Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

23. Mai 2007

Übungen zur Algebra II

6. Blatt, Abgabe am Dienstag, 29.05. um 10.15 Uhr

17. Sei G eine endliche zyklische Gruppe mit Erzeuger σ und A ein diskreter G-Modul.

(i) Zeigen Sie dass die Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to A \xrightarrow{i} M^G(A) \xrightarrow{\varphi} M^G(A) \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

mit $i(a) = (\tau \mapsto \tau a)$ und $\varphi(f) : \tau \mapsto f(\sigma\tau) - \sigma f(\tau)$ und $\pi(f) = \sum_{\tau \in G} \tau^{-1} f(\tau)$ eine exakte Sequenz von G-Moduln ist.

(ii) Folgern Sie daraus, dass $H^i(G, A) \xrightarrow{\sim} H^{i+2}(G, A)$ für alle $i > 0$.

18. Sei wieder G eine endliche zyklische Gruppe und A ein diskreter G-Modul. Zeigen Sie mit Hilfe der letzten Aufgabe, dass es Isomorphismen

$$H^1(G, A) \cong \ker \mathrm{Tr}/(\sigma - 1)A$$

und

$$H^2(G, A) \cong A^G/\mathrm{Tr}A$$

gibt. (Tipp: Zeigen Sie, dass die Sequenz $(*)$ nach Übergang zu den Fixmoduln isomorph zur Sequenz $0 \to A^G \longrightarrow A \xrightarrow{\sigma-1} A \xrightarrow{\mathrm{Tr}} A^G \to 0$ ist.)

19. **(i)** Zeigen Sie:

$$\mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2 \cong \Big(\bigoplus_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\Big) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(ii) Zeigen Sie mit (i) und Kummertheorie, dass das Kompositum aller Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad 2 unendlich über $\mathbb{Q}$ ist.

20. Sei $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ ein nichtkonstanter Charakter einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass $\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) = 0$.