Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

11. Juni 2007

Übungen zur Algebra II

9. Blatt, Abgabe am Dienstag, 19.06. um 10.15 Uhr

27. Sei k ein Körper und $R = k[x, y]$ der Polynomring in zwei Variablen.

(i) Zeigen Sie dass $\mathfrak{a} = (x, y)$ kein Hauptideal ist, d.h. R ist kein Hauptidealring.

(ii) Zeigen Sie dass $\mathfrak{a}$ den Rang 1 über R hat und torsionsfrei ist (der R-Modul $\mathfrak{a}$ ist also torsionsfrei, aber nicht frei).

28. Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Wir betrachten Zerlegungen in Untermoduln

$$M = M_1 \oplus M_2,$$

wobei $M_1 \subseteq M$ ein Torsionsmodul und $M_2 \subseteq M$ frei sei. Sind M_1 und M_2 als Untermoduln von M eindeutig bestimmt? (Zusatzfrage: Falls nicht, können Sie angeben, wie man M_1 bzw. M_2 abändern kann?)

29. Sei R ein Hauptidealring und A eine $n \times n$-Matrix über R.

(i) Seien B und C invertierbare Matrizen über R (siehe (iii)). Zeigen Sie dass die Elementarteiler von A gleich den Elementarteilern von BAC sind.

(ii) Nehmen wir an, dass sich A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen[1] in eine Matrix $B = (b_{ij})$ von Diagonalgestalt transformieren lässt, so dass $b_{ii} | b_{i+1,i+1}$. Zeigen Sie, dass die nichttrivialen Elemente auf der Diagonalen die Elementarteiler von A sind. (Tipp: betrachten Sie die Multiplikation mit geeigneten Matrizen.)

(iii) [2] Eine quadratische Matrix B über einem Integritätsring S heisst invertierbar, wenn eine Matrix C über S existiert mit $BC = CB = 1$. Zeigen Sie, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante eine Einheit ist.

30. Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 29 die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über den ganzen Zahlen.

[1] wir betrachten nur solche, die die Determinante bis auf Vorzeichen nicht ändern, i.e. Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) und die Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen.

[2] Extraaufgabe: +2 Punkte