Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen, Dr. Marco Hien

20. Oktober 2006

Übungen zur Algebra

1. Blatt, Abgabe: Dienstag, 24.10.2006, 10:15 Uhr

Aufgabe 1: Sei $n \geq 3$. Zu jedem Element $\sigma \in S_{n-1}$ betrachte die Permutation

$$\widetilde{\sigma} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \ , \ i \mapsto \begin{cases} \sigma(i) & \text{für} \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ n & \text{für} \quad i = n \ . \end{cases}$$

Diese Vorschrift definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $S_{n-1} \hookrightarrow S_n$, vermöge dessen wir S_{n-1} als Untergruppe von S_n auffassen. Zeige, dass diese Untergruppe $S_{n-1} \subset S_n$ kein Normalteiler ist.

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe.

i) Ist $M \subset G$ eine Teilmenge, so definiert man die von M erzeugte Untergruppe $\langle M \rangle$ als die kleinste Untergruppe $H \subset G$, die M enthält.[1] Zeige:

$$\langle M \rangle = \{m_1^{\varepsilon_1} \cdots m_r^{\varepsilon_r} \in G \mid r \in \mathbb{N}_0,\ m_i \in M \text{ und } \varepsilon_i \in \{+1, -1\} \text{ für } i = 1, \ldots, r\} \ .$$

ii) Für zwei Elemente $a, b \in G$ nennt man das Element $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ ihren *Kommutator*. Setzt man nun $M := \{[a, b] \mid a, b \in G\}$, so heißt $\langle M \rangle =: [G, G]$ die *Kommutatoruntergruppe* von G . Zeige, dass $[G, G]$ ein Normalteiler ist, dass die Faktorgruppe $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ abelsch ist und dass sie zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Zu jeder *abelschen* Gruppe A und jedem Gruppenhomomorphimus $f : G \to A$ gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $g : G^{\mathrm{ab}} \to A$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

kommutiert.

[1] $\langle M \rangle$ ist also die Untergruppe, die dadurch bestimmt ist, dass $M \subset \langle M \rangle$ gilt und dass für jede Untergruppe $H \subset G$ mit $M \subset H$ auch $\langle M \rangle \subset H$ gilt.