

# Algebraische Geometrie I

Prof. Dr. Uwe Jannsen  
Wintersemester 2008/09

## Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	1
1	Hilberts Nullstellensatz	3
	Anhang 1.A Moduln und Algebren	11
2	Die Zariski-Topologie und reguläre Abbildungen	17
	Anhang 2.A Lokalisierungen	29
3	Garben und projektive Varietäten	33
	Anhang 3.A Exakte Sequenzen	47
4	Dimension und irreduzible Komponenten	52
5	Das Spektrum eines Rings	57
6	Endliche und ganze Ringerweiterungen	68
7	Dimension von endlich erzeugten $k$ -Algebren und Varietäten	74
	Anhang 7.A Der Transzendenzgrad	81
8	Krulls Hauptidealsatz und lokale Dimensionstheorie	84
9	Schemata	92
	Anhang 9.A Kategorien, Limiten und Funktoren	104
10	Beispiele und erste Eigenschaften von Schemata	113



## 0 Einführung

Die lineare Algebra hat ihren Ursprung in der Betrachtung von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

über einem Körper. Um die Lösungsmengen zu studieren, ihre Eigenschaften, ihre Größe, wird ein neues Konzept eingeführt: die Vektorräume. Deren Größe wird durch die Dimension bestimmt, hierfür braucht man wiederum Basen. Außerdem braucht man geeignete Abbildungen zwischen Vektorräumen; insbesondere erhält man so den Begriff der Isomorphie von Vektorräumen. Als sinnvolle Verallgemeinerung erhält man die Theorie von Moduln über Ringen, die auch für die Zahlentheorie wichtig ist.

Die algebraische Geometrie hat ihren Ursprung in der Betrachtung von polynomialen Gleichungssystemen

$$(0) \quad \begin{array}{rcl} f_1(x_1, \dots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_m(x_1, \dots, x_n) & = & 0 \end{array}$$

über einem Körper  $K$ . Hierbei sind  $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$ , also Polynome in mehreren Variablen mit Koeffizienten in  $K$ . Die Lösungsmengen sind im Allgemeinen keine Untervektorräume in  $K^n$  mehr, aber es wird wieder ein neues Konzept entwickelt, um diese Mengen zu verstehen: die algebraischen Varietäten. Für diese wird auch wieder ein Dimensionsbegriff entwickelt, und zwar mit der Hilfe von Ringen und Idealen. Es werden auch wieder geeignete Abbildungen zwischen Varietäten definiert, die sogenannten polynomialen Abbildungen, mit deren Hilfe man sagen kann, wann zwei Varietäten isomorph sind. Als sinnvolle Verallgemeinerung erhält man die Theorie der Schemata, die unabdingbar ist, wenn man den Grundkörper durch einen Ring ersetzt.

Betrachtet man polynomialen Gleichungen über  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{Z}$  (oder über Zahlkörpern, Zahlringen, endlichen Körpern), so spricht man von diophantischen Gleichungen, und man kommt zu zahlentheoretischen Fragen und Methoden, z.B. bei der Fermat-Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}).$$

Das Fermat-Problem wurde 1994 von Wiles und Taylor durch Anwendung der algebraischen Geometrie in ihrer modernsten Form (kein Grundkörper, Theorie der Schemata) gelöst.

Die Verbindung von Algebraischer Geometrie und Zahlentheorie nennt man auch Arithmetische Geometrie. Aber die Algebraische Geometrie hat interessante Anwendungen in vielen weiteren Gebieten, z.B. in der Algebra, der Topologie, der Gruppentheorie, der Kodierungstheorie, der mathematischen Physik und vielen anderen.

Die algebraische Geometrie verwendet eine geometrische Sprache und Sichtweise und benutzt die Theorie kommutativer Ringe – die sogenannte kommutative Algebra – um die geometrische Anschauung in exakte Definitionen und Sätze umzuwandeln. Dies beginnt im nächsten

Kapitel, in dem wir ein polynomiales Gleichungssystem (0) mit Ringtheorie in Verbindung setzen.

Vereinbarung: Alle Ringe seien kommutativ mit Eins, wenn nichts anderes erwähnt wird.

# 1 Hilberts Nullstellensatz

Der Zusammenhang zwischen dem polynomialen Gleichungssystem

$$(1) \quad \begin{aligned} f_1(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(X_1, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned}$$

und Ringen ist einfach: Man betrachtet den Ring

$$R = R(f_1, \dots, f_m) = k[X_1, \dots, X_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle,$$

wobei  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$  das von den Elementen  $f_1, \dots, f_m$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$  erzeugte Ideal bezeichnet (in der Literatur wird oft die Bezeichnung  $(f_1, \dots, f_m)$  verwendet). Wir wollen nun zeigen, dass es enge Beziehungen zwischen  $R$  und der Nullstellenmenge

$$Z(f_1, \dots, f_m) := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m\}$$

der  $f_i$  gibt, d.h., der Lösungsmenge der Gleichung (1).

**Satz 1.1** (Hilberts Nullstellensatz, 1. Form) Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Die maximalen Ideale von  $k[X_1, \dots, X_n]$  sind die Ideale von der Form

$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

mit  $a_1, \dots, a_n \in k$ .

Wir leiten dies aus der folgenden Version her:

**Satz 1.2** (Hilberts Nullstellensatz, 2. Form) Sei  $k$  beliebig. Ist  $\mathfrak{m} \subseteq R = R(f_1, \dots, f_m)$  ein maximales Ideal und  $L = R/\mathfrak{m}$  der Restklassenkörper, so ist  $L$  eine endliche Körpererweiterung von  $k$ .

**Satz 1.1 folgt aus Satz 1.2:** Zunächst beweisen wir, dass

$$\mathfrak{m} = \langle X - a_1, \dots, X - a_n \rangle$$

ein maximales Ideal ist. Sei  $a = (a_1, \dots, a_n)$  gegeben und

$$\varphi = \varphi_a : \begin{aligned} k[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow k \\ f &\mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

der Einsetzungshomomorphismus. Dieser ist surjektiv. Das Ideal  $\mathfrak{m}$  liegt offenbar im Kern, und wir erhalten mit dem Homomorphiesatz eine Surjektion

$$\bar{\varphi} : k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \rightarrow k.$$

Wir behaupten, dass  $\bar{\varphi}$  ein Isomorphismus ist (Dann ist gezeigt, dass  $\mathfrak{m}$  maximales Ideal ist, siehe Algebra I, 3.32 (b)). Wir konstruieren eine Umkehrabbildung  $\psi$ . Definiere

$$\psi : \begin{aligned} k &\rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \\ b &\mapsto \bar{b} = b \bmod \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Offenbar ist  $\bar{\varphi} \circ \psi = id$  und daher  $\psi$  injektiv. Andererseits ist  $\psi$  surjektiv, da  $X_i \equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}}$  für  $i = 1, \dots, n$  und damit  $f \equiv f(a_1, \dots, a_n) \pmod{\mathfrak{m}}$  für jedes  $f = f(X_1, \dots, X_n) \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Es folgt, dass  $\bar{\varphi}$  bijektiv ist.

Ist nun umgekehrt  $\mathfrak{m} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ein maximales Ideal, so ist  $L = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  ein Körper und nach Satz 1.2 (für  $m = 1$  und  $f_1 = 0$ ) eine endliche Erweiterung von  $k$ . Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so ist  $L = k$ . Dies bedeutet, dass die kanonische Abbildung

$$k \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\varphi} k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} = L$$

ein Körperisomorphismus ist. Sei  $a_i \in k$  das Element, das auf  $\bar{X}_i = X_i \pmod{\mathfrak{m}}$  in  $L$  abgebildet wird. Dann liegt  $X_i - a_i \in \ker \varphi = \mathfrak{m}$ , also  $\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}$ . Da das linke Ideal nach dem ersten Schritt maximal ist, folgt Gleichheit.

**Bemerkung 1.3** Der Beweis zeigt, dass  $a_1, \dots, a_n$  eindeutig durch  $\mathfrak{m}$  bestimmt sind.

Zum Beweis von Satz 1.2 benutzen wir:

**Lemma 1.4** (Artin-Tate) Seien  $R \subset S \subset T$  Ringe, sei  $R$  noethersch und  $T$  als  $R$ -Algebra endlich erzeugt. Sei weiter  $T$  als  $S$ -Modul endlich erzeugt. Dann ist auch  $S$  als  $R$ -Algebra endlich erzeugt.

**Definition 1.5** Seien  $R \subset S$  Ringe.

- (a)  $S$  wird ein  $R$ -Modul durch die Multiplikation in  $S$  ( $rs =$  Produkt in  $S$  für  $r \in R, s \in S$ ).
- (b)  $S$  ist auch eine  $R$ -Algebra. Sind  $x_1, \dots, x_n \in S$ , so sei

$$R[x_1, \dots, x_n] = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f \in R[X_1, \dots, X_n]\}$$

die Menge aller polynomialen Ausdrücke in den  $x_i$  mit Koeffizienten in  $R$ . Die ist die kleinste  $R$ -Unteralgebra von  $S$ , die  $x_1, \dots, x_n$  enthält.  $R[x_1, \dots, x_n]$  ist auch das Bild des Einsetzungsmorphismus

$$\begin{aligned} R[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow S \\ f &\mapsto f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

(c)  $S$  heißt als  $R$ -Algebra endlich erzeugt – oder von endlichem Typ über  $R$ , wenn es endlich viele Elemente  $x_1, \dots, x_n \in S$  gibt mit  $S = R[x_1, \dots, x_n]$ . Das heißt also, dass der Einsetzungshomomorphismus in (b) surjektiv ist. Äquivalent ist, dass es eine Surjektion  $R[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow S$  von  $R$ -Algebren gibt.

(d) Allgemeiner heißt eine  $R$ -Algebra  $S$  über einem Ring  $R$  endlich erzeugt, oder von endlichem Typ über  $R$ , wenn es einen surjektiven  $R$ -Algebrenhomomorphismus  $R[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow S$  gibt.

**Beweis von Lemma 1.4** Sei  $T = R[x_1, \dots, x_n]$ , und sei  $\{w_1, \dots, w_m\}$  ein Erzeugendensystem von  $T$  als  $S$ -Modul, welches  $x_1, \dots, x_n$  enthält. Dann gibt es  $a_\ell^{ik} \in S$  mit

$$(2) \quad w_i \cdot w_k = \sum_{\ell=1}^m a_\ell^{ik} w_\ell \quad (i, k, \ell = 1, \dots, m).$$

Für den Ring

$$S' = R[a_\ell^{ik} \mid i, k, \ell \in \{1, \dots, m\}] \subseteq S$$

wird dann  $T$  als  $S'$ -Modul von  $w_1, \dots, w_m$  erzeugt. Denn es gilt  $x_i \in S'w_1 + \dots + S'w_m$  und wegen (2) auch

$$x_i^2, x_i^3, \dots, x_i^r \in S'w_1 + \dots + S'w_m$$

für alle  $i = 1, \dots, m$  und alle  $r$ . Daher gilt  $T = R[x_1, \dots, x_n] = S'w_1 + \dots + S'w_m$ . Da  $R$  noethersch ist, ist auch  $S'$  noethersch, nach dem Hilbertschen Basissatz (Algebra I, 5.9, 5.10). Wegen  $S' \subset S \subset T$  ist also auch  $S$  ein endlich erzeugter  $S'$ -Modul, also eine endlich erzeugte  $R$ -Algebra, da dies für  $S'$  gilt (Übungsaufgabe).

**Lemma 1.6** Der rationale Funtionenkörper  $k(X) = \text{Quot}(k[X])$  ist nicht endlich erzeugt als  $k$ -Algebra.

**Beweis** Angenommen,  $k(X) = k[x_1, \dots, x_n]$  mit  $x_i \in k(X)$ . Sei

$$x_i = \frac{f_i(X)}{g_i(X)} \quad \text{mit} \quad f_i, g_i \in k[X].$$

Dann gilt für jedes  $Q \in k(X)$

$$Q = \frac{f(X)}{g(X)} \quad , \quad f, g \in k[X],$$

wobei der Nenner  $g(X)$  nur von den irreduziblen Polynomen  $p_1, \dots, p_r$  geteilt wird, die eins der  $g_i$  teilen. Dies sind nur endlich viele. Ist  $p(X)$  ein irreduzibles Polynom, das teilerfremd zu allen  $p_i$  ist, so ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{p} = \frac{f}{g}$$

den Widerspruch  $g = p \cdot f$ . Beachte: In  $k[X]$  gibt es unendlich viele irreduzible, paarweise nicht-assoziierte Polynome, nach demselben Schluss mit dem man zeigt, dass es unendlich viele Primzahlen  $p \in \mathbb{Z}$  gibt (Übungsaufgabe).

Damit führen wir nun den

**Beweis von Satz 1.2:** Es genügt zu zeigen

**Satz 1.7** (Hilberts Nullstellensatz, 3. (körpertheoretische) Form) Ist  $L/k$  eine Körpererweiterung und  $L = k[x_1, \dots, x_n]$  mit  $x_1, \dots, x_n \in L$ , so ist  $L/k$  endlich.

**Beweis** Wir führen Induktion über  $n$ . Ist  $n = 1$  und  $x_1$  transzendent über  $k$ , so ist  $k[x_1]$  isomorph zum Polynomring, also kein Körper ( $x_1$  ist nicht invertierbar). Also ist  $x_1$  algebraisch über  $k$  und damit  $k[x_1]$  endlich über  $k$ . Ist nun die Behauptung für  $n - 1$  bewiesen und  $L = k[x_1, \dots, x_n]$ , so ist auch  $L = k(x_1)[x_2, \dots, x_n]$ , und nach Induktionsvoraussetzung ist  $L$  endlich über  $k(x_1)$ . Nach Lemma 1.4, angewendet auf  $k \subseteq k(x_1) \subset L$ , ist  $k(x_1)$  endlich erzeugte  $k$ -Algebra. Nach Lemma 1.6 kann  $x_1$  nicht transzendent sein. Also ist  $x_1$  algebraisch, damit  $k(x_1)/k$  endlich, damit  $L/k$  endlich.

Wir leiten jetzt einige Folgerungen von Satz 1.1 ab.

**Corollar 1.8** Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Es gibt eine Bijektion

$$\begin{aligned} k^n &\rightarrow \text{Max}(k[X_1, \dots, X_n]) \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\text{Max}(R)$  die Menge der maximalen Ideale eines Rings  $R$  bezeichnet.

Dies folgt aus Satz 1.1 (Wohldefiniiertheit und Surjektivität) und Bemerkung 1.3 (Injektivität).

**Corollar 1.9** Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen, und seien  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Die Bijektion in 1.8 induziert eine Bijektion

$$\begin{aligned} Z(f_1, \dots, f_m) &\rightarrow \text{Max}(R(f_1, \dots, f_m)) \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto \langle \overline{X_1 - a_1}, \dots, \overline{X_n - a_n} \rangle. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\overline{X_i - a_i} = X_i - a_i \text{ mod } \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  das Bild von  $X_i - a_i$  in  $R(f_1, \dots, f_m) = k[X_1, \dots, X_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . (Dies zeigt, dass die Nullstellenmenge der  $f_i$  nur von dem Ring  $R(f_1, \dots, f_m)$  abhängt).

