Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

30. April 2007

Übungen zur Algebra II

3. Blatt, Abgabe am Dienstag, 08.05. um 10.15 Uhr

7. Sei R ein kommutativer unitärer Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Die **$\mathfrak{a}$-adische Topologie** auf A ist erklärt dadurch, dass für jedes $r \in R$ die Teilmengen $r + \mathfrak{a}^n, n \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis bilden.

(i) Zeigen Sie, dass man so in der Tat eine Topologie erhält.

(ii) Zeigen Sie: Die Menge $\hat{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}\hat{R} = \{\sum_{i=1}^n a_i t_i | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{a}, t_i \in \hat{R}\}$ ist ein Ideal in $\hat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{a}^n$.

(iii) Zeigen Sie: Die kanonische Abbildung $\hat{R} \to R/\mathfrak{a}^m$ induziert einen Isomorphismus $\hat{R}/\hat{\mathfrak{a}}^m \xrightarrow{\sim} R/\mathfrak{a}^m$.

8. Sei I eine filtrierend geordnete Menge, und seien A_i, B_i und C_i induktive Systeme von abelschen Gruppen. Weiter sei für jedes $i \in I$ eine Sequenz von abelschen Gruppen

$$(*) \qquad A_i \to B_i \to C_i$$

gegeben, die verträglich mit den Übergangsabbildungen ist, d.h. für $i \leq j$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[r] \arrow[d] & C_i \arrow[d] \\ A_j \arrow[r] & B_j \arrow[r] & C_j \end{tikzcd}$$

kommutativ (dies ist ein induktives System von Sequenzen). Zeigen Sie: Ist die Sequenz $(*)$ für alle $i \in I$ exakt, dann ist auch die Limessequenz

$$\varinjlim A_i \to \varinjlim B_i \to \varinjlim C_i$$

exakt.