Seminar über Zahlentheorie

Prof. Dr. Uwe Jannsen, Moritz Kerz

Zeit und Ort: Mittwoch 10-12 Uhr, M 102

Thema im Wintersemester 07/08 sind quadratische Formen über lokalen und globalen Körpern. Ziel ist es, den Satz von Hasse-Minkowski erst über den rationalen Zahlen und später sogar über beliebigen Zahlkörpern zu beweisen. Der Satz von Hasse-Minkowski besagt, dass die Arithmetik quadratischer Formen über Zahlkörpern durch die einfach zu beschreibende lokale Arithmetik an den Primstellen bestimmt ist.

1. Endliche Körper: *J. Völkl*
   [S] Kapitel I: Die grundlegenden Eigenschaften endlicher Körper sollen rekapituliert werden. Außerdem soll der Satz von Chevalley (Theorem 3) und der Satz über quadratische Reziprozität (Theorem 5 und 6) bewiesen werden.
2. $\mathbb{Z}_p$: *Ch. Barner*
   [S] Kapitel II: Nach einer kurzen Wiederholung der Konstruktion von $\mathbb{Z}_p$ sollen die Approximationssätze aus 2.2 bewiesen werden und die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_p$ bestimmt werden.
3. Lokales Hilbertsymbol: *V. Dudenaite*
   [S] Kapitel III.1: Das Hilbertsymbol über $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$ wird eingeführt und durch das Legendresymbol berechnet.
4. Globales Hilbertsymbol: *F. Märtl*
   [S] Kapitel III.2: Der Hilbertsche Reziprozitätssatz (Theorem 3) wird bewiesen und die Lösbarkeit gewisser Gleichungssysteme von Hilbersymbolen über den rationalen Zahlen wird gezeigt (Theorem 4). Für letzteres benötigt man Dirichlets Dichtigkeitssatz (Lemma 3).
5. Dirichlet I: *M. Schreder*
   [S] Kapitel VI.2: Dies ist der erste von drei Vorträgen, die dem Beweis des Dirichletschen Dichtigkeitssatzes gewidmet sind. Hier werden zuerst die wichtigsten analytischen Eigenschaften von allgemeinen Dirichletreihen diskutiert.

6. Dirichlet II: *B. Alkofer*
[S] Kapitel VI, Abschnitte 3.1, 3.2 und 1.x: Es werden Eulerprodukte und die Eigenschaften der Riemannschen ζ-Funktion am Punkt $s = 1$ besprochen. Schließlich sollen in Vorbereitung auf Dirichlets L-Funktion Dirichletcharaktere eingeführt werden.

7. Dirichlet III: *M. Hörmann*
[S] Kapitel VI, Abschnitte 3.3 und 4.1-4.5: Die wichtige analytische Eigenschaft von Dirichlets L-Funktionen $L(1, \chi) \neq 0$ für $\chi \neq 0$ (Theorem 1) wird bewiesen und daraus der Dirichletsche Dichtigkeitssatz abgeleitet.

8. Quadratische Formen: *M. Bauer*
[S] Kapitel IV.1: Quadratische Formen werden eingeführt und grundlegende Sätze über diese bewiesen. Außerdem werden quadratische Formen über endlichen Körpern klassifiziert.

9. Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$: *S. Fischer*
[S] Kapitel IV.2: Die Hasseinvariante einer quadratischen Form über $\mathbb{Q}_p$ wird konsturiert. Mit ihrer Hilfe werden quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$ klassifiziert.

10. Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$: *K. Bauer*
[S] Kapitel IV, Abschnitte 3.1 und 3.2: Der Satz von Hasse-Minkowski wird bewiesen.

11. Klassifikation und Summen von Quadraten: *M. Harant*
[S] Kapitel IV.3.3 und Anhang: Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ werden klassifiziert und die klassischen Sätze von Gauß und Lagrange über Summen von Quadraten werden bewiesen.

12. Quaternionalgebren: *M. Söllner*
[Sch] Abschnitt 2.11: Es werden Quaternionalgebren über beliebigen Körpern eingeführt und der Zusammenhang mit quadratischen Formen erklärt.

13. Übersicht Klassenkörpertheorie und Anwendungen: *M. Kerz*
Es wird gezeigt, dass es bis auf Isomorphie nur zwei Quaternionalgebren über lokalen Körpern gibt, und Hasses Norm- bzw. Quadratsatz wird aus der Klassenkörpertheorie abgeleitet. Dazu wird ein kurzer Überblick über Klassenkörpertheorie gegeben.

14. Quadratische Formen über lokalen Körpern: *B. Dietel und B. Schober*
[Sch] Abschnitt 6.4: Quadratische Formen über lokalen Körpern der Charakteristik Null werden klassifiziert und ihr Verhalten unter Spurabbildungen wird untersucht.

15. Quadratische Formen über globalen Körpern: *M. Schweinfurter*
[Sch] Abschnitte 6.5 und 6.6 (bis Korollar 6.7): Der Hilbertsche Reziprozitätssatz und der Satz von Hasse-Minkowski über Zahlkörpern werden bewiesen und quadratische Formen klassifiziert.

Literatur:

Für die Vorträge 1-11 Kapitel I-IV und Kapitel VI aus
[**S**] Serre, J.-P. *A course in arithmetic.* Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

Für die Vorträge 12, 14 und 15 Abschnitte 2.11 und 6.4-6.6 aus
[**Sch**] Scharlau, Winfried *Quadratic and Hermitian forms.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 270. Springer-Verlag, Berlin, 1985.