Zum Beweis benutzen wir

**Lemma 1.10** Sei  $A$  ein Ring und  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ein Ideal. Dann hat man zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\text{Ideale von } A' := A/\mathfrak{a}\} &\xrightarrow{\varphi} \{\text{Ideale } \mathfrak{b} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\} \\ \mathfrak{b}' &\xrightarrow{\psi} \pi^{-1}(\mathfrak{b}') \\ \mathfrak{b}/\mathfrak{a} &\xleftarrow{\quad} \mathfrak{b}, \end{aligned}$$

wobei  $\pi : A \twoheadrightarrow A' = A/\mathfrak{a}$  die kanonische Surjektion ist. Hierbei entsprechen sich die Primideale auf beiden Seiten und die maximalen Ideale auf beiden Seiten.

**Beweis** Es ist klar, dass die Abbildungen wohldefiniert und zueinander invers sind. Weiter gilt für  $\mathfrak{b}$  aus der rechten Menge und das zugehörige  $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  aus der linken Menge

$$A'/\mathfrak{b} = (A/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{b}.$$

Dies zeigt die weiteren Behauptungen, da  $\mathfrak{b}$  genau dann Primideal (bzw. maximales Ideal) ist, wenn  $A/\mathfrak{b}$  Integritätsring (bzw. Körper) ist; entsprechend für  $\mathfrak{b}'$ .

**Beweis von Corollar 1.9:** Mittels 1.10 können wir  $\text{Max}(R(f_1, \dots, f_m))$  mit der Menge

$$\{\mathfrak{m} \in \text{Max}(k[X_1, \dots, X_n]) \mid \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathfrak{m}\}$$

identifizieren. Sei nun  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(k[X_1, \dots, X_n])$ . Nach 1.8 ist  $\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$  mit eindeutig bestimmten  $a_1, \dots, a_n \in k$ . Weiter haben wir gesehen, dass  $\mathfrak{m}$  der Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{aligned} k[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow k \\ f &\mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

ist. Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  gilt also

$$f \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Zusammen ergibt sich für  $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$

$$\begin{aligned} \langle f_1, \dots, f_m \rangle &\subseteq \mathfrak{m} \\ \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m &\in \mathfrak{m} \\ \Leftrightarrow f_1(a) = \dots = f_m(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &\in Z(f_1, \dots, f_m). \end{aligned}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt weiter, dass

$$\langle \overline{X_1 - a_1}, \dots, \overline{X_n - a_n} \rangle = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

das maximale Ideal in  $R(f_1, \dots, f_m)$  ist, welches  $\mathfrak{m}$  unter der Bijektion 1.10 zugeordnet ist. Dies zeigt die Behauptung von 1.9.

Zusammenfassend haben wir also ein kommutatives Diagramm ( $k$  algebraisch abgeschlossener Körper)

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow[\text{bij.}]{1.8} & \text{Max}(k[X_1, \dots, X_n]) \\ \uparrow & & \uparrow 1.10 \\ Z(f_1, \dots, f_m) & \xrightarrow[\text{bij.}]{1.9} & \text{Max}(R(f_1, \dots, f_m)) \end{array}$$

(wobei 1.10 noch das Bild der rechten Injektion charakterisiert).

**Corollar 1.11** (3. Version von Hilberts Nullstellensatz) Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen und seien  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Dann hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

genau dann eine Lösung in  $k$ , wenn das Ideal  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$  nicht gleich  $k[X_1, \dots, X_n]$  ist.

**Beweis** Der Ring  $R(f_1, \dots, f_m)$  hat genau dann ein maximales Ideal, wenn er nicht der Nullring ist, d.h., wenn  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ .

**Bemerkung 1.12** Sei  $A$  ein Ring. Ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ist genau dann gleich  $A$ , wenn  $1 \in \mathfrak{a}$ . Also ist in der Situation von 1.11 das Gleichungssystem genau dann *unlösbar*, wenn es  $g_1, \dots, g_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt mit

$$1 = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m.$$

Für das Folgende bemerken wir, dass die Nullstellenmenge  $Z(f_1, \dots, f_m)$  von Polynomen  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  nur vom Ideal  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$  abhängt: Da jedes Element hieraus von der Form  $f = \sum_{i=1}^m g_i f_i$  mit  $g_i \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist, gilt

$$(4) \quad Z(f_1, \dots, f_m) = Z(\langle f_1, \dots, f_m \rangle),$$

wobei wir definieren:

**Definition 1.13** Für ein beliebiges Ideal  $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \dots, X_n]$  definiere seine Nullstellenmenge in  $k^n$  durch

$$Z(\mathfrak{a}) = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}.$$

**Bemerkung 1.14** (a) Da nach Hilberts Basissatz jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \dots, X_n]$  endlich erzeugt ist, zeigt (4), dass wir keine neuen Nullstellenmengen erhalten.

(b) Aus  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$  folgt offenbar  $Z(\mathfrak{a}') \subseteq Z(\mathfrak{a})$ .

(c) Der Ring  $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$  ist eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra. Ist umgekehrt  $A$  eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra, so gibt es eine Surjektion von  $k$ -Algebren  $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  für geeignetes  $n$ . Mit  $\mathfrak{a} = \ker \varphi$  erhält man eine Isomorphie  $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A$ . Die Ringe  $R(f_1, \dots, f_m)$  sind also gerade (bis auf Isomorphie) alle endlich erzeugten  $k$ -Algebren.

**Definition 1.15** Eine Teilmenge  $M \subseteq k^n$  heißt algebraisch, wenn  $M = Z(\mathfrak{a})$  für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ist (d.h., nach Bemerkung 1.14 (a), wenn  $M = Z(f_1, \dots, f_m)$  für Polynome  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist).

Umgekehrt können wir zu jeder Teilmenge  $M \subset k^n$  ein Ideal definieren:

**Definition 1.16** Sei  $M \subseteq k^n$  eine Teilmenge. Das Verschwindungsideal von  $M$  ist das Ideal

$$I(M) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(a) = 0 \text{ für alle } a \in M\}.$$

Dass dies ein Ideal liefert, ist offensichtlich. Weiter gilt offenbar:

$$(5) \quad M \subseteq M' \Rightarrow I(M') \subset I(M).$$

Wir haben also zwei Inklusions-umkehrende Abbildungen

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \{\text{Ideale von } k[X_1, \dots, X_n]\} & \xrightleftharpoons{Z} & \{\text{Teilmengen von } k^n\} \\ & \xrightarrow{I} & \\ \mathfrak{a} & \mapsto & Z(\mathfrak{a}) \\ I(M) & \leftarrow & M \end{array}$$

Dabei gilt offenbar

$$(7) \quad \begin{array}{l} M \subseteq Z(I(M)) \\ \mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a})). \end{array}$$

Das Bild von  $Z$  besteht per Definition aus den algebraischen Teilmengen. Wir untersuchen nun das Bild von  $I$ .

**Lemma/Definition 1.17** Sei  $R$  ein Ring (kommutativ, mit Eins).

(a) Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n \in \mathfrak{a}\}$$

ein Ideal und heißt das Radikal von  $\mathfrak{a}$ .

(b) Das Ideal

$$\text{nil}(R) := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n = 0\} = \sqrt{(0)}$$

heißt das Nilradikal von  $R$ , seine Elemente die nilpotenten Elemente von  $R$ .

(c) Ein Ring  $R$  heißt reduziert, wenn  $\text{nil}(R) = (0)$ .

**Beweis** dass  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  ein Ideal ist: Seien  $a, b \in \sqrt{\mathfrak{a}}, r \in R$ ; dann gibt es  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $a^m, b^n \in \mathfrak{a}$ . Hieraus folgt  $(ra)^m = r^m a^m \in \mathfrak{a}$  d.h.,  $ra \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Weiter gilt

$$(a+b)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} a^k b^{m+n-k} \in \mathfrak{a},$$

da  $b^{m+n-k} \in \mathfrak{a}$  für  $0 \leq k \leq m$  und  $a^k \in \mathfrak{a}$  für  $m \leq k$ . Es ist also  $a+b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

**Bemerkung 1.18** Offenbar gilt:

- (a)  $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$
- (b)  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$
- (c)  $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$
- (d)  $\text{nil}(R/\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}/\mathfrak{a}$
- (e)  $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$  für ein Primideal  $\mathfrak{p}$ .

**Lemma 1.19** Ist  $M \subset k^n$  eine Teilmenge, so gilt für das Verschwindungsideal

$$I(M) = \sqrt{I(M)}.$$

Dies ist klar: Ist  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  und gilt  $f^m \in I(M)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , also  $f(a)^m = 0$  für alle  $a \in M$ , so ist auch  $f(a) = 0$  für alle  $a \in M$ , also  $f \in I(M)$ ; die andere Richtung ist trivial.

**Lemma/Definition 1.20** Für ein Ideal  $\mathfrak{a}$  in einem Ring  $R$  sind äquivalent:

- (a)  $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ .
- (b)  $R/\mathfrak{a}$  ist reduziert.

Gelten diese Eigenschaften, so heißt  $\mathfrak{a}$  Radikalideal.

Die Äquivalenz folgt aus 1.18 (d). Nach 1.19 ist also jedes Verschwindungsideal ein Radikalideal. Der nächste Satz liefert eine Umkehrung, falls  $k$  algebraisch abgeschlossen ist.

**Satz 1.21** (4. Form des Hilbertschen Nullstellensatzes) Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  gilt

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

**Beweis** (nach Rabinowitsch) Sei  $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  und sei  $0 \neq f \in I(Z(f_1, \dots, f_m))$ . Betrachte eine zusätzliche Variable  $T$  und das Ideal

$$\mathfrak{b} = \langle f_1, \dots, f_m, f \cdot T - 1 \rangle \subseteq k[X_1, \dots, X_n, T].$$

Dann ist  $Z(\mathfrak{b}) = \emptyset$ , denn für  $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b) \in Z(\mathfrak{b}) \subseteq k^{n+1}$  ist  $f_1(a) = \dots = f_m(a) = 0$ , also  $a \in Z(f_1, \dots, f_m)$ , also  $f(a) = 0$  nach Voraussetzung. Dann ist aber  $f \cdot b - 1 = -1 \neq 0$ ; Widerspruch.

Nach Corollar 1.11 ist also  $\mathfrak{b} = k[X_1, \dots, X_n, T]$ , d.h., es gibt  $g_1, \dots, g_{m+1} \in k[X_1, \dots, X_n, T]$  mit

$$1 = \sum_{i=1}^m g_i f_i + g_{m+1}(f \cdot T - 1).$$

Setzen wir nun  $T = \frac{1}{f}$  (im Quotientenkörper) und multiplizieren wir mit einer genügend hohen Potenz  $f^r$ , so erhalten wir eine Gleichung

$$f^r = \sum_{i=1}^m h_i f_i$$

mit  $h_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Es ist also  $f^r \in \mathfrak{a}$  und damit  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Die umgekehrte Inklusion ist einfach: nach (7) ist  $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$ , und mit 1.18 (b) und 1.19 folgt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{I(Z(\mathfrak{a}))} = I(Z(\mathfrak{a})).$$

**Corollar 1.22** Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Radikalideale von } \mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]\} & \xrightleftharpoons{Z} & \{\text{algebraische Mengen in } k^n\} \\ & \begin{array}{c} \mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a}) \\ I(Z) \leftarrow Z \end{array} & \end{array}$$

zueinander inverse Bijektionen.

**Beweis** Die Wohldefiniertheit der Abbildungen und die Beziehung  $I(Z(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$  für ein Radikalideal haben wir schon gesehen. Weiter wissen wir nach (7) die Beziehung

$$Z \subseteq Z(I(Z)).$$

Ist umgekehrt  $Z = Z(f_1, \dots, f_m)$ , so sind  $f_1, \dots, f_m \in I(Z)$  und daher

$$Z(I(Z)) \subseteq Z(f_1, \dots, f_m) = Z.$$

Also gilt  $Z = Z(I(Z))$  (falls  $Z$  algebraisch ist).

## 1.A Moduln und Algebren

Ein Modul ist ein "Vektorraum über einem Ring":

**Definition 1.A.1** Ein Modul  $M$  über einem Ring  $R$  (oder  $R$ -Modul) ist eine abelsche Gruppe mit einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto rm \end{aligned}$$

so dass gilt

$$\left. \begin{aligned} (r+s)m &= rm + sm \\ r(m+n) &= rm + rn \\ r(sm) &= (rs)m \end{aligned} \right\} \text{ für } r, s \in R, m, n \in M$$

Ist  $R$  ein Ring mit Eins, so heißt  $M$  unitär, wenn

$$1m = m \text{ für alle } m \in M.$$

Im folgenden betrachten wir nur unitäre Moduln, falls nichts anderes gesagt wird.

**Definition 1.A.2** (a) Ein  $R$ -Modul-Homomorphismus (oder  $R$ -lineare Abbildung) ist eine Abbildung

$$\varphi : M \rightarrow N$$

von  $R$ -Moduln mit

$$\begin{aligned} \varphi(m+n) &= \varphi(m) + \varphi(n) \\ \varphi(rm) &= r\varphi(m) \end{aligned}$$

für alle  $m, n \in M$  und  $r \in R$ .

(b) Eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \rightarrow N$  heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Monomorphismus} \\ \text{Epimorphismus} \\ \text{Isomorphismus} \end{array} \right\} \text{ wenn } \varphi \left\{ \begin{array}{l} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

(c) Ein Untermodul eines  $R$ -Moduls  $M$  ist eine Untergruppe  $N \subseteq M$  mit  $rn \in N$  für alle  $r \in R, n \in N$ .

Es ist dann  $N$  wieder ein  $R$ -Modul, die Inklusion ein  $R$ -Modulhomomorphismus, und man kann den Faktormodul  $M/N$  bilden - dabei gelten die üblichen Homomorphiesätze. Man hat die üblichen Bildungen und Begriffe: von einer Teilmenge  $X \subseteq M$  erzeugter Untermodul, Erzeugendensystem, Produkte  $\prod_{i \in I} M_i$ , Summen  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ , ganz wie bei abelschen Gruppen.

**Beispiele 1.A.3** (a)  $R$  ist ein Modul über sich selbst bezüglich der Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ .

(b) Die  $R$ -Untermoduln von  $R$  sind gerade die Ideale von  $R$ !

(c) Jede abelsche Gruppe  $A$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -Modul vermöge

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} & \text{(induktiv definiert) } , n > 0 \\ 0 & , n = 0 \\ -|n|a & , n < 0 \end{cases}$$

Umgekehrt ist ein  $\mathbb{Z}$ -Modul dasselbe wie eine abelsche Gruppe.

(d) Analog zur freien abelschen Gruppe hat man den freien Modul  $F(I)$  auf einer Menge  $I$ . Das ist der Modul der formalen Linearkombinationen  $\sum_{i \in I} r_i e_i$  mit Basiselementen  $e_i$  ( $i \in I$ ), wobei  $r_i \in R$ , mit  $r_i = 0$  für fast

alle  $i \in I$ . Formal ist  $F(I) = \bigoplus_{i \in I} R$ ; in dieser Beschreibung ist  $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$ , so dass  $(r_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} r_i e_i$ .  $F(I)$  hat die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und  $(m_i)_{i \in I}$  eine mit  $i \in I$  indizierte Familie von Elementen in  $M$ , so gibt es genau einen  $R$ -Modul-Homomorphismus

$$\varphi : F(I) \rightarrow M$$

mit  $\varphi(e_i) = m_i$ , nämlich  $\varphi(\sum_{i \in I} r_i e_i) = \sum_{i \in I} r_i m_i$ . Der  $R$ -Modul  $M$  heißt frei mit Basis  $(m_i)_{i \in I}$ , wenn das obige  $\varphi$  ein Isomorphismus ist. Äquivalent hierzu ist, dass jedes Element  $m \in M$  eine eindeutige Darstellung  $m = \sum_{i \in I} r_i m_i$  besitzt, wobei die  $r_i \in R$  sind und fast alle 0. Weiter äquivalent ist, dass die  $m_i$  den Modul  $M$  erzeugen und linear unabhängig sind ( $\sum r_i m_i = 0 \Rightarrow r_i = 0$  für alle  $i \in I$ ).

