Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

7. Mai 2007

Übungen zur Algebra II

4. Blatt, Abgabe am Dienstag, 15.05. um 10.15 Uhr

9. Sei G eine Gruppe und A eine G-Modul. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Gruppenerweiterungen E von G mit A, so dass die durch die Erweiterung gegebene G-Modulstruktur auf A mit der ursprünglichen übereinstimmt. Zeigen Sie dass die in der Vorlesung definierte Abbildung $\mathcal{E} \to H^2(G, A)$ eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{E}/\text{Äquivalenz} =: \mathrm{Ext}(G, A) \to H^2(G, A)$$

induziert.

10. Konstruieren Sie die Umkehrabbildung $H^2(G, A) \to \mathrm{Ext}(G, A)$wie folgt:

(i) Zeigen Sie dass für einen Kozykel f durch $(a, \sigma) \cdot (b, \tau) = (a\sigma(b)f(\sigma, \tau), \sigma\tau)$ eine Gruppenstruktur auf der Menge $A \times G$ definiert wird und dass man $A \times G$ mit dieser Verknüpfung als Erweiterung von G mit A schreiben kann.

(ii) Zeigen Sie, dass zwei kohomologe Kozykel (i.e. aus einer Klasse in $H^2(G, A)$) zwei äquivalente Gruppenerweiterungen liefern.

(iii) Zeigen Sie, dass diese beiden Abbildungen invers zueinander sind.

11. Sei G eine Gruppe. Die Menge $\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathbb{Z}\sigma$, d.h. die freie abelsche Gruppe über der Menge G, ist mit der von $\sigma \cdot \tau := \sigma\tau$ induzierten Verknüpfung ein Ring, der **Gruppenring von** G (dies braucht nicht gezeigt zu werden). Zeigen Sie:

(i) Die **Augmentation** $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ mit $\Sigma n_\sigma \sigma \mapsto \Sigma n_\sigma$ ist ein Ringhomomorphismus.

(ii) Der Kern von ϵ, das **Augmentationsideal** I_G, wird als abelsche Gruppe erzeugt von $\sigma - 1$ für $\sigma \in G \setminus \{1\}$.

12. Sei G eine Gruppe. Betrachten Sie die exakte Sequenz

$$0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

aus der letzten Aufgabe. Berechnen Sie die Terme in der induzierten Sequenz

$$0 \to I_G^G \to \mathbb{Z}[G]^G \xrightarrow{\epsilon^G} \mathbb{Z}^G$$

und zeigen Sie, dass diese exakt, aber die Abbildung ϵ^G im Allgemeinen nicht surjektiv ist (hier sei $\mathbb{Z}$ mit der konstanten G-Operation versehen).