Universität Regensburg
NWF I – Mathematik
**Prof. Dr. Uwe Jannsen**
**Felix Schnellinger**

WS 2007/08
14.12.07

# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Blatt 9

(Abgabe am 21.12.07 vor der Vorlesung)

33. Für welche Primzahlen $p$ ist 7 ein quadratischer Rest modulo $p$?

34. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen*, d.h., die durch $a_1 := a_2 := 1$ und $\forall n \geq 3 : a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ rekursiv definierte Folge, Beweisen Sie:

    (i) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $a_n = \frac{\varepsilon^n - \varepsilon'^n}{\sqrt{5}}$ mit $\varepsilon := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\varepsilon' := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

    (ii) Ist $p \notin \{2, 5\}$ eine Primzahl, so gilt
    $$a_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}.$$

35. Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Lambda \subset V$ ein vollständiges Gitter. Geben Sie eine konvexe, zentralsymmetrische Menge $X \subseteq V$ mit Volumen $vol(X) = 2^n \cdot vol(\Lambda)$ an, die keinen von Null verschiedenen Punkt von $\Lambda$ enthält.

36. Es sei wieder $V$ ein $n$-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Lambda \subset V$ ein vollständiges Gitter. Beweisen Sie:

    Es sei $X \subseteq V$ eine *kompakte*, konvexe, zentralsymmetrische Menge vom Volumen $vol(X) = 2^n \cdot vol(\Lambda)$. Dann enthält $X$ mindestens einen von Null verschiedenen Punkt von $\Lambda$. Tipp: Für jedes reelle $\alpha > 1$ enthält $\alpha X$ einen von Null verschiedenen Gitterpunkt.