**Satz/Definition 1.A.4** (Tensorprodukt) (a) Für zwei  $R$ -Moduln  $M, N$  gibt es (bis auf eindeutige Isomorphie) einen eindeutig bestimmten  $R$ -Modul  $M \otimes_R N$  mit der folgenden universellen Eigenschaft: Es gibt eine  $R$ -bilineare Abbildung  $\psi_{univ} : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  so, dass für jede  $R$ -bilineare Abbildung  $\psi : M \times N \rightarrow P$  in einem  $R$ -Modul  $P$  ein eindeutig bestimmter  $R$ -Modul-Hom.  $\tilde{\psi} : M \otimes_R N \rightarrow P$  existiert mit  $\psi = \tilde{\psi} \circ \psi_{univ}$ :

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\psi_{univ}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \psi & \swarrow \exists! \tilde{\psi} \\ & & P \end{array}$$

Das Element  $\psi_{univ}((a, b))$  wird mit  $a \otimes b$  bezeichnet.

(b) Jedes Element in  $M \otimes_R N$  ist von der Form

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_n \in M, b_1, \dots, b_n \in N$ .

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} (a + a') \otimes b &= a \otimes b + a' \otimes b \\ a \otimes (b + b') &= a \otimes b + a \otimes b' \\ ra \otimes b &= r(a \otimes b) = a \otimes rb \end{aligned}$$

**Zum Beweis:** Man kann  $M \otimes_R N$  durch “Erzeugende und Relationen” definieren, nämlich durch

$$M \otimes_R N = F(M \times N)/U,$$

wobei  $F(M \times N)$  der freie  $R$ -Modul auf  $M \times N$  ist und

$$U = \langle (rm + r'm', n) - r(m, n) - r'(m', n), (m, sn + s'n') - s(m, n) - s'(m, n') \rangle_R$$

der von den angegebenen Elementen (mit  $m, m' \in M, n, n' \in N$  und  $r, r', s, s' \in R$ ) erzeugte Untermodul. Wir schreiben hier zur Vereinfachung  $(m, n)$  für das zu  $(m, n)$  gehörige Basiselement von  $F(M \times N)$ . Durch das Herausdividieren von  $U$ , also der richtigen “Relationen”, wird gerade erreicht, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \psi_{univ} : M \times N & \rightarrow & F(M \times N) & \rightarrow & F(M \times N)/U \\ (m, n) & \mapsto & (m, n) & \mapsto & m \otimes n := \text{Klasse von } (m, n) \end{array}$$

bilinear ist, und die universelle Eigenschaft ergibt sich aus der universellen Eigenschaft von  $F(M \times N)$ . Die Aussage in (b) folgt aus der Konstruktion, und (c) ist gerade die Bilinearität von  $\psi_{univ}$ . Die Details seien den Lesern überlassen.

Im folgenden braucht man nur die in 1.A.4 stehenden Eigenschaften, nicht die Konstruktion des Tensorproduktes! Dies gilt zum Beispiel für den Beweis von

**Proposition 1.A.5** Es gibt kanonische Isomorphismen für  $R$ -Moduln  $M, N, P$ :

- (a)  $R \otimes_R M \cong M$
- (b)  $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$
- (c)  $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$ .

**Beweis** von (b): Wir haben eine Abbildung

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\rightarrow N \otimes_R M \\ m \otimes n &\mapsto n \otimes m \quad \text{für } m \in M, n \in N. \end{aligned}$$

Dies soll heißen: diese Abbildung ist wohldefiniert, weil sie aufgrund der universellen Eigenschaft von der bilinearen (folgt mit 1.A.4 (c)!) Abbildung

$$\begin{aligned} M \times N &\rightarrow M \otimes_R N \\ (m, n) &\mapsto m \otimes n \end{aligned}$$

induziert wird. Die Umkehrabbildung ist dann die analoge Abbildung

$$\begin{aligned} N \otimes_R M &\rightarrow M \otimes_R N \\ n \otimes m &\mapsto m \otimes n. \end{aligned}$$

Um dies nachzurechnen, braucht man nur die Verknüpfung auf den Erzeugenden  $m \otimes n$  auszurechnen, wo die Behauptung trivial ist.

Entsprechend werden die Isomorphismen in (a) und (c) “gegeben” durch

$$r \otimes m \mapsto rm$$

(mit Umkehrabbildung  $m \mapsto 1 \otimes m$ ) beziehungsweise

$$(m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p)$$

(mit Umkehrabbildung  $m \otimes (n \otimes p) \mapsto (m \otimes n) \otimes p$ ).

**Lemma 1.A.6** Für  $R$ -Moduln  $M, N$  werden die Mengen

$$Abb(M, N) := \text{Menge aller Abbildungen } f : M \rightarrow N$$

$$Hom_R(M, N) := \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ } R\text{-Modul-Homomorphismus}\}$$

zu  $R$ -Moduln vermöge der Definition

$$\begin{aligned} (f + g)(m) &= f(m) + g(m) \\ (rf)(m) &= r(f(m)) \end{aligned}$$

$Hom_R(M, N)$  ist ein Untermodul von  $Abb(M, N)$ .

**Beweis** selbst.

**Satz 1.A.7** Für  $R$ -Moduln  $M, N, P$  gibt es einen kanonischen  $R$ -Modul-Isomorphismus

$$Hom_R(M, Hom_R(N, P)) \cong Hom_R(M \otimes_R N, P)$$

(Dies ist eine alternative Möglichkeit das Tensorprodukt zu charakterisieren!)

**Beweis:** Sei  $Bil_R(M \times N, P)$  die Menge der  $R$ -bilinearen Abbildungen von  $M \times N$  nach  $P$ . Dies ist ein Untermodul von  $Abb(M \times N, P)$  (nachrechnen!) und man erhält eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi : Hom_R(M, Hom_R(N, P)) &\xrightarrow{\sim} Bil_R(M \times N, P) \\ \psi &\mapsto (\phi_\psi : (m, n) \mapsto \psi(m)(n)) \end{aligned}$$

( $\phi_\psi$  ist offenbar bilinear!). Die Umkehrabbildung ist

$$(\psi_\phi : m \mapsto (n \mapsto \phi(m, n))) \leftrightarrow \phi$$

( $n \mapsto \phi(m, n)$  und  $\psi_\phi$  und  $R$ -linear!).

Weiter ist die Bijektion  $\Phi$   $R$ -linear:  $r\psi + r'\psi'$  wird auf die Abbildung

$$\begin{aligned} (m, n) &\mapsto (r\psi + r'\psi')(m)(n) \\ &= (r\psi(m) + r'\psi'(m))(n) \\ &= r(\psi(m)(n)) + r'(\psi'(m)(n)) \end{aligned}$$

abgebildet, also auf  $r\phi_\psi + r'\phi_{\psi'}$ .

Durch Verknüpfung mit der Bijektion (universelle Eig.)

$$\text{Bil}_R(M \times N, P) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(M \otimes_R N, P),$$

die ebenfalls  $R$ -linear ist (mit der universellen Eigenschaft nachrechnen!) erhält man den gewünschten Isomorphismus von  $R$ -Moduln.

**Definition 1.A.8** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Dann wird  $B$  zu einem  $A$ -Modul durch die Verknüpfung

$$ab := \varphi(a) \cdot b \quad \text{für } a \in A, b \in B.$$

Die Schreibweise  $ab$  bedeutet im folgenden immer diese Verknüpfung. Genauer gesagt wird  $B$  hierdurch zu einer  $A$ -Algebra. Dies ist ein Ring mit einer  $A$ -Modul-Struktur derart, dass die Addition im Ring  $B$  und im  $A$ -Modul  $B$  übereinstimmt und dass

$$\begin{aligned} (ab) \cdot b' &= a(b \cdot b') \\ (aa')b &= a(a'b) \end{aligned}$$

für alle  $a, a' \in A$  und  $b, b' \in B$ , wobei hier der Punkt für die Ringmultiplikation in  $B$  steht, aber im Folgenden auch meist weggelassen wird. Hat man umgekehrt eine  $A$ -Algebra  $B$  mit Eins derart, dass  $1_A b = b$  für die Eins  $1_A$  in  $A$  und alle  $b \in B$  (d.h. ist  $B$  ein unitärer  $A$ -Modul), so erhält man einen Ringhomomorphismus (von Ringen mit Eins)

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto a1_B \end{aligned}$$

und die Konstruktionen sind zueinander invers. Im Folgenden betrachten wir für gegebenes  $\varphi$  immer diese  $A$ -Modul und  $A$ -Algebra-Struktur von  $B$ .

**Lemma/Definition 1.A.9** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus und  $M$  ein  $A$ -Modul.

(a) Dann wird

$$B \otimes_A M$$

zu einem  $B$ -Modul durch die Definition

$$b' \cdot (b \otimes m) := b' \cdot b \otimes m$$

(für  $b, b' \in B, m \in M$ ) und heißt die Skalarerweiterung von  $M$  (mit  $\varphi$  oder zu  $B$ ). Die Abbildung  $M \rightarrow B \otimes_A M, m \mapsto 1 \otimes m$  ist ein  $A$ -Modul-Homomorphismus.

(b) Es gilt die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $N$  ein  $B$ -Modul und  $\varphi : M \rightarrow N$  ein Morphismus von  $A$ -Moduln, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus  $\varphi_B : B \otimes_A M \rightarrow N$  von  $B$ -Moduln, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m \mapsto 1 \otimes m} & B \otimes_A M \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \varphi_B \\ & N & \end{array}$$

kommutativ macht.

**Beweis:** (a) Wohldefiniertheit: Zu  $b'$  definiere die Abb.

$$\begin{aligned} \psi_{b'} &: B \times M \rightarrow B \otimes_A M \\ (b, m) &\mapsto b'b \otimes m \end{aligned}$$

Diese ist  $A$ -bilinear und definiert also eine  $A$ -lineare Abb.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{b'} &: B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A M \\ \text{mit } b \otimes m &\mapsto b'b \otimes m, \end{aligned}$$

die wir als die Multiplikation mit  $b'$  definieren; es sei also  $b'y = \tilde{\psi}_{b'}(y)$  für  $y \in B \otimes_A M$ . Die Modulaxiome sind neben der Additivität von  $\tilde{\psi}_{b'}$  die Eigenschaften

$$\tilde{\psi}_1 = id, \quad \tilde{\psi}_{(b'+b'')} = \tilde{\psi}_{b'} + \tilde{\psi}_{b''} \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}_{(b'' \cdot b')} = \tilde{\psi}_{b''} \circ \tilde{\psi}_{b'},$$

und diese gelten, weil sie für die  $\psi$ 's gelten. Der Zusatz ist klar.

(b):  $\varphi_B$  ist die eindeutig bestimmte Abbildung mit  $\varphi_B(b \otimes m) = b\varphi(m)$  für  $b \in B$  und  $m \in M$ . Dieser leistet das Gewünschte.

**Proposition 1.A.10** Seien  $\varphi : A \rightarrow B$  und  $\psi : A \rightarrow C$  Ringhomomorphismen. Dann hat  $B \otimes_A C$  eine eindeutig bestimmte  $A$ -Algebren-Struktur, für die gilt:

$$b \otimes c \cdot b' \otimes c' = bb' \otimes cc'$$

**Beweis:** Nur die Wohldefiniertheit ist zu zeigen! Nach Konstruktion ist  $B \otimes_A C$  ein  $A$ -Modul.

Nach 1.A.9 wird  $B \otimes_A C$  ein  $B$ -Modul mit  $b(b' \otimes c') = bb' \otimes c'$  für  $b, b' \in B$  und  $c' \in C$ .

Analog wird  $B \otimes_A C$  ein  $C$ -Modul (Operation rechts geschrieben), wobei  $(b' \otimes c') \cdot c = b' \otimes c'c$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} B \times C &\rightarrow \text{Hom}_A(B \otimes_A C, B \otimes_A C) \\ (b, c) &\mapsto (\alpha \mapsto bac) \end{aligned}$$

$A$ -bilinear, induziert also nach Satz 1.A.8 eine  $A$ -lineare Abbildung

$$\psi : B \otimes_A C \rightarrow \text{Hom}_A(B \otimes_A C, B \otimes_A C)$$

also eine  $A$ -bilineare Verknüpfung

$$\begin{aligned} B \otimes_A C \times B \otimes_A C &\rightarrow B \otimes_A C \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta := \psi(\alpha)(\beta) \end{aligned}$$

für die gilt:

$$\begin{aligned} (b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') &= bb' \otimes cc' \\ (b \otimes c) \cdot (\alpha + \beta) &= (\beta \otimes c) \cdot \alpha + (b \otimes c) \cdot \beta \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass  $B \otimes_A C$  ein kommutativer Ring mit eins 1 wird (nachrechnen!).

**Satz 1.A.11** (a) Die Abbildungen

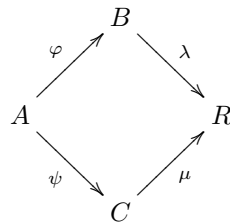
$$\begin{aligned} i_B : B &\rightarrow B \otimes_A C & b &\mapsto b \otimes 1 \\ i_C : C &\rightarrow B \otimes_A C & c &\mapsto 1 \otimes c \end{aligned}$$

sind Ringhomomorphismen, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \varphi \nearrow & & \searrow i_B \\ A & & B \otimes_A C \\ \psi \searrow & & \nearrow i_C \\ & C & \end{array}$$

kommutiert, d.h., es ist  $i_B\varphi = i_C\psi$ .

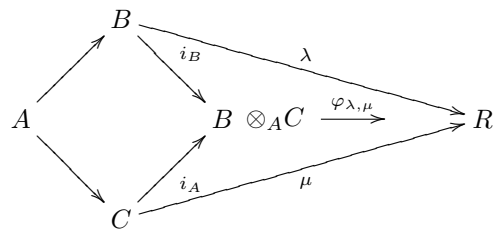
(b) (universelle Eigenschaft) Ist



ein kommutatives Diagramm von Ringhomomorphismen, so gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\varphi_{\lambda,\mu} : B \otimes_A C \rightarrow R$$

der das Diagramm



kommutativ macht.

**Beweis:** (a): selbst

(b)

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mu : B \times C &\rightarrow R \\ (b, c) &\mapsto \lambda(b) \cdot \mu(c) \end{aligned}$$

ist  $A$ -bilinear und induziert daher nach 1.A.4 einen eindeutig bestimmten Morphismus von  $A$ -Moduln

$$v : B \otimes_A C \longrightarrow R$$

Dieser leistet das Gewünschte (nachrechnen!).

