Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

4. Juni 2007

Übungen zur Algebra II

8. Blatt, Abgabe am Dienstag, 12.06. um 10.15 Uhr

23. Sei k ein Körper. Berechnen Sie die folgenden Längen:

(i) $l_k(V)$ für einen k-Vektorraum V,

(ii) $l_{k[t]}(k[t]/(t^2+1))$,

(iii) $l_k(k[t]/(t^2+1))$,

(iv) $l_{k[t]}(k[t]/(t^n))$.

24. Sei R ein kommutativer unitärer Integritätsring und M ein R-Modul.

(i) Zeigen sie dass die Menge M^{tor} der Torsionselemente von M ein R-Untermodul von M ist.

(ii) Zeigen Sie, dass M/M^{tor} ein torsionsfreier R-Modul ist.

25. Sei $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $U = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von M. Berechnen Sie die Elementarteiler a_1 und a_2 von U in M und geben Sie eine Basis $\{x_1, x_2\}$ von M an, so dass $U =< a_1x_1, a_2x_2 >_{\mathbb{Z}}$.

26. Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Definiere die **Skalarerweiterung von M mit $\mathbb{Q}$**:

$$M_{\mathbb{Q}} = \{(x,a) | x \in M, a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}/ \sim$$

wobei $(x,a) \sim (y,b) :\Leftrightarrow$ Es existiert $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so dass $cbx = cay$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (x,a) in $M_{\mathbb{Q}}$ mit $\frac{x}{a}$. Zeigen Sie:

(i) $M_{\mathbb{Q}}$ wird mit der Addition $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} := \frac{bx+ay}{ab}$ und der Skalarmultiplikation $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{c} := \frac{ax}{bc}$ zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(ii) Es gilt $\mathrm{rang} M = \dim_{\mathbb{Q}} M_{\mathbb{Q}}$.