Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen, Dr. Marco Hien

12. Dezember 2006

Übungen zur Algebra

9. Blatt, Abgabe: Dienstag, 19.12.2006, 10:15 Uhr

Aufgabe 31: Sei k ein Körper und D die Abbildung (formales Differenzieren)

$$D : k[X] \to k[X] \ , \ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} \ .$$

Zeige:

i) D ist eine k-Derivation von $k[X]$.

ii) Ist $\sigma : k[X] \to k[X]$ eine beliebige k-Derivation, so gibt es ein Polynom $p \in k[X]$ mit $\sigma(f) = p \cdot D(f)$ für alle $f \in k[X]$.

Aufgabe 32: Es seien $K|k$ eine Körpererweiterung und $k \subset L \subset K$ ein Zwischenkörper. Zeige: Sind $K|L$ und $L|k$ separable Erweiterungen, so auch $K|k$.

Aufgabe 33: Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeige:

i) Ist $a \in k^\times$ und $a \notin (k^\times)^p$, so ist das Polynom $X^p - a$ irreduzibel und inseparabel.

ii) Der Körper k ist genau dann vollkommen, wenn $k = k^p$ gilt.

Aufgabe 34: Betrachte den Körper $k = \mathbb{F}_p(T) = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_p[T])$. Man setze voraus, dass es eine algebraische Erweiterung $\Omega|k$ gibt mit einem algebraisch abgeschlossenen Körper Ω.† Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\sqrt[p^n]{T}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^{p^n} - T \in k[X]$ in Ω. Zeige:

i) $\sqrt[p^n]{T}$ ist eindeutig bestimmt in Ω.

ii) $k(\sqrt[p^n]{T}) \subset k(\sqrt[p^{n+1}]{T})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iii) Die Vereinigung

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} k(\sqrt[p^n]{T})$$

ist ein vollkommener Körper (Hinweis: Aufgabe 33 benutzen).

†Die Existenz von Ω wird später in der Vorlesung gezeigt werden.