## 2 Die Zariski-Topologie und reguläre Abbildungen

In Analogie zur Formel  $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$  aus 1.21 kann man sich noch fragen, was die Beziehung zwischen

$$Z(I(M)) \quad \text{und} \quad M$$

für beliebige Mengen  $M \subseteq k^n$  ist. Die Antwort ist topologisch:

**Lemma 2.1** Für Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i$  ( $i \in I$ ) in  $k[X_1, \dots, X_n]$  gilt

$$(a) \quad Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

$$(b) \quad \bigcap_{i \in I} Z(\mathfrak{a}_i) = Z\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

Weiter gilt

$$(c) \quad Z(R) = \emptyset, \quad Z(\{0\}) = k^n.$$

**Beweis** (b) und (c) sind offensichtlich.

(a): Wegen  $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  und 1.14 (b) gilt

$$Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b}) \subseteq Z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq Z(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Ist andererseits  $a \notin Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$ , so gibt es ein  $f \in \mathfrak{a}$  mit  $f(a) \neq 0$  und ein  $g \in \mathfrak{b}$  mit  $g(a) \neq 0$ . Dann ist  $f \cdot g \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$  und  $(f \cdot g)(a) \neq 0$ , also  $a \notin Z(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ .

Diese Eigenschaften zeigen, dass die algebraischen Mengen  $Z(\mathfrak{a})$  die abgeschlossenen Mengen einer Topologie bilden (die Komplemente erfüllen die Axiome für die offenen Mengen einer Topologie).

**Definition 2.2** Die Zariski-Topologie auf  $k^n$  ist die eindeutig bestimmte Topologie, für die die abgeschlossenen Mengen die algebraischen Mengen  $Z(\mathfrak{a})$  sind.

**Satz 2.3** Ist  $M \subseteq k^n$ , so ist

$$Z(I(M)) = \overline{M},$$

der Abschluss von  $M$  in der Zariski-Topologie.

**Beweis** Es ist

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{Z \text{ abgeschlossen} \\ M \subseteq Z}} Z.$$

Für eine abgeschlossene Menge  $Z = Z(\mathfrak{a})$  gilt aber  $M \subset Z$  genau dann, wenn  $f(a) = 0$  für alle  $a \in M$  und alle  $f \in \mathfrak{a}$ , d.h., wenn  $\mathfrak{a} \subseteq I(M)$ . Es ist also

$$\overline{M} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq I(M)} Z(\mathfrak{a}) \stackrel{2.1}{=} Z\left(\sum_{\mathfrak{a} \subseteq I(M)} \mathfrak{a}\right) = Z(I(M)).$$

Die folgenden Mengen sind nützlich für das Arbeiten mit der Zariski-Topologie; sie sind gewissermaßen das Analogon der  $\varepsilon$ -Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  (mit der üblichen Topologie).

**Proposition/Definition 2.4** (a) Für jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist die Menge

$$D(f) = \{a \in k^n \mid f(a) \neq 0\}$$

offen und heißt Standard-offene Menge.

(b) Die Standard-offenen Mengen bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

**Beweis** (a) Das Komplement von  $D(f)$  ist die abgeschlossene Menge  $Z(f)$ .

(b) Ist  $U \subseteq k^n$  offen, mit Komplement  $Z = Z(\mathbf{a})$  und ist  $\mathbf{a} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , so ist  $Z = \bigcap_{i=1}^m Z(f_i)$ , also  $U = \bigcup_{i=1}^m D(f_i)$ .

Wir betrachten nun die Frage, was die passenden Abbildungen zwischen algebraischen Mengen sind. Dabei müssen wir auch Mengen in  $k^m$  und  $k^n$  für  $m \neq n$  betrachten: zum Beispiel sollten wir erwarten, dass die  $x$ -Achse in  $k^2$ ,

$$Z_1 = Z(Y) = \{(x, y) \in k^2 \mid y = 0\} \subseteq k^2$$

isomorph zu

$$Z_2 = Z(0) = k \subseteq k$$

oder auch zur  $x$ -Achse

$$Z_3 = Z(Y, Z) = \{(x, y, z) \in k^3 \mid y = z = 0\} \subseteq k^3$$

sein sollte. Seien also

$$\begin{aligned} Z = Z(\mathbf{a}) &\subseteq k^n & , & & \mathbf{a} &\subseteq k[X_1, \dots, X_n], \\ Z' = Z(\mathbf{b}) &\subseteq k^m & , & & \mathbf{b} &\subseteq k[Y_1, \dots, Y_m] \end{aligned}$$

algebraische Mengen. Angesichts von polynomialen Gleichungen scheinen die richtigen Abbildungen

$$\varphi : k^n \rightarrow k^m$$

die polynomialen Abbildungen zu sein, also Abbildungen  $\varphi$ , für die es  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt mit

$$\varphi(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a)) \quad \text{für } a \in k^n.$$

Ist  $k$  ein endlicher Körper, so müssen die Polynome  $f_i$  nicht eindeutig durch  $\varphi$  bestimmt sein. Sie sind es aber, falls  $k$  unendlich ist.

Weiter kann  $Z(\mathbf{a})$  für einen nicht algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  leer sein, obwohl  $\mathbf{a} \neq k[X_1, \dots, X_n]$  ist: Zum Beispiel ist für  $k = \mathbb{R}$  und  $\mathbf{a} = \langle X^2 + 1 \rangle \subsetneq k[X, Y]$  die algebraische Menge

$$Z(X^2 + 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

Deswegen sei  $k$  im Folgenden algebraisch abgeschlossen.

**Definition 2.5** In diesem Fall nennt man algebraische Mengen  $Z(\mathbf{a}) \subseteq k^n$  auch affine (algebraische)  $k$ -Varietäten, oder affine (algebraische) Varietäten über  $k$ .

**Bemerkung 2.6** In klassischer Literatur spricht man nur von Varietäten, wenn  $\mathfrak{a}$  ein Primideal ist, d.h., wenn  $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$  ein Integritätsring ist. Wir folgen dieser Konvention nicht.

**Definition 2.7** (a) Sei  $Z \subseteq k^n$  eine affine (algebraische)  $k$ -Varietät. Eine Abbildung

$$\varphi : Z \rightarrow k$$

heißt reguläre Funktion, wenn sie polynomial ist, d.h., wenn es ein  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt mit  $\varphi(a) = f(a)$  für alle  $a \in Z$ . Sei  $\mathcal{O}(Z)$  der Ring der regulären Funktionen auf  $Z$  (Die Verknüpfung ist definiert durch  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ ).

(b) Seien  $Z \subseteq k^n$  und  $Z' \subseteq k^m$  affine  $k$ -Varietäten. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : Z &\rightarrow Z' \\ a &\mapsto (\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)) \end{aligned}$$

heißt regulär, wenn die Komponenten  $\varphi_i$  reguläre Funktionen sind. Sei  $Hom_{reg}(Z, Z')$  die Menge der regulären Abbildungen von  $Z$  nach  $Z'$ .

Man beachte, dass (a) ein Spezialfall ( $Z' = k$ ) von (b) ist. Offenbar sind Kompositionen von regulären Abbildungen wieder regulär (Einsetzung von Polynomen in Polynome ergibt wieder Polynome).

**Satz 2.8** (a) Ist  $Z \subseteq k^n$  eine affine  $k$ -Varietät, so hat man einen kanonischen Isomorphismus von  $k$ -Algebren

$$k[X_1, \dots, X_n]/I(Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Z).$$

(b) Sind  $Z, Z'$  affine  $k$ -Varietäten, so hat man eine kanonische Bijektion

$$\alpha : Hom_{reg}(Z, Z') \xrightarrow{\text{bij.}} Hom_k(\mathcal{O}(Z'), \mathcal{O}(Z)),$$

wobei rechts die Menge der  $k$ -Algebren-Homomorphismen steht.

Durch diesen Satz wird die Theorie der affinen  $k$ -Varietäten und regulären Abbildungen vollständig auf die Theorie der reduzierten, endlich erzeugten  $k$ -Algebren zurückgeführt! Genauer erhält man eine kontravariante Kategorien-Äquivalenz (Algebra II, §15),

$$\begin{aligned} \{\text{affine } k\text{-Varietäten}\} &\xrightarrow{\sim} \{\text{reduzierte, endlich erzeugte } k\text{-Algebren}\} \\ Z &\mapsto \mathcal{O}(Z). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** (a) Ist  $Z = Z(\mathfrak{a}) \subseteq k^n$ , so ist  $\mathcal{O}(Z) = k[X_1, \dots, X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}$  nach 1.21.

(b)  $\mathcal{O}(Z)$  wird auch der Koordinatenring von  $Z$  genannt.

**Beweis von Satz 2.8** (a): Nach Definition haben wir eine Surjektion

$$\begin{aligned} k[X_1, \dots, X_n] &\twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z) \\ f &\mapsto \varphi \text{ mit } \varphi(a) = f(a), \end{aligned}$$

und der Kern ist gerade  $I(Z)$ , das Verschwindungsideal von  $Z$ . Die Behauptung folgt also aus dem Homomorphiesatz.

(b) Sei  $\varphi : Z \rightarrow Z'$  eine reguläre Abbildung. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi^* : \mathcal{O}(Z') &\rightarrow \mathcal{O}(Z) \\ \psi &\mapsto \varphi^*(\psi) := \psi \circ \varphi.\end{aligned}$$

Wir bilden also  $\psi : Z' \rightarrow k$  auf  $Z \xrightarrow{\varphi} Z' \xrightarrow{\psi} k$  ab. Es ist klar, dass  $\varphi^*$  ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus ist, d.h., dass  $\varphi^*(\psi_1 + \psi_2) = \varphi^*(\psi_1) + \varphi^*(\psi_2)$ .

Wir zeigen nun, dass die Zuordnung

$$\alpha : \varphi \mapsto \varphi^*$$

bijektiv ist.

*Injektivität:* Sei  $Z' \subseteq k^m$  und sei

$$k[Y_1, \dots, Y_m] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z')$$

die Surjektion aus (a). Das Bild von  $Y_i$  in  $\mathcal{O}(Z')$  ist nach Definition gerade die reguläre Funktion

$$\pi_i = Z' \hookrightarrow k^m \xrightarrow{pr_i} k,$$

wobei  $pr_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente ist.

Also ist  $\varphi^*(\pi_i) = \pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ , die  $i$ -te Komponente von  $\varphi$ . Dies zeigt, dass  $\varphi$  durch  $\varphi^*$  bestimmt ist.

*Surjektivität:* Ist umgekehrt  $\beta : \mathcal{O}(Z') \rightarrow \mathcal{O}(Z)$  ein  $k$ -Algebrenhomomorphismus, so sei  $\varphi_i = \beta(\pi_i) \in \mathcal{O}(Z)$ . Dann ist

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : Z \rightarrow k^m$$

eine reguläre Abbildung. Weiter liegt das Bild von  $\varphi$  in  $Z'$ : Ist  $g = g(Y_1, \dots, Y_m) \in I(Z') \subset k[Y_1, \dots, Y_m]$ , so zeigt das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}k[Y_1, \dots, Y_m] & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(Z') & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{O}(Z) \\ & & Y_i \mapsto & \pi_i & \mapsto \beta(\pi_i) \\ g(Y_1, \dots, Y_m) & & \mapsto & & g(\beta(\pi_1), \dots, \beta(\pi_m))\end{array}$$

dass  $g(\beta(\pi_1), \dots, \beta(\pi_m)) = 0$ . Für alle  $a \in Z$  gilt also  $0 = g(\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)) = g(\varphi(a))$ . Es folgt  $\varphi(a) \in Z(I(Z')) = Z'$  wie behauptet. Damit erhalten wir eine reguläre Abbildung  $\varphi : Z \rightarrow Z'$ , und nach Definition gilt  $\varphi^* = \beta$ , denn es ist  $\varphi^*(\pi_i) = \varphi_i = \beta(\pi_i)$ , und die  $\pi_i$  erzeugen  $\mathcal{O}(Z')$  als  $k$ -Algebra.

Genauso, wie man nicht nur stetige Abbildung auf  $\mathbb{R}^n$  betrachtet, ist es sinnvoll, reguläre Abbildungen auf offenen Teilmengen von Varietäten zu definieren. Dabei will man die größtmögliche Menge der sinnvoll definierbaren Abbildungen erfassen.

**Definition 2.9** (a) Eine quasi-affine  $k$ -Varietät ist eine offene Teilmenge  $U$  einer affinen  $k$ -Varietät.

(b) Sei  $U \subseteq k^n$  eine nicht-leere quasi-affine Varietät. Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow k$  heißt regulär im Punkt  $P \in U$ , wenn es Polynome  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt und eine offene Umgebung  $U'$  von  $P$  in  $U$ , so dass für alle  $Q \in U'$  gilt

$$g(Q) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(Q) = \frac{f(Q)}{g(Q)}.$$

(c)  $\varphi$  heißt regulär, wenn  $\varphi$  regulär in allen  $P \in U$  ist. Sei  $\mathcal{O}(U)$  die Menge der regulären Funktionen auf  $U$ .

(d) Für  $U = \emptyset$  setze  $\mathcal{O}(U) = \{0\}$ .

$\mathcal{O}(U)$  wird zu einer  $k$ -Algebra mittels der Verknüpfungen  $(\varphi + \psi)(P) = \varphi(P) + \psi(P)$ ,  $(b\varphi)(P) = b\varphi(P)$ .

**Bemerkung 2.10** (a) Eine quasi-affine Varietät  $U \subseteq k^n$  erhält wieder eine Topologie: die Einschränkung der Zariski-Topologie von  $k^n$ .

(b) Sei insbesondere  $Z \subseteq k^n$  eine affine Varietät, also Zariski-abgeschlossen, und sei  $f_0 \in k[X_1, \dots, X_n]$ , mit Bild  $f \in \mathcal{O}(Z)$ . Dann ist offenbar

$$D(f_0) \cap Z = D(f),$$

wobei wir definieren:

$$D(f) = \{P \in Z \mid f(P) \neq 0\}.$$

Diese Mengen bilden eine Basis der Topologie von  $Z$ .

Weiter können wir für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(Z)$  seine Nullstellenmenge definieren:

$$Z(\mathfrak{a}) = \{P \in Z \mid f(P) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Diese Mengen bilden die abgeschlossenen Teilmengen von  $Z$ : Für das Urbild  $\mathfrak{a}_0$  von  $\mathfrak{a}$  unter  $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{O}(Z)$  gilt nämlich  $I(Z) \subseteq \mathfrak{a}_0$ , damit  $Z(\mathfrak{a}_0) \subset Z(I(Z)) = Z$  und

$$Z(\mathfrak{a}) = Z(\mathfrak{a}_0);$$

weiter gilt für ein beliebiges Ideal  $\mathfrak{b}_0 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  mit Bild  $\mathfrak{b}$  in  $\mathcal{O}(Z)$

$$Z(\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{b}_0 + I(Z)) = Z(\mathfrak{b}_0) \cap Z.$$

Auf diese Weise lässt sich die Zariski-Topologie von  $Z$  nur mittels  $\mathcal{O}(Z)$  definieren. Es gelten dieselben Eigenschaften wie in Lemma 2.1, also

$$\begin{aligned} (8) \quad & Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}), \\ & \bigcap_{i \in I} Z(\mathfrak{a}_i) = Z\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right), \\ & Z(\mathcal{O}(Z)) = \emptyset, \quad Z(\{0\}) = \mathcal{O}(Z). \end{aligned}$$

Weiter gelten mit dem Verschwindungsideal in  $\mathcal{O}(Z)$

$$(9) \quad I(M) = \{f \in \mathcal{O}(Z) \mid f(a) = 0 \text{ für alle } a \in M\}$$

einer Menge  $M \subseteq Z$  die Beziehungen

$$(10) \quad I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} \quad , \quad Z(I(M)) = \overline{M} .$$

Dies verallgemeinert die Theorie, die wir für  $k^n$  und  $k[X_1, \dots, X_n]$  entwickelt haben, auf  $Z$  und  $\mathcal{O}(Z)$ .

