring R und ein Ideal $m \subset R$

$$\widehat{\Omega_{R/k}^1} = \lim_{\leftarrow \nu} \Omega_{R_\nu/k}^1 \quad (\text{EGA IV1}),$$

wobei $R_\nu = R/m^\nu$, und dass die m -adische Kompletierung exakt auf R -Moduln von endlichem Typ ist. Aus demselben Grund ist für einen solchen Modul M

$$I_{\widehat{R}}^p(\widehat{M}) = I_R^p(M) \widehat{R}$$

bzw.

$$\widehat{R} / I_{\widehat{R}}^p(\widehat{M}) \xleftarrow{\sim} R / I_R^p(M) \widehat{R} \quad .$$

Es folgt, dass $I_{O_{Y,y}}^m(\Omega_{O_{Y,y}/k}^1) = m_y$ ist, also (b).

Betrachte nun die Einbettungen $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N, N = N_0(d)$.

Satz 14.15 Für $d \geq 3$ gibt es für $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ ein Lefschetzbüschel $\{H_t\}_{t \in P}$, und die Menge der Geraden $P \subseteq (\mathbb{P}^N)^\vee$, für die $\{H_t\}_{t \in P}$ ein Lefschetzbüschel ist, ist offen und dicht in der Grassmann-Varietät $Gr(1, (\mathbb{P}^N)^\vee)$ der Geraden im $(\mathbb{P}^N)^\vee$.

Beweis für $n = \dim X$ gerade: Sei $F_1 = F_1(d)$ die abgeschlossene Menge in X^\vee , über der $\varphi : \mathbb{P}(N) = J^{n-1}(H_x/(\mathbb{P}^N)^\vee) \rightarrow X^\vee \hookrightarrow (\mathbb{P}^N)^\vee$ verzweigt ist und sei $F_2 = F_2(d)$ das Bild des Abschlusses der in 14.5 definierten Menge $F''(d) \subset X \times X \times (\mathbb{P}^N)^\vee$; F_2 ist ebenfalls abgeschlossen. Nach Definition gilt

$t \notin F_2 \Rightarrow H_t$ berührt X in höchstens einem Punkt

und nach 14.3 gilt

$t \in X^\vee - F_1 \Leftrightarrow H_t \cdot X$ hat nur nicht-ausgeartete quadratische Singularitäten.

Schließlich gilt nach Konstruktion

$t \notin X^\vee \Leftrightarrow H_t$ schneidet X transversal.

Damit gilt für die Eigenschaften (a) - (c) eines Lefschetzbüschels: Ein Hyperebenenbüschel $\{H_t\}_{t \in P}$ erfüllt

(a) \Leftrightarrow die Achse A schneidet X transversal,

(b) $\Leftrightarrow P \not\subseteq X^\vee$,

(c) $\Leftrightarrow P \cap (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$.

Wir haben nun gezeigt:

$\dim X^\vee \leq N - 1$,

$\dim F_2 \leq N - d$, falls $d \geq 3$ (Lemma 14.5),

$\dim F_1 \leq N - 2$, falls $d \geq 2$ und 2 gerade (Lemma 14.4)

(Nach Lemma 14.4 ist $F_1 \neq X^\vee$ für $d \geq 2$, und X^\vee ist irreduzibel). Die Behauptung folgt also aus der bekannten

Proposition 14.16 Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^N$ eine projektive Varietät der Dimension m , und sei $Gr(\ell, \mathbb{P}^N)$ die Grassmann-Varietät der linearen Teilräume der Dimension ℓ in \mathbb{P}^N .

(a) Die Teilmenge der $L \in Gr(N - m - 1, \mathbb{P}^N)(k)$ mit $L \cap Z = \emptyset$ ist offen, und nicht-leer für $Z \neq \mathbb{P}^N$.

(b) Die Teilmenge der $L \in Gr(N - m, \mathbb{P}^N)(k)$ mit $\dim Z \cap L = 0$ ist offen und nicht-leer.

(c) (Bertini) Ist Z glatt, so ist für $N - m \leq t \leq N - 1$ die Menge der $L \in Gr(t, \mathbb{P}^N)$, die Z transversal schneiden, offen und nicht leer.

Sei nun $\{H_t\}_{t \in P}$ ein Lefschetzbüschel und

$$h : H_{X,P} \longrightarrow P$$

die Einschränkung der universellen Familie $H_X \longrightarrow (\mathbb{P}^N)^\vee$ auf P (die Faser über t ist immer noch $H_t \cdot X$). Nach 14.12 ist h glatt über der offenen dichten Menge $U = P \setminus (P \cap X^\vee)$,

während nach (c) die Fasern $H_t \cdot X$ über den endlich vielen $t \in S = P - U$ nur genau eine Singularität haben, und diese ist gewöhnlich quadratisch.

Wir haben auch die erste Projektion

$$\pi : H_{X,P} \longrightarrow X \quad .$$

Lemma 14.17 Mittels π identifiziert sich $H_{X,P}$ mit der Aufblasung von X in der glatten, 2-codimensionalen Untervarietät $A \cap X$ (A die Achse des Lefschetzbüschels).

Beweis Wir bemerken zunächst, dass die universelle Hyperebene $H_{univ} \subseteq \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^\vee$ unabhängig von der Koordinatenwahl definiert ist: sie entspricht dem Kern der kanonischen Surjektion

$$V^\vee \otimes V \longrightarrow k \quad ,$$

bzw. dem Kokern der dualen Abbildung

$$k \longrightarrow V \otimes V^\vee \quad .$$

Dies zeigt, dass für duale Basen $\{x_i\}, \{a_i\}$ von V und V^\vee die Hyperebene H_{univ} immer durch die Gleichung $\sum a_i x_i = 0$ definiert wird. Wir können nun die Koordinaten so wählen, dass P durch die Gleichungen $a_2 = \dots = a_N = 0$ beschrieben wird, und daher A durch die Gleichung $x_0 = x_1 = 0$. Dann wird $H_{X,P}$ in $X \times P$ durch die Gleichung

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 = 0$$

beschrieben; dies ist aber die bekannte Beschreibung der Aufblasung von X in der durch die Gleichungen $x_0 = x_1 = 0$ beschriebenen Untervarietät $A \cap X$ ($(a_0 : a_1)$ sind Koordinaten von P).

Bemerkung 14.18 Setzen wir also $\tilde{X} = H_{X,P}$, so erhalten wir also Morphismen

$$X \xleftarrow{\pi} \tilde{X} \xrightarrow{f} P = \mathbb{P}_k^1$$

mit den im Satz 12.1 beschriebenen Eigenschaften.