Prof. Dr. Uwe Jannsen
Dr. Felix Schnellinger

Universität Regensburg
NWF I-Mathematik

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Übungsblatt 12

13.Juli 2009

43. Sei X ein Schema, sei $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Algebren. Zeigen Sie:

    (i) Die Einschränkung auf $\mathrm{Sym}(\mathcal{E})_1 = \mathcal{E}$ induziert einen Isomorphismus

    $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-Alg}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}), \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-Mod}(\mathcal{E}, \mathcal{B})$$

    (ii) Es gibt eine natürliche Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-Alg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Hom}_X(\mathrm{Spec}(\mathcal{B}), \mathrm{Spec}(\mathcal{A}))$.
    (iii) Es gibt einen natürlichen Homomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{E}^\vee) \to \mathrm{Hom}_X(X, V(\mathcal{E}))$.
    Hinweis: Benutzen Sie (i) und (ii) (mit $\mathcal{B} = \mathcal{O}_X$).
    (iv) Dieser ist ein Isomorphismus.[1]
    Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathcal{E}^\vee$ und $Hom_X(\cdot, V(\mathcal{E}))$ Garben sind.

    (4 Punkte)

44. (i) Sei S ein graduierter Ring, M ein graduierter S-Modul, $r_0 \in \mathbb{Z}$ und $N = \oplus_{r \geq r_0} M^r$. Beweisen Sie, dass $\tilde{M} \cong \tilde{N}$ auf $\mathrm{Proj}(S)$.

    (ii) Sei k ein Körper und $S = k[X_0, X_1, X_2]/ < X_0X_2, X_1X_2, X_2^2 >$ (derart graduiert, dass $\deg(X_i) = 1$). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Proj}(S) \cong \mathbb{P}^1_k$.

    (4 Punkte)

45. (i) Sei L/k eine Körpererweiterung. Beweisen Sie[2]:

    $$\mathbb{P}^n_k(L) := \mathbb{P}^n_k(\mathrm{Spec}(L)) = \left(L^{n+1} \setminus \{0\}\right)/L^\times .$$

    Die Klasse von $(a_0, \dots, a_n)$ in dieser Menge sei wie üblich mit $(a_0 : \dots : a_n)$ bezeichnet.

    (ii) Zeigen Sie:

    $$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} | < x_0, \dots, x_n >= \mathbb{Z}\}/\{\pm 1\} \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$$

    (4 Punkte)

46. Sei k ein Körper, $X = \mathbb{P}^{n+1}_k = \mathrm{Proj}(k[X_0, \dots, X_{n+1}])$ und $U = \mathbb{P}^{n+1}_k \setminus \{(0 : \dots : 0 : 1)\}$ (wobei wir wie üblich die Elemente in $\mathbb{P}^{n+1}_k(k)$ auch als abgeschlossene Punkte in $\mathbb{P}^{n+1}_k$ auffassen). Zeigen Sie:

    (i) Die Schnitte X_i von $\mathcal{O}(1)$ induzieren einen Morphismus $\pi : U \to \mathbb{P}^n_k$.
    (ii) Ist $P = (p_0 : \dots : p_{n+1}) \in U(k)$ ein k-rationaler Punkt, so ist $\pi(P) = (p_0 : \dots : p_n) \in \mathbb{P}^n_k(k)$.

    (4 Punkte)

[1] die Schnitte der Garbe $\mathcal{E}^\vee$ entsprechen also den Schnitten des Schemamorphismus $V(\mathcal{E}) \to X$.
[2] Für ein Schema X über einem Basisschema S und ein weiteres S-Schema T ist die *Menge der T-rationalen Punkte von X über S* definiert als $X(T) = X_S(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X)$.

Abgabe am Montag, 20.Juli