(c) Insbesondere ist die Zariski-Topologie auf einer affinen  $k$ -Varietät  $Z$  nur durch den Koordinatenring  $\mathcal{O}(Z)$  bestimmt und unabhängig von einer Einbettung  $Z \subseteq k^n$  (Letztere entspricht der Wahl einer Surjektion  $k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z)$ ). Weiter gehört zu einer reduzierten endlich erzeugten  $k$ -Algebra  $A$  eine affine  $k$ -Varietät  $Z$  mit Koordinatenring  $A$ , zum Beispiel durch Wahl einer Surjektion  $k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow A$  von  $k$ -Algebren.

(d) Man kann den unterliegenden Raum  $Z$  mittels 1.9 auch kanonisch erhalten, als das maximale Spektrum  $Max(A)$ . Da für jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m} \in Max(A)$  der Restklassenkörper  $A/\mathfrak{m}$  kanonisch isomorph zu  $k$  ist, können wir den Ring der regulären Funktionen auf  $Z$  dann kanonisch mit  $A$  identifizieren, indem wir jedem  $f \in A$  die Abbildung

$$\begin{aligned} Z = Max(A) &\rightarrow k \\ \mathfrak{m} &\mapsto f \bmod \mathfrak{m} \text{ in } A/\mathfrak{m} \cong k \end{aligned}$$

zuordnen.

(e) Ist  $A$  eine beliebige endlich erzeugte  $k$ -Algebra, so können wir die zugehörige reduzierte Algebra  $A_{red} = A/\mathit{nil}(A)$  betrachten und die dazu gehörige  $k$ -Varietät  $Z = Max(A_{red})$ . Es ist aber auch  $Max(A) = Max(A_{red})$ , da  $\mathit{nil}(A)$  in allen maximalen Idealen enthalten ist.

**Satz 2.11** Sei  $Z \subseteq k^n$  eine affine Varietät. Für jedes  $g \in \mathcal{O}(Z)$  gilt dann

$$\mathcal{O}(D(g)) = \left\{ \varphi : D(g) \rightarrow k \mid \exists f \in \mathcal{O}(Z), \exists m \in \mathbb{N} : \varphi(P) = \frac{f(P)}{g(P)^m} \text{ für alle } P \in D(g) \right\} .$$

Insbesondere (Fall  $g = 1$ ) stimmt für  $Z (= D(1))$  die neue Definition von  $\mathcal{O}(Z)$  mit der alten aus 2.7 überein.

**Beweis** Sei  $\varphi \in \mathcal{O}(D(g))$ . Nach Definition gibt es eine offene Überdeckung  $(V_i)_{i \in I}$  von  $D(g)$  und  $f_i, g_i \in \mathcal{O}(Z)$ , so dass

$$g_i(P) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(P) = \frac{f_i(P)}{g_i(P)} \quad \text{für alle } P \in V_i .$$

Da die Standard-offenen Mengen eine Basis der Topologie bilden, können wir annehmen, dass  $V_i = D(h_i)$  für ein  $h_i \in \mathcal{O}(Z)$ .

*Behauptung 1:* Ohne Einschränkung ist  $g_i = h_i$ .

*Beweis:* Es ist  $g_i(P) \neq 0$  auf  $D(h_i)$ , also  $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ . Wir bemerken nun:

**Bemerkung 2.12**  $D(h_i) \subseteq D(g_i)$  bedeutet  $Z(g_i) \subseteq Z(h_i)$  und damit  $\sqrt{\langle h_i \rangle} \subseteq \sqrt{\langle g_i \rangle}$ . Insbesondere ist  $h_i \in \sqrt{\langle g_i \rangle}$ .

Es ist also

$$h_i^m = r_i \cdot g_i$$

für ein  $r_i \in \mathcal{O}(Z)$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ . Mit  $h_i(P) \neq 0$  gilt auch  $r_i(P) \neq 0$ , und wir haben

$$\varphi(P) = \frac{f_i(P)}{g_i(P)} = \frac{r_i(P) \cdot f_i(P)}{h_i^m(P)} \quad \text{auf } D(h_i).$$

Wegen  $D(h_i) = D(h_i^m)$  folgt Behauptung 1 (durch Ersetzung  $g_i \rightarrow h_i^m, f_i \rightarrow r_i f_i, h_i \rightarrow h_i^m$ ).

*Behauptung 2:* Ohne Einschränkung ist die Überdeckung  $(D(g_i))$  endlich.

*Beweis:* Es ist

$$(11) \quad \bigcup_{i \in I} D(g_i) = D(g),$$

also

$$Z(g) = \bigcap_{i \in I} Z(g_i) = Z(\langle g_i \mid i \in I \rangle).$$

Ähnlich wie oben folgt  $g^m \in \langle g_i \mid i \in I \rangle$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Es gibt also endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_r \in I$  und  $e_1, \dots, e_r \in \mathcal{O}(Z)$  mit

$$g^m = \sum_{j=1}^r e_j g_{i_j}.$$

Hieraus folgt umgekehrt

$$Z(g) \supseteq \bigcap_{j=1}^r Z(g_{i_j})$$

und damit

$$D(g) \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(g_{i_j}),$$

wobei wegen (11) Gleichheit gilt.

Wir können also annehmen, dass  $I = \{1, \dots, r\}$  endlich ist, und dass gilt

$$(12) \quad \varphi(P) = \frac{f_i(P)}{g_i(P)} \quad \text{auf } D(g_i) \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$(13) \quad g^m = \sum_{i=1}^r e_i g_i.$$

Es folgt

$$f_i g_j - f_j g_i = 0 \quad \text{auf } D(g_i) \cap D(g_j)$$

und damit

$$g_i g_j (f_i g_j - f_j g_i) = 0 \quad \text{auf } Z$$

$(i, j = 1, \dots, r)$ . Schreiben wir

$$\varphi = \frac{f_i g_i}{g_i^2} \quad \text{auf } D(g_i) = D(g_i^2),$$

so gilt also ohne Einschränkung ( $g_i \rightarrow g_i^2, f_i \rightarrow f_i g_i$  und wieder (13) ableiten)

$$f_i g_j - f_j g_i = 0 \quad \text{auf } Z.$$

Setze  $f = \sum_{j=1}^r e_j f_j$ . Mit (13) folgt dann

$$g^m f_i = \sum_{j=1}^r (e_j g_j) f_i = \sum_{j=1}^r (e_j f_j) g_i = f g_i$$

und damit

$$\varphi = \frac{f_i}{g_i} = \frac{f}{g^m} \quad \text{auf } D(g_i)$$

für alle  $i = 1, \dots, r$ . Es folgt

$$\varphi = \frac{f}{g^m} \quad \text{auf ganz } D(g)$$

wie behauptet.

**Corollar 2.13** Für jedes  $g \in \mathcal{O}(Z)$  gibt es einen kanonischen Isomorphismus von  $k$ -Algebren

$$\alpha : \mathcal{O}(Z)_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D(g)),$$

wobei  $\mathcal{O}(Z)_g$  die Lokalisierung von  $\mathcal{O}(Z)$  nach  $g$  ist.

**Beweis** Die Lokalisierung besteht aus allen formalen Brüchen  $\frac{f}{g^m}$  mit  $f \in \mathcal{O}(Z)$  mit  $m \in \mathbb{N}$ . Dabei gilt

$$(14) \quad \frac{f}{g^m} = \frac{f'}{g^\ell} \Leftrightarrow g^N g^\ell f = g^N g^m f' \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N},$$

und

$$\frac{f}{g^m} \cdot \frac{f'}{g^\ell} = \frac{f f'}{g^{m+\ell}} \quad \text{sowie} \quad \frac{f}{g^m} + \frac{f'}{g^\ell} = \frac{g^\ell f + g^m f'}{g^{m+\ell}}.$$

Wir ordnen nun einem Element  $\frac{f}{g^m}$  die Abbildung  $\varphi : D(g) \rightarrow k$  mit

$$\varphi(P) = \frac{f(P)}{g(P)^m}$$

zu. Dies ist wohldefiniert, da  $g(P) \neq 0$  für  $P \in D(g)$ , nach Definition von  $D(g)$ , und da ein erweiterter Bruch  $\frac{g^N f}{g^{N+m}}$  auf dieselbe Funktion abgebildet wird. Weiter erhält man so einen  $k$ -Algebren-Homomorphismus  $\alpha : \mathcal{O}(Z)_g \rightarrow \mathcal{O}(D(g))$ . Dieser ist nach Satz 2.11 surjektiv. Aber  $\alpha$  ist auch injektiv: Ist  $\frac{f}{g^m}$  gegeben, und ist  $\frac{f(P)}{g(P)^m} = 0$  für alle  $p \in D(g)$ , so ist (wegen  $g(P) \neq 0$ )  $f(P) = 0$  für alle  $p \in D(g)$ . Da  $\frac{f}{g^m} = \frac{g f}{g^{m+1}}$ , können wir auch annehmen, dass  $f(P) = 0$  für alle  $P \in Z(g)$ . Daher ist  $f(P) = 0$  für alle  $P \in Z$ , d.h.,  $f = 0$  in  $\mathcal{O}(Z)$ .

**Bemerkung 2.14** (a) Sei  $A$  ein Integritätsring und  $S \subseteq A$  eine multiplikative Teilmenge mit  $0 \notin S$ . Dann können wir mittels des injektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} A_S &\hookrightarrow \text{Quot}(A) \\ \frac{a}{s} &\mapsto \frac{a}{s} \end{aligned}$$

die Lokalisierung  $A_S$  als einen Unterring des Quotientenkörpers  $Quot(A)$  von  $A$  auffassen. Weiter gilt in  $A_S$  wie in  $Quot(A)$  die einfache Regel

$$(15) \quad \frac{a}{s} = \frac{b}{t} \quad \Leftrightarrow \quad ta = sb,$$

die wegen der Nullteilerfreiheit von  $A$  aus (14) folgt.

(b) Insbesondere gilt: Ist  $Z$  eine Varietät im klassischen Sinne, also  $\mathcal{O}(Z)$  integer, so ist

$$\mathcal{O}(Z)_g = \left\{ \frac{f}{g^m} \in Quot(\mathcal{O}(Z)) \mid f \in \mathcal{O}(Z), m \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Unterring des Quotientenkörpers  $Quot(\mathcal{O}(Z))$  von  $\mathcal{O}(Z)$ . Die Elemente von  $K(Z) = Quot(\mathcal{O}(Z))$  heißen auch meromorphe Funktionen auf  $Z$ ,  $K(Z)$  heißt der Funktionenkörper von  $Z$ .

Wir kommen nun zu regulären Abbildungen zwischen quasi-affinen Varietäten.

**Definition 2.15** Seien  $V, V'$  quasi-affine Varietäten. Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  heißt regulär, wenn gilt

- (i)  $\varphi$  ist stetig.
- (ii) Für jede offene Menge  $U' \subseteq V'$  gilt: Falls  $U = \varphi^{-1}(U')$  nicht leer ist, so ist für jede reguläre Funktion  $f$  auf  $U'$  die Funktion  $f \circ \varphi|_U$  regulär auf  $U$ .

Aus der Definition folgt sofort:

**Lemma 2.16** Die Komposition von regulären Abbildungen ist wieder regulär.

**Satz 2.17** Seien  $V \subseteq k^n$  und  $V' \subseteq k^m$  quasi-affine Varietäten. Eine Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : V \rightarrow V' \subseteq k^m$$

ist genau dann regulär, wenn alle Komponenten

$$\varphi_i : V \rightarrow k \quad (i = 1, \dots, m)$$

reguläre Funktionen auf  $V$  sind.

**Bemerkung 2.18** Diese Beschreibung ist sehr einfach und zeigt auch, dass man für affine Varietäten Übereinstimmung mit Definition 2.7 (b) erhält. Mit ihr ist es aber schwierig, Lemma 2.16 zu zeigen, da die regulären Funktionen auf  $V'$  im Allgemeinen nicht von den Projektionen  $\pi_i : V' \rightarrow k$  ( $i = 1, \dots, m$ ) erzeugt werden.

**Beweis von Satz 2.17** Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  wird die  $i$ -te Projektion  $\pi_i : V' \rightarrow k$  vom Polynom  $Y_i \in k[Y_1, \dots, Y_m]$  induziert, ist also eine reguläre Funktion. Ist nun  $\varphi$  regulär, so folgt daher mit 2.16 die Regularität von  $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ .

Seien umgekehrt alle  $\varphi_i$  reguläre Funktionen. Sei  $Z' \subseteq k^m$  eine affine Varietät, so dass  $V' \subseteq Z'$  offen ist, und sei  $g \in \mathcal{O}(Z')$ , repräsentiert durch das Polynom  $g_0(Y_1, \dots, Y_m) \in k[Y_1, \dots, Y_m]$ .

Für  $Q \in V$  ist dann  $(g \circ \varphi)(Q) = g_0(\varphi_1(Q), \dots, \varphi_m(Q))$ . Da  $\mathcal{O}(V)$  eine  $k$ -Algebra ist, ist  $g \circ \varphi$  eine reguläre Funktion auf  $V$ . Weiter gilt

$$(g \circ \varphi)(Q) = 0 \iff g(\varphi(Q)) = 0 \iff f(Q) \in Z(g).$$

**Lemma** Für jede quasi-affine Varietät  $V$  und jede reguläre Funktion  $\psi : V \rightarrow k$  ist  $Z(\psi) := \{P \in V \mid \psi(P) = 0\}$  abgeschlossen und damit  $D(\psi) := V \setminus Z(\psi)$  offen in  $V$ .

**Beweis:** Dies kann lokal nachgeprüft werden: Eine Teilmenge  $M$  in einem topologischen Raum  $X$  ist abgeschlossen, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)$  von  $X$  gibt, so dass  $M \cap U_i$  abgeschlossen in  $U_i$  ist für alle  $i$ . Sei also  $V$  quasi-affin in  $k^n$ . Für jedes  $P \in V$  gibt es dann eine offene Umgebung  $U_P$  von  $P$  in  $V$  und  $f_P, g_P \in k[X_1, \dots, X_n]$ , so dass  $g_P \neq 0$  auf  $U_P$  und  $\psi = f_P/g_P$  auf  $U_P$ . Für  $Q \in U_P$  ist dann  $\psi(Q) = 0 \iff f_P(Q) = 0$ ; es ist also  $Z(\psi) \cap U_P = Z(f_P) \cap U_P$  abgeschlossen in  $U_P$ .

Es folgt also in unserer Situation, dass  $\varphi^{-1}(D(g)) = D(g \circ \varphi)$  offen in  $V$  ist. Dies zeigt, dass  $\varphi$  stetig ist (Benutze 2.4 (b)).

