Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen, Dr. Marco Hien

30. Januar 2007

Übungen zur Algebra

14. Blatt, Abgabe: Dienstag, 06.02.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 51: † Es seien p und q Primzahlen mit $p < q$. Folgern Sie aus den Sylowschen Sätzen, dass im Falle $q \not\equiv 1 \bmod p$ jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

Aufgabe 52: ‡ Zeigen Sie, dass eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler, dessen Ordnung gleich dem kleinsten Primteiler der Gruppenordnung ist, ein nichttriviales Zentrum hat. (Hinweis: Man betrachte die Operation der Gruppe auf dem Normalteiler durch Konjugation.)

Aufgabe 53: †† Sei G eine Gruppe mit 2001 Elementen. Zeigen Sie:

i) Die p-Sylowgruppen von G sind für $p = 23$ und $p = 29$ normal.

ii) Auch die 3-Sylowgruppe von G ist normal.

iii) Die Gruppe G ist zyklisch.

Aufgabe 54: ‡‡ Gegeben seien eine Primzahl p, eine natürliche Zahl n mit $q = p^n > 2$ und ein Primteiler r von $q - 1$. Wie üblich bezeichne $\mathbb{F}_q$ den Körper mit q Elementen.

i) Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_q^\times$ ein Element γ der Ordnung r enthält und dass die Menge
$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q \ , \ \beta \in \langle\gamma\rangle \right\}$$
eine Untergruppe der Ordnung qr von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ ist. Dabei ist $\langle\gamma\rangle$ die von γ erzeugte Untergruppe in $\mathbb{F}_q^\times$.

ii) Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente von G.

iii) Geben Sie die Anzahl der p- und der r-Sylowgruppen von G an.

---

†Staatsexamensaufgabe in Bayern Frühjahr 1992.
‡Staatsexamensaufgabe in Bayern Frühjahr 2000.
††Staatsexamensaufgabe in Bayern Herbst 2000.
‡‡Staatsexamensaufgabe in Bayern Herbst 1997.