Prof. Dr. Uwe Jannsen
Dr. Felix Schnellinger

Universität Regensburg
NWF I-Mathematik

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Übungsblatt 9 22.Juni 2009

31. Sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus und seien $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ zwei $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Beweisen Sie: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$f^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}').$$

(4 Punkte)

32. (Die universelle Eigenschaft abgeschlossener Immersionen) Sei $i : Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion mit zugehöriger Idealgarbe $\mathcal{J}$. Zeigen Sie:

Ist $f : Y \to X$ ein Schemamorphismus, so dass $\mathcal{J} \subseteq \ker(f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y)$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\overline{f} : Y \to Z$ mit $i \circ \overline{f} = f$.

Hinweis: Reduzieren Sie zuerst auf den Fall $Z = V(\mathcal{J})$. Beweisen und benutzen Sie die Aussage: Ist $\iota : A \to T$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge A eines topologischen Raumes T, dann ist kanonisch $\mathrm{Hom}_{Gar(A)}(F, G) \cong \mathrm{Hom}_{Gar(T)}(\iota_*F, \iota_*G)$ für abelsche Garben F und G auf A.

(4 Punkte)

33. Sei X ein Schema. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen:

(i) X ist reduziert.
(ii) Für alle $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert.
(iii) Es gibt eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}$ von X, so dass die Ringe $\mathcal{O}_X(U_i)$ für alle i reduziert sind.

(4 Punkte)

34. Sei X ein Schema. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen:

(i) X ist integer.
(ii) Für alle $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U)$ integer.
(iii) Für alle affinen $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U)$ integer.

(4 Punkte)