Universität Regensburg
NWF I – Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen
Felix Schnellinger

WS 2007/08
19.10.07

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Blatt 1

(Abgabe am 26.10.07 vor der Vorlesung)

1. (i) Beweisen Sie, dass jeder Zahlkörper vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$ von der Form $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit $m \in \mathbb{Z}$ ist!

   (ii) Zeigen Sie, dass die Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und m quadratfrei paarweise nicht-isomorph sind!

2. Beweisen Sie die Fermatsche Vermutung für den Fall $n = 4$, d.h., zeigen Sie, dass die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ keine Lösung mit positiven natürlichen Zahlen x, y, z besitzt!

   Tipp: Zeigen Sie die stärkere Aussage, dass sogar die Gleichung $x^4 + y^4 = w^2$ keine Lösung mit positiven natürlichen Zahlen x, y, w besitzt. Nehmen Sie dazu an, Sie hätten eine Lösung (x, y, w) mit minimalen w, und zeigen Sie, dass man daraus mit Hilfe der Parametrisierung der pythagoräischen Tripel aus der Vorlesung eine zweite Lösung (x', y', w') mit $w' < w$ konstruieren könnte!

3. (i) Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$:

$$N(\alpha) \text{ prim in } \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ prim in } \mathbb{Z}[i]\,.$$

   (ii) Zerlegen Sie die Gaußsche Zahl $153 + 24i$ in Primelemente!

4. Sind die algebraischen Zahlen $\frac{3+2\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}$ und $\frac{1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{10}^2}{3}$ ganz?