Weiter folgt für  $g \in \mathcal{O}(Z')$  mit  $D(g) \subseteq V'$  und eine reguläre Funktion  $\frac{h}{g^r} \in \mathcal{O}(D(g))$  ( $h \in \mathcal{O}(Z')$ , siehe 2.11), dass

$$\frac{h}{g^r} \circ \varphi = \frac{h \circ \varphi}{(g \circ \varphi)^r}$$

eine reguläre Funktion auf  $D(g \circ \varphi) \subseteq V$  ist. Dies folgt daraus, dass  $h \circ \varphi$  und  $g \circ \varphi$ , wie oben gesehen, reguläre Funktionen auf  $D(g \circ \varphi)$  sind und dass  $g \circ \varphi \neq 0$  auf  $D(g \circ \varphi)$ . Wegen der letzteren Eigenschaft ist dann nämlich  $1/g \circ \varphi$  regulär (Übungsaufgabe). Also ist  $\varphi$  eine reguläre Abbildung. (Benutze 2.4 (b))

**Corollar 2.19** Sei  $V$  quasi-affine Varietät. Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow k$  ist genau dann eine reguläre Funktion, wenn sie regulär im Sinn von Definition 2.15 ist (wobei  $k$  als affine Varietät aufgefasst wird). Insbesondere ist  $\varphi$  dann stetig.

**Definition 2.20** Eine reguläre Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  zwischen quasi-affinen Varietäten heißt Isomorphismus, wenn es eine reguläre Abbildung  $\psi : V' \rightarrow V$  gibt mit  $\psi \circ \varphi = id_V$ ,  $\varphi \circ \psi = id_{V'}$ . Zwei Varietäten heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

**Beispiele 2.21** (a) Sei  $f(X) \in k[X]$  ein Polynom und

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in k^2 \mid y = f(x)\}$$

der Graph von  $f$ . Dies ist eine affine Varietät. Die reguläre Abbildung

$$\begin{aligned} pr_1 & : \Gamma(f) \rightarrow k \\ & (x, y) \mapsto x \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Varietäten, mit regulärer Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} k & \rightarrow \Gamma(f) \\ x & \mapsto (x, f(x)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Satz 2.8: Die obigen Abbildungen induzieren zueinander inverse Isomorphismen

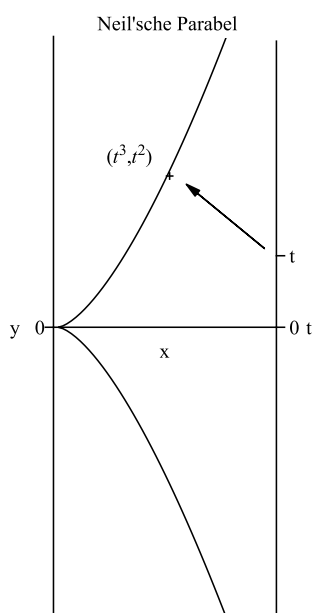
$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Gamma(f)) = k[x, y] / \langle y - f(x) \rangle &\rightleftarrows k[x] = \mathcal{O}(k) \\ x, y &\mapsto x, f(x) \\ x &\leftarrow x \end{aligned}$$

der Koordinatenringe.

(b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : k &\rightarrow V := \{(x, y) \in k^2 \mid y^2 = x^3\} = \text{Neil'sche Parabel} \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

ist regulär und bijektiv, aber kein Isomorphismus von Varietäten, denn die Umkehrabbildung ist nicht regulär (Warum?). Es gibt auch keine andere Abbildung, die ein Isomorphismus ist, siehe 2.24 (c).



Die Einschränkung

$$k^\times \rightarrow V \setminus \{(0, 0)\}$$

ist ein Isomorphismus: die Umkehrabbildung ist

$$\frac{y}{x} \leftarrow (x, y).$$

**Satz 2.22** Sei  $Z$  eine affine Varietät und sei  $f \in \mathcal{O}(Z)$ . Dann ist  $D(f)$  isomorph zu einer affinen Varietät  $W$ .

**Beweis** Sei  $\mathcal{O}(Z) = k[X_1, \dots, X_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , also  $Z \subseteq k^n$ , mit Verschwindungsideal  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , und sei  $f_0 \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit Bild  $f \in \mathcal{O}(Z)$ . Dann definiere  $W \subseteq k^{n+1}$  (Koordinaten  $X_1, \dots, X_n, T$ ) als die Nullstellenmenge von  $\langle f_1, \dots, f_m, Tf_0 - 1 \rangle$  (vergleiche den Rabinowitsch-Trick aus dem Beweis von Satz 1.21!).

Definiere nun die Abbildungen

$$\begin{aligned} D(f) &\rightleftharpoons W \\ a = (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_1, \dots, a_n, \frac{1}{f(a)}) \\ (a_1, \dots, a_n) &\longleftarrow (a_1, \dots, a_n, b). \end{aligned}$$

Diese sind wohldefiniert, regulär und zueinander invers.

**Definition 2.23** Nenne eine quasi-affine Varietät auch affin, wenn sie isomorph zu einer affinen Varietät ist.

**Bemerkung 2.24** (a) Sind zwei quasi-affine Varietäten isomorph, so auch ihre Koordinatenringe.

(b) Zum Beispiel ist in der Situation von Satz 2.22

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(D(f)) &= \mathcal{O}(Z)_f && \text{(nach 2.13)} \\ \mathcal{O}(W) &= \mathcal{O}(Z)[T]/\langle fT - 1 \rangle && \text{(nach Konstruktion)}. \end{aligned}$$

Tatsächlich hat man für jeden Ring  $A$  und jedes  $f \in A$  einen kanonischen Isomorphismus (Übungsaufgabe)

$$A_f \cong A[T]/\langle fT - 1 \rangle.$$

(c) Die Neilsche Parabel (siehe 2.21 (b)) ist nicht isomorph zum affinen Raum  $k$ , denn die Koordinatenringe  $\mathcal{O}(k) = k[t]$  und  $\mathcal{O}(V) = k[x, y]/\langle y^2 - x^3 \rangle$  sind nicht isomorph (Übungsaufgabe).

(d) Die Umkehrung von (a) ist im Allgemeinen nicht richtig. Zum Beispiel ist für die quasi-affine Varietät  $U = k^2 \setminus \{(0, 0)\} \subseteq Z = k^2$  die Restriktion  $k[X, Y] = \mathcal{O}(Z) \rightarrow \mathcal{O}(U)$  ein Isomorphismus (Übungsaufgabe). Aber  $U$  ist nicht isomorph zu  $k^2$  (Übungsaufgabe).

## 2.A Lokalisierungen

Der folgende Begriff verallgemeinert den Begriff des Quotientenkörpers. Sei  $A$  ein kommutativer Ring mit Eins.

**Definition 2.A.1** Eine Teilmenge  $S \subseteq A$  heißt multiplikativ (oder multiplikativ abgeschlossen), wenn  $1 \in S$  und wenn mit  $a$  und  $b$  in  $S$  auch  $a \cdot b$  in  $S$  liegt.

**Beispiele 2.A.2** (a) Für jedes  $f \in A$  ist die Menge  $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  multiplikativ (wobei wir setzen:  $f^0 := 1$ ).

(b) (*wichtig!*) Sei  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ein Ideal. Die Menge  $A \setminus \mathfrak{a}$  ist genau dann multiplikativ, wenn  $\mathfrak{a}$  ein Primideal ist.

(c) Erinnerung: ein Element  $f \in A$  heißt Nullteiler wenn es ein  $g \neq 0$  in  $A$  gibt mit  $f \cdot g = 0$ . Die Menge  $U_A$  der Nicht-Nullteiler in  $A$  ist multiplikativ.

Sei  $S \subseteq A$  multiplikativ. Betrachte auf der Menge  $A \times S$  die folgende Relation

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \text{es ex. ein } t \in S \text{ mit } ts'a = tsa'$$

Dann ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar, und für die Transitivität "braucht man das  $t$ " in der Definition, falls  $S$  Nullteiler hat:

$$t(s'a - sa') = 0 \quad , \quad t'(s''a' - s'a'') = 0 \quad \Rightarrow \quad t t' s' (s''a - s a'') = 0$$

Für  $(a, s) \in A \times S$  sei  $\frac{a}{s}$  die Äquivalenzklasse von  $(a, s)$  bezüglich  $\sim$ . Die Menge  $A \times S / \sim$  der Äquivalenzklassen wird mit  $A_S$  (oder  $S^{-1}A$  oder  $A[S^{-1}]$ ) bezeichnet.

**Satz/Definition 2.A.3** (a)  $A_S$  wird mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &:= \frac{at+bs}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &:= \frac{ab}{st} \end{aligned}$$

ein Ring (kommutativ, mit Eins) und heißt die Lokalisierung von  $A$  nach  $S$ .

(b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{univ} : A &\rightarrow A_S \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

ist ein Ringhomomorphismus und alle Elemente in  $\varphi_{univ}(S)$  sind invertierbar in  $A_S$ .

(c) (universelle Eigenschaft) Ist  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus derart, dass  $\varphi(S)$  aus lauter invertierbaren Elementen besteht, so gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : A_S \rightarrow B$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_{univ}} & A_S \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & B & \end{array}$$

kommutativ macht.

**Beweis:** (a) Wohldefiniertheit: Ist  $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$  und  $\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}$ , so gibt es  $s_1, s_2 \in S$  mit  $s_1(s'a - sa) = 0$  und  $s_2(t'b - tb') = 0$ . Dann ist  $s_1 s_2 [(s't'(at + bs) - st(a't' + b's'))] = 0$ , also

$$\frac{at + bs}{st} = \frac{a't' + b's'}{s't'}$$

sowie  $s_1 s_2 [s' t' ab - s t a' b'] = 0$ , also

$$\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}.$$

Der Beweis der Ringeigenschaften ist einfach unter der Benutzung der "Kürzungsregel"

$$\frac{a}{s} = \frac{ta}{ts} \quad \text{für } t \in S.$$

(b) Wegen  $\frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1}$  und  $\frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$  ist  $\varphi_{univ}$  ein Ringhomomorphismus, und für  $s \in S$  ist  $\frac{1}{s}$  ein Inverses von  $\varphi(s) = \frac{s}{1}$ .

(c) Setze  $\tilde{\varphi}(\frac{a}{s}) = \varphi(s)^{-1} \cdot \varphi(a)$ . Dann folgen alle Eigenschaften einfach (Eindeutigkeit:  $\varphi(a) = \tilde{\varphi}(\frac{a}{1}) = \tilde{\varphi}(\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1}) = \tilde{\varphi}(\frac{a}{s}) \cdot \tilde{\varphi}(\frac{s}{1}) = \tilde{\varphi}(\frac{a}{s}) \cdot \varphi(s) \Rightarrow \tilde{\varphi}(\frac{a}{s}) = \varphi(s)^{-1} \cdot \varphi(a)$ ).

**Beispiele 2.A.4** (a) Enthält  $S$  die Null, so ist  $A_S = 0$  (der Nullring).

(b) Für  $f \in A$  und  $S_f := \{f^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  (vergl. 2.A.2 (a)) schreibt man auch  $A_f$  (oder  $A[f^{-1}]$ ) für  $A_{S_f}$ .

(c) Allgemein sei für eine beliebige Menge  $M \subseteq A$  definiert:  $A[M^{-1}] := A[S_M^{-1}]$ , wobei  $S_M$  die von  $M$  erzeugte multiplikative Teilmenge von  $A$  ist (existiert, als Durchschnitt aller multiplikativen Teilmengen  $S$ , die  $M$  enthalten). Dann hat  $A[M^{-1}]$  eine analoge universelle Eigenschaft für Morphismen  $\varphi : A \rightarrow B$ , für die  $\varphi(m)$  invertierbar ist für alle  $m \in M$ .

(d) Ist  $\mathfrak{p} \subseteq A$  ein Primideal, so setze

$$A_{\mathfrak{p}} := A[(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}].$$

(e) Ist  $U_A \subseteq A$  die Menge der Nicht-Nullteiler (vgl. 10.2.(c)), so heißt

$$Quot(A) := A[U_A^{-1}]$$

der totale Quotientenring von  $A$ .

(f) Ist  $A$  ein Integritätsbereich, so ist  $U_A = A \setminus \{0\}$  und  $Quot(A)$  ist ein Körper (jedes  $\frac{a}{b} \neq 0$  hat ein Inverses!), der übliche *Quotientenkörper* von  $A$ .

**Lemma 2.A.5** Die Abbildung  $A \rightarrow A_S$  ist genau dann injektiv, wenn  $S$  keine Nullteiler enthält. Insbesondere ist also  $A \rightarrow Quot(A)$  injektiv.

**Beweis:** selbst

**Satz 2.A.6.** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von Ringen, und seien  $S \subseteq A$  und  $T \subseteq B$  multiplikative Teilmengen mit  $\varphi(S) \subseteq T$ . Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus  $\varphi' : A_S \rightarrow B_T$  der  $\varphi$  fortsetzt, d.h., der

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \varphi_{univ}^A \downarrow & & \downarrow \varphi_{univ}^B \\ A_S & \xrightarrow{\varphi'} & B_T \end{array}$$

kommutativ macht.

**Beweis:** Sei  $\psi = \varphi_{univ}^B \circ \varphi$ ; dann besteht  $\psi(S)$  ganz aus Einheiten. Nach der universellen Eigenschaft 2.A.3.(c) gibt es also genau einen Ringhomomorphismus  $\varphi'$ , der das untere Dreieck in

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & \searrow \psi & \downarrow \\ A_S & \xrightarrow{\varphi'} & B_T \end{array}$$

kommutativ macht.

**Corollar 2.A.7.** Seien

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \text{Ringhomomorphismen} \\ \cup & & \cup & & \cup & \\ S & \rightarrow & T & \rightarrow & U & \text{multiplikative Teilmengen} \end{array}$$

Dann gilt  $\psi' \circ \varphi' = (\psi \circ \varphi)' : A_S \rightarrow C_U$  für die induzierten Abbildungen.

**Beweis:**  $\psi' \circ \varphi'$  leistet dieselbe Kommutativität wie  $\psi \circ \varphi$ .

**Satz 2.A.8** Seien  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $\psi : A \rightarrow C$  Ringhomomorphismen.

(a) Sei  $S \subseteq B$  eine multiplikative Teilmenge und  $i_B : B \rightarrow B \otimes_A C$ ,  $b \mapsto b \otimes 1$ , der kanonische Ringhomomorphismus. Dann ist  $i_B(S) \subseteq B \otimes_A C$  eine multiplikative Teilmenge, und es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$B_S \otimes_A C \simeq (B \otimes_A C)_{i_B(S)}$$

(b) Ist  $T \subseteq A$  eine multiplikative Menge mit  $\varphi(T) \subseteq B^\times$  und  $\psi(T) \subseteq C^\times$ , so gilt

$$B \otimes_A C \simeq B \otimes_{A_T} C .$$

**Beweis:**

(a) Dass  $i_B(S)$  multiplikativ abgeschlossen ist, ist klar. Mittels der universellen Eigenschaften von Tensorprodukt und Lokalisierung erhält man kanonische Ringhomomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : B_S \otimes_A C & \rightarrow & (B \otimes_A C)_{i_B(S)} \\ \frac{b}{s} \otimes c & \mapsto & \frac{b \otimes c}{s \otimes 1} , \\ \\ \psi : (B \otimes_A C)_{i_B(S)} & \rightarrow & B_S \otimes C \\ \frac{b \otimes c}{s \otimes 1} & \mapsto & (s \otimes 1)^{-1} \cdot \frac{b}{1} \otimes c , \end{array}$$

die zueinander invers sind.

