Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

14. Mai 2007

Übungen zur Algebra II

5. Blatt, Abgabe am Dienstag, 22.05. um 10.15 Uhr

Sei R ein unitärer Ring.

13. Gegeben sei eine exakte Sequenz von R-Moduln:

$$0 \to C^\bullet \to D^\bullet \to E^\bullet \to 0.$$

Beweisen Sie Satz 4.15 aus der Vorlesung zu Ende: Zeigen Sie dass die lange Kohomologiesequenz bei $H^{i+1}(C^\bullet)$ exakt ist.

14. Sei R ein Ring mit Eins und sei folgendes Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \\
M_1 \arrow[r] \arrow[u, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[u, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[u, "f_4"] & M_5 \arrow[u, "f_5"]
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Ist f_1 surjektiv, f_5 injektiv und sind f_2 und f_4 Isomorphismen, dann ist f_3 ein Isomorphismus. (Dieses oft benutzte sog. 5-er Lemma zeigt man mit Diagrammjagd.)

15. Zeigen Sie mit Hilfe des Schlangenlemmas und der langen exakten Kohomologiesequenz das sogenannte 9er-Lemma:
Gegeben Sei ein kommutatives Diagramm mit exakten Spalten:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[u] & C_2 \arrow[r] \arrow[u] & C_3 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[u] & B_2 \arrow[r] \arrow[u] & B_3 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[u] & A_2 \arrow[r] \arrow[u] & A_3 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

(i) Sind die ersten beiden Zeilen exakt, dann auch die letzte.

(ii) Sind die letzten beiden Zeilen exakt, dann auch die erste.

(iii) Sind die erste und die letzte Zeile exakt, und ist die mittlere ein Komplex, dann ist sie auch exakt.

(Die Antwort sollte nicht länger als 10 Zeilen sein!)

16. Untersuchen Sie, ob die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ frei sind.