(b) Man hat einen offensichtlichen Ringhomomorphismus

$$\varphi : B \otimes_A C \rightarrow B \otimes_{A_S} C, \quad b \otimes c \mapsto b \otimes c .$$

Umgekehrt ist die  $A$ -bilineare Abbildung

$$B \times C \rightarrow B \otimes_A C, \quad (b, c) \mapsto b \otimes c ,$$

auch  $A_S$ -bilinear: Für  $a \in A$ ,  $s \in S$  und  $(b, c) \in B \times C$  ist  $\frac{a}{s} b \otimes c = \frac{1}{s} b \otimes ac = \frac{1}{s} b \otimes s \cdot \frac{a}{s} c = s \frac{1}{s} b \otimes \frac{a}{s} c = b \otimes \frac{a}{s} c$ . Wir erhalten also einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$\psi : B \otimes_{A_S} C \rightarrow B \otimes_A C, \quad b \otimes c \mapsto b \otimes c ,$$

der offenbar invers zu  $\varphi$  ist.

**Satz/Definition 2.A.9** Für einen  $A$ -Modul  $M$  und eine multiplikative Teilmenge  $S \subseteq A$  definiere

$$M_S = (M \times S) / \sim$$

wobei  $(m, s) \sim (m', s')$  falls ein  $t \in S$  existiert mit  $ts'm = tsm'$  (Andere Bezeichnungen:  $S^{-1}M$  oder  $M[S^{-1}]$ ). Die Äquivalenzklasse von  $(m, s)$  sei mit  $\frac{m}{s}$  bezeichnet. Dann wird  $M_S$  ein  $A_S$ -Modul durch die Definitionen

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st} , \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}$$

für  $m, n \in M$ ,  $s, t \in S$  und  $a \in A$ .

(b) (universelle Eigenschaft) Es gibt einen kanonischen  $A$ -Modul-Homomorphismus  $\varphi_{univ} : M \rightarrow M_S$ , und für  $s \in S$  ist

$$\begin{aligned} L_s : M_S &\rightarrow M_S \\ x &\mapsto s \cdot x \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Ist  $N$  ein weiterer  $A$ -Modul derart, dass für jedes  $s \in S$  die Abbildung  $L_s : N \rightarrow N, n \mapsto sn$ , ein Isomorphismus ist, und ist  $\varphi : M \rightarrow N$  ein  $A$ -Modul-Homomorphismus, so gibt es einen eindeutig bestimmten  $A$ -Modul-Homomorphismus  $\tilde{\varphi} : M_S \rightarrow N$ , der

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi_{univ}} & M_S \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & N \end{array}$$

kommutativ macht. Weiter ist  $\tilde{\varphi}$  ein  $A_S$ -Modul-Homomorphismus, wobei  $N$  ein  $A_S$ -Modul ist vermöge  $\frac{a}{s}n = (L_s)^{-1}(an)$  für  $n \in N, a \in A$  und  $s \in S$ .

(c) Insbesondere induziert jeder  $A$ -Modul-Homomorphismus  $f : M \rightarrow N$  einen  $A_S$ -Modul-Homomorphismus

$$f_S : M_S \rightarrow N_S$$

mit  $f_S(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$  für  $m \in M, s \in S$ .

**Beweis** der Behauptungen: Ähnlich wie für Satz 2.A.3.

**Definition 2.A.10** (a) Für ein Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$  und die multiplikative Menge  $S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$  schreibe  $M_{\mathfrak{p}}$  statt  $M_{S_{\mathfrak{p}}}$  (dies ist also ein  $A_{\mathfrak{p}}$ -Modul).

(b) Für  $S_f = \{f^n | f \in \mathbb{N}_0\}, f \in A$ , schreibe  $M_f$  statt  $M_{S_f}$  (dies ist ein  $A_f$ -Modul).

**Lemma 2.A.11** Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von  $A_S$ -Moduln

$$A_S \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M_S.$$

(Hierbei steht links die Skalarerweiterung von  $M$ , siehe 1.A.9).

**Beweis** Nach der universellen Eigenschaft der Skalarerweiterung (siehe 1.A.9 (b)) erhalten wir den gewünschten Morphismus von  $A_S$ -Moduln, mit

$$\frac{a}{f} \otimes m \mapsto \frac{a}{f} \cdot \frac{m}{1} = \frac{am}{f}$$

für  $m \in M, a \in A$  und  $f \in S$ . Nach der universellen Eigenschaft von  $M_S$  (2.A.9) gibt es einen  $A_S$ -Modul-Morphismus in der umgekehrten Richtung, mit

$$\frac{1}{f} \otimes m \leftarrow \frac{m}{f}.$$

Es folgt sofort, dass die Abbildungen zueinander invers sind.

### 3 Garben und projektive Varietäten

Sei  $Z$  eine Varietät. Zur Berechnung von  $\mathcal{O}(U)$  für beliebiges offenes  $U \subseteq Z$  ist das folgende Konzept nützlich.

**Definition 3.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

(a) Eine *Prägarbe*  $P$  (von abelschen Gruppen) auf  $X$  ist eine Zuordnung, die jeder offenen Menge  $U \subseteq X$  eine abelsche Gruppe  $P(U)$  zuordnet, und jeder Inklusion  $V \subseteq U$  von offenen Mengen einen Gruppenhomomorphismus

$$\alpha_{U,V} : P(U) \rightarrow P(V).$$

Dabei soll gelten

(i) Für  $W \subseteq V \subseteq U$  gilt  $\alpha_{U,W} = \alpha_{V,W} \circ \alpha_{U,V}$ .

(ii)  $\alpha_{U,U} : P(U) \rightarrow P(U)$  ist die Identität.

(b)  $\alpha_{U,V}$  heißt auch die Restriktion von  $U$  auf  $V$  und wird oft mit  $res_{U,V}$  bezeichnet; für  $x \in P(U)$  wird  $\alpha_{U,V}(x) \in P(V)$  auch die Restriktion von  $x$  auf  $V$  genannt und mit  $x|_V$  bezeichnet.

(c) Eine Prägarbe  $F$  auf  $X$  heißt *Garbe*, wenn für jede offene Menge  $U \subseteq X$  und jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $U$  ( $U_i \subseteq U$  offen,  $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ ) die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

(i) (Lokalität) Sind  $s, t \in F(U)$  und gilt  $s|_{U_i} = t|_{U_i}$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = t$ .

(ii) (Verklebung) Sind  $s_i \in F(U_i)$  gegeben, für alle  $i \in I$ , und gilt

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle  $i, j \in I$ , so gibt es ein  $s \in F(U)$  mit

$$s|_{U_i} = s_i \quad \text{für alle } i \in I.$$

(d)  $s \in F(U)$  heißt auch ein Schnitt von  $F$  über  $U$ , und ein Element aus  $F(X)$  heißt globaler Schnitt von  $F$ .

**Bemerkung 3.2** (a) Entsprechend definiert man Prägarben/Garben von Mengen, Gruppen, Ringen...: Hierbei sind die  $P(U)$  Mengen Gruppen, Ringe... und die Restriktionen sind Abbildungen, Gruppenhomomorphismen, Ringhomomorphismen... Die Garbenbedingung bleibt wörtlich dieselbe.

(b) Hat man eine Gruppenstruktur auf den  $F(U)$ , so kann man die Garbenbedingung (i) auch so formulieren:

(i') Ist  $s \in F(U)$  und gilt  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = 0$ .

**Beispiele 3.3** (a) Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Dann erhält man die assoziierte *konstante Prägarbe*  $A^P$  mit Wert  $A$  auf  $X$  durch

$$\begin{aligned} A^P(U) &= A & \text{für alle } U \subseteq X \text{ offen,} \\ res_{U,V} &= id_A & \text{für alle } V \subseteq U. \end{aligned}$$

Dies ist im Allgemeinen keine Garbe (Übungsaufgabe!)

(b) Die Garbe  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum  $X$  wird definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U) &= C(U, \mathbb{R}) = \text{Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf } U \\ \text{res}_{U,V}(f) &= \text{übliche Restriktion } f|_V \text{ von } f \text{ auf } V \text{ für } V \subseteq U. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass dies eine Garbe (von  $\mathbb{R}$ -Algebren) ist.

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Lemma/Definition 3.4** Sei  $V$  eine quasi-affine  $k$ -Varietät. Dann ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &= \text{Ring der regulären Funktionen auf } U && (U \subseteq V \text{ offen}) \\ \text{res} : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}(U') \text{ gleich übliche Einschränkung } \psi \mapsto \psi|_{U'} && (U' \subseteq U) \end{aligned}$$

eine Garbe von  $k$ -Algebren auf  $V$  definiert, die Garbe  $\mathcal{O}$  der regulären Funktionen auf  $V$ .

**Beweis** Die Eigenschaften für eine Prägarbe sind offenbar erfüllt, weiter sind die  $\mathcal{O}(U)$   $k$ -Algebren und die Restriktionen  $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U')$  Morphismen von  $k$ -Algebren. Die Garbeneigenschaft (i) ist klar. Sei weiter  $U \subseteq V$  offen,  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $U$ , und seien  $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$  mit  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j$ . Dann gibt es zunächst eine Abbildung  $s : U \rightarrow k$  mit  $s|_{U_i} = s_i$  für alle  $i \in I$ . Aber es folgt sofort aus der lokalen Eigenschaft der Regularität, dass  $s$  regulär ist, also in  $\mathcal{O}(U)$ . Also gilt auch Garbeneigenschaft (ii).

**Definition 3.5** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *irreduzibel*, wenn  $X$  sich nicht als Vereinigung  $X = Y_1 \cup Y_2$  von zwei echten Teilmengen darstellen lässt, die abgeschlossen sind (Das heißt es gilt:  $X = Y_1 \cup Y_2$ ,  $Y_1, Y_2$  abgeschlossen  $\Rightarrow Y_1 = X$  oder  $Y_2 = X$ . Äquivalent, durch Komplementbildung, ist:  $U_1, U_2 \subseteq Z$  offen,  $U_1, U_2 \neq \emptyset \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ).

**Lemma 3.6** Eine affine  $k$ -Varietät  $Z$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $\mathcal{O}(Z)$  ein Integritätsring ist, d.h., wenn  $Z$  eine Varietät im klassischen Sinne ist.

**Beweis:** Sei  $Z$  irreduzibel, und seien  $f, g \in \mathcal{O}(Z)$  mit  $f \cdot g = 0$ . Für die abgeschlossenen Mengen  $Z(f), Z(g) \subseteq Z$  gilt dann  $Z(f) \cup Z(g) = Z(f \cdot g) = Z$  (vergleiche 2.10 (b) (10)). Da  $Z$  irreduzibel ist, gilt  $Z(f) = Z$  oder  $Z(g) = Z$ . Ist etwa  $Z(f) = Z$ , so folgt  $f \in I(Z) = \{0\}$ .

Sei umgekehrt  $\mathcal{O}(Z)$  integer, und seien  $Y_1, Y_2 \subseteq Z$  abgeschlossen mit  $Z = Y_1 \cup Y_2$  und  $Y_1 \neq Z, Y_2 \neq Z$ . Für die Verschwindungsideale  $\mathfrak{a} = I(Y_1), \mathfrak{b} = I(Y_2) \subseteq \mathcal{O}(Z)$  gilt dann  $\mathfrak{a} \neq I(Z) = \{0\}$  und  $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ , aber  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = I(Y_1 \cup Y_2) = \{0\}$ . Es gibt also  $f \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$  und  $g \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$ , aber  $f \cdot g \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ ; Widerspruch zur Integrität!

**Lemma 3.7** Sei  $Z$  eine irreduzible affine  $k$ -Varietät, und sei  $K(Z) = \text{Quot}(\mathcal{O}(Z))$  ihr Funktionenkörper. Für jede nicht-leere offene Menge  $U \subseteq Z$  gibt es dann einen kanonischen injektiven Morphismus von  $k$ -Algebren

$$\mathcal{O}(U) \hookrightarrow K(Z).$$

Dies ist kompatibel mit Restriktionen.

**Beweis** Sei  $\psi \in \mathcal{O}(U)$ , und sei  $U$  nicht-leer. Dann gibt es ein  $g \in \mathcal{O}(Z)$  mit  $\emptyset \neq D(g) \subseteq U$  (nach 2.4) und ein  $f \in \mathcal{O}(Z)$  mit

$$\psi = \frac{f}{g} \quad \text{auf} \quad D(g)$$

(nach 2.11; beachte dass  $D(g^m) = D(g)$  für  $m \in \mathbb{N}$ ).

Wir bilden  $\psi$  auf  $\frac{f}{g} \in K(Z)$  ab. Dies ist wohldefiniert: Sind  $g', f'$  andere Wahlen, so ist  $D(g) \cap D(g') = D(gg') \neq \emptyset$  (da  $Z$  irreduzibel ist) und

$$\psi = \frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \quad \text{auf} \quad D(gg'),$$

nach also

$$\frac{fg'}{gg'} = \frac{gf'}{gg'} \quad \text{auf} \quad D(gg').$$

Mit der Injektivität aus 2.14 (b) folgt also die Gleichheit der beiden Brüche in  $K(Z)$  und damit von  $\frac{f}{g}$  und  $\frac{f'}{g'}$  in  $K(Z)$ . Nun folgt leicht aus der Bruchrechnung, dass die gewonnene, wohldefinierte Abbildung ein injektiver Homomorphismus von  $k$ -Algebren ist. Die Kompatibilität mit Restriktionen folgt wie die Wohldefiniiertheit.

**Bemerkung 3.8** Sei  $Z$  irreduzible affine  $k$ -Varietät. Dann können wir also die Ringe  $\mathcal{O}(U)$  für alle nicht-leeren offenen Teilmengen  $U \subseteq Z$  als Unterringe von  $K(Z)$  auffassen, indem wir sie mit ihrem Bild in  $K(Z)$  identifizieren (dies verallgemeinert 2.14 (b)). Dabei gilt  $\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{O}(U')$  für  $U' \subseteq U$ . Die Garbenbedingung (ii) wird dabei

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}(U_i) \quad \text{falls } (U_i)_{i \in I} \text{ offene Überdeckung von } U \text{ mit } U_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I.$$

Weiter ist für  $s \in \mathcal{O}(U)$  bereits  $s = 0$ , wenn  $s|_V = 0$  für eine nicht-leere offene Menge  $V \subseteq U$  (“Identitätssatz für reguläre Funktionen”).

**Lemma 3.9** Sei  $Z$  eine irreduzible affine  $k$ -Varietät und sei  $\varphi \in K(Z)$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte größte nicht-leere offene Menge  $U \subseteq Z$  mit  $\varphi \in \mathcal{O}(U)$  (im Sinne von Bemerkung 3.8).  $U$  heißt die Definitionsmenge von  $\varphi$  und  $Z \setminus U$  heißt die Polmenge von  $\varphi$ .

**Beweis** Nach Definition gibt es  $f, g \in \mathcal{O}(Z), g \neq 0$ , mit  $\varphi = \frac{f}{g}$ . Dann ist  $D(g) \neq \emptyset$  und  $\varphi$  regulär auf  $D(g)$ , also  $\varphi \in \mathcal{O}(D(g))$ . Sei nun  $\mathfrak{U}$  die Menge der nicht-leeren offenen Mengen  $V \subseteq Z$  mit  $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ . Dann ist  $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ , und wir setzen

$$U = \bigcup_{V \in \mathfrak{U}} V.$$

Dann gilt  $\varphi \in \bigcap_{V \in \mathfrak{U}} \mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(U)$ , und  $U$  leistet das Gewünschte.

Wir kommen nun zu projektiven Varietäten.

**Definition 3.10** Sei  $R$  ein Ring. Ein Polynom  $f \in R[X_1, \dots, X_n]$  heißt homogen vom Grad  $N$ , wenn  $f$  Summe von Monomen  $aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  vom Grad  $i_1 + \dots + i_n = N$  ist, d.h., wenn

$$f = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=N} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n} \quad \text{mit} \quad a_{i_1, \dots, i_n} \in R.$$

Ist  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  homogen vom Grad  $N$  ( $k$  Körper), so gilt

$$(16) \quad f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^N f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{für alle } \lambda \in k.$$

Hat  $k$  unendlich viele Elemente, so gilt auch die Umkehrung. Insbesondere gilt für alle  $\lambda \in k^\times$

$$(17) \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = 0.$$

Die Nullstellenmenge  $Z(f) \in k^n$  ist also homogen, d.h., für  $\lambda \in k^\times$  gilt

$$(x_1, \dots, x_n) \in Z(f) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in Z(f).$$

Dies führt auf die folgende Äquivalenzrelation.

**Definition 3.11** Für  $n \in \mathbb{N}$  definiere

$$\mathbb{P}^n(k) := (k^{n+1} \setminus \{0\})/k^\times := (k^{n+1} \setminus \{0\})/\sim,$$

mit der Äquivalenzrelation

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad (x_0, \dots, x_n) = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n) \quad \text{für ein } \lambda \in k^\times.$$

Die Äquivalenzklasse von  $(x_0, \dots, x_n)$  wird auch mit  $(x_0 : \dots : x_n)$  bezeichnet.  $\mathbb{P}^n(k)$  heißt auch der  $n$ -dimensionale projektive Raum.

**Bemerkungen 3.12** (a) Es ist also  $(x_0 : \dots : x_n) = (\lambda y_0 : \dots : \lambda y_n)$  für  $\lambda \in k^\times$ . Der Ausdruck  $(0 : \dots : 0)$  ist nicht erlaubt; es muss mindestens ein  $x_i \neq 0$  sein.

(b)  $\mathbb{P}^n(k)$  hat auch die folgende Bedeutung: Es gibt eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\xrightarrow{\text{bij.}} \{\text{Hyperebenen in } k^{n+1}\} \\ a = (a_0 : \dots : a_n) &\mapsto \text{Hyperebene } H_a \text{ mit der Gleichung } \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0 \end{aligned}$$

(Eine Hyperebene  $W \subseteq k^m$  ist ein Untervektorraum der Dimension  $m - 1$ ). Tatsächlich werden alle Hyperebenen so erhalten, dabei hängt  $H_a$  nur von der Äquivalenzklasse  $a$  von  $(a_0, \dots, a_n)$  ab.

(c) Entsprechend setzt man  $\mathbb{A}^n(k) = k^n$  und nennt dies den affinen Raum der Dimension  $n$ .

$\mathbb{A}^n(k)$  ist eine affine Varietät. Wir wollen nun auf  $\mathbb{P}^n(k)$  eine ähnliche Struktur einführen, die einer sogenannten projektiven Varietät. Dies ist analog zur bisher betrachteten Theorie, nur müssen überall *homogene* Polynome betrachtet werden.

Für  $a = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$  und ein homogenes Polynom  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  ist zwar  $F(a_0, \dots, a_n)$  nicht wohldefiniert (dies kann vom Repräsentanten  $(a_0, \dots, a_n)$  abhängen), aber die Aussage

$$F(a_0, \dots, a_n) = 0$$

hängt nach (17) nicht vom Repräsentanten  $(a_0, \dots, a_n)$ , sondern nur von der Klasse  $(a_0 : \dots : a_n)$  ab. Wir schreiben auch  $F(a) = 0$ .

**Definition 3.13** (a) Seien  $F_1, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogene Polynome (nicht notwendig vom selben Grad). Dann heißt

$$Z_+(F_1, \dots, F_m) := \{a \in \mathbb{P}^n(k) \mid F_i(a) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$$

die projektive Nullstellenmenge von  $F_1, \dots, F_m$ .

(b) Eine Menge  $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt algebraisch, wenn sie eine projektive Nullstellenmenge ist.

Wir wollen dies auf (*homogene*) Ideale erweitern.

**Definition 3.14** (a) Ein gradierter Ring ist ein Ring (kommutativ, mit Eins) zusammen mit einer (positiven) Graduierung, d.h., einer Summenzerlegung

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n,$$

mit Untergruppen  $A_n$ , so dass gilt  $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$ , d.h.,

$$a \in A_m, \quad b \in A_n \quad \Rightarrow \quad ab \in A_{m+n}$$

(Es folgt, dass  $1 \in A_0$  und dass  $A_0$  ein Unterring ist). Die Elemente in  $A_n$  heißen homogen vom Grad  $n$ . Jedes  $a \in A$  hat also eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n,$$

wobei  $a_n \in A_n$  und  $a_n = 0$  für fast alle  $n$ . Das eindeutig bestimmte  $a_n$  heißt die homogene Komponente vom Grad  $n$  von  $a$ .

(b) Sei  $R$  ein Ring. Eine graduierte  $R$ -Algebra ist eine  $R$ -Algebra  $A$  zusammen mit einer Summenzerlegung

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

in  $R$ -Untermoduln  $A_n$ , so dass  $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$  (Es folgt, dass  $A_0$  eine  $R$ -Unteralgebra ist).

**Beispiel 3.15** Für jeden Ring  $R$  ist der Polynomring  $A = R[X_1, \dots, X_n]$  ist eine graduierte  $R$ -Algebra, wenn man setzt

$$A_m = \{\text{homogene Polynome vom Grad } m\}.$$

**Lemma/Definition 3.16** Ein Ideal  $\mathfrak{a}$  in einem graduierten Ring  $A = \bigoplus_{m=0}^{\infty} A_m$  heißt *homogen*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i)  $\mathfrak{a}$  wird von homogenen Elementen erzeugt.

(ii) Für  $a \in \mathfrak{a}$  sind auch alle homogenen Komponenten  $a_n \in \mathfrak{a}$ .

(iii)  $\mathfrak{a} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{a}_m$ , wobei  $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a} \cap A_m$  die Untergruppe der homogenen Elemente vom Grad  $m$  in  $\mathfrak{a}$  ist.

**Beweis** der Äquivalenzen:

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $\mathfrak{a} = \langle a_i \mid i \in I \rangle$  mit homogenen  $a_i$ , wobei  $a_i$  homogen vom Grad  $d_i$  ist. Sei  $a = \sum_{j=1}^m r_j a_{i_j}$  mit  $r_j \in A$  und  $r_j = \sum_{n=0}^{\infty} r_j^{(n)}$  die Zerlegung von  $r_j$  in homogene Komponenten. Dann ist  $a = \sum_k a_k$ , wobei

$$a_k = r_1^{k-d_{i_1}} a_{i_1} + \dots + r_m^{k-d_{i_m}} a_{i_m}$$

vom Grad  $k$  ist. Also ist  $a_k$  die homogene Komponente vom Grad  $k$  von  $a$ . Weiter ist  $a_k \in \mathfrak{a}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Ist  $(b_i)_{i \in I}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{a}$ , und sind die homogenen Komponenten der  $b_i$  wieder in  $\mathfrak{a}$ , so bilden diese ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{a}$ . Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist klar.

Ist  $\mathfrak{a}$  ein homogenes Ideal in einem graduierten Ring  $A$ , so erhält der Faktorring  $A/\mathfrak{a}$  wieder die Struktur eines graduierten Rings, vermöge der Definition

$$(18) \quad (A/\mathfrak{a})_n = (A_n + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \cong A_n/\mathfrak{a}_n,$$

wobei der Isomorphismus aus der Surjektion  $A_n \rightarrow (A_n + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$  mit Kern  $\mathfrak{a} \cap A_n = \mathfrak{a}_n$  folgt. Denn es ist

$$A/\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \geq 0} (A_n + \mathfrak{a})/\mathfrak{a},$$

denn jedes  $\bar{a} = a \bmod \mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a}$  lässt sich offenbar als Summe  $\bar{a} = \sum \bar{a}_n$  mit  $a_n \in A_n$  darstellen; weiter ist die Summe direkt: Ist  $a = \sum a_n$  (endliche Summe) mit  $a_n \in A_n$ , und gilt  $\bar{a} = 0$ , also  $a \in \mathfrak{a}$ , so sind nach Lemma 3.16 alle  $a_n \in \mathfrak{a}$ , also  $\bar{a}_n = 0$ .

**Definition 3.17** Sei  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  ein homogenes Ideal. Dann heißt

$$Z_+(\mathfrak{a}) = \{a \in \mathbb{P}^n(k) \mid F(a) = 0 \text{ für alle homogenen } F \in \mathfrak{a}\}$$

die projektive Nullstellenmenge von  $\mathfrak{a}$ .

Nach Hilberts Basissatz hat  $\mathfrak{a}$  endlich viele Erzeugende. Nach dem Schluss im Beweis von 3.16 hat  $\mathfrak{a}$  also auch endlich viele homogene Erzeugende  $F_1, \dots, F_m$ . Dann ist

$$Z_+(\mathfrak{a}) = Z_+(F_1, \dots, F_m).$$

Wir erhalten also dieselben Mengen wie in Definition 3.13. Weiter folgt ähnlich wie in Lemma 2.1 (wobei man immer mit homogenen Elementen argumentiert).

**Lemma 3.18** Für homogene Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i$  ( $i \in I$ ) in  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  gilt in  $\mathbb{P}^n(k)$

$$(a) \quad Z_+(\mathfrak{a}) \cup Z_+(\mathfrak{b}) = Z_+(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = Z_+(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

$$(b) \quad \bigcap_{i \in I} Z_+(\mathfrak{a}_i) = Z_+(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i).$$

$$(c) \quad Z_+(R) = \emptyset, \quad Z_+(\{0\}) = \mathbb{P}^n(k).$$

Somit können wir definieren:

**Definition 3.19** Die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{P}^n(k)$  ist die Topologie, für die die abgeschlossenen Mengen die projektiven algebraischen Mengen sind. Für homogenes  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  heißt

$$D_+(F) = \mathbb{P}^n(k) \setminus Z_+(F)$$

die Standard-offene Teilmenge zu  $F$ .

Analog zum affinen Fall folgt, dass die Standard-offenen Mengen eine Basis der Topologie bilden.

Sei nun  $k$  algebraisch abgeschlossen. Dann nennen wir projektive algebraische Mengen auch *projektive (algebraische) Varietäten* und offene Teilmengen von diesen *quasi-projektive Varietäten*.

**Lemma/Definition 3.20** Für eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  definiere das Verschwindungsideal von  $M$  durch  $I_+(M) = I(M) \cap k[X_0, \dots, X_n]_+$ , wobei

$$I(M) = \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } a = (a_0 : \dots : a_n) \in M\}$$

und  $k[X_0, \dots, X_n]_+ = \bigoplus_{m>0} k[X_0, \dots, X_n]_m = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ .  $I(M)$  und  $I_+(M)$  sind homogene Radikalideale.

**Beweis** der Behauptung: Schreibe  $f = \sum_m f_m$ , wobei  $f_m$  homogen vom Grad  $m$  ist. Dann ist

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_m \lambda^m f_m(a_0, \dots, a_n)$$

für alle  $\lambda \in k^\times$ . Ist die linke Seite null für alle  $\lambda \in k^\times$  und  $k$  algebraisch abgeschlossen, so ist  $k$  unendlich, und es folgt  $f_m(a_0, \dots, a_n) = 0$  für alle  $m$ , woraus wiederum  $f_m(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$  für alle  $\lambda \in k^\times$  folgt. Mit  $f \in I(M)$  ist also auch  $f_m \in I(M)$  für alle  $m$ , d.h.,  $I(M)$  ist homogen. Weiter ist  $I(M)$  trivialerweise ein Radikalideal. Die Behauptungen für  $I_+(M)$  folgen.

Für  $M \neq \emptyset$  ist  $I(M) = I_+(M)$ , da  $1 \notin I(M)$ . Für  $M = \emptyset$  ist  $I(\emptyset) = k[X_0, \dots, X_n] \neq I_+(\emptyset) = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ , aber  $Z_+(I(\emptyset)) = Z_+(I_+(\emptyset))$ . Durch den Übergang zu Idealen, die in  $k[X_0, \dots, X_n]_+$  enthalten sind, wird die Abbildung  $Z_+$  im folgenden Satz injektiv.

**Satz 3.21** (Projektiver Nullstellensatz) Für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  mit  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]_+$  ist

$$I_+(Z_+(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Für  $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ist

$$Z_+(I_+(M)) = \overline{M} \quad (\text{Zariski-Abschluss}).$$

Die Zuordnungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{homogene Radikalideale} \\ \mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]_+ \subseteq k[X_0, \dots, X_n] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_+} \\ \xleftarrow{I_+} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{projektive } k\text{-Varietäten} \\ Z \subseteq \mathbb{P}^n(k) \end{array} \right\}$$

sind zueinander inverse Bijektionen.

Zum Beweis benutzen wir:

**Lemma/Definition 3.22** (a) Eine affine Varietät  $Z \subseteq k^n$  heißt *Kegel*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(i)  $(x_1, \dots, x_n) \in Z \Rightarrow (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in Z$  für alle  $\lambda \in K$ .

(ii)  $Z = Z(F_1, \dots, F_m)$  für homogene Polynome  $F_1, \dots, F_m$ .

(b) Der affine Kegel  $\tilde{Z} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$  einer projektiven Varietät  $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  besteht aus allen Punkten  $(x_0, \dots, x_n)$  mit  $(x_0 : \dots : x_n) \in Z$ , sowie dem Punkt  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$ .  $\tilde{Z}$  ist eine affine Varietät, also ein Kegel im Sinne von (a).

**Beweis** der Behauptungen: (ii)  $\Rightarrow$  (i) ist klar, und (i)  $\Rightarrow$  (ii) folgt wie im Beweis zu 3.20 (da  $k$  algebraisch abgeschlossen ist). Ist in (b)  $Z = Z_+(F_1, \dots, F_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  mit homogenen  $F_1, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $\tilde{Z} = Z(F_1, \dots, F_m) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ .

**Beweis von 3.21:** Offenbar ist die Zuordnung  $Z \mapsto \tilde{Z}$  eine Bijektion zwischen den projektiven Varietäten in  $\mathbb{P}^n(k)$  und den Kegeln in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ . Dabei ist  $I_+(Z) = I(\tilde{Z})$ . Weiter entsprechen die Kegel  $\tilde{Z}$  in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)$  mittels Hilberts Nullstellensatz den homogenen Radikallidealen  $I$  mit  $I \subseteq \langle X_0, \dots, X_n \rangle$  (wegen  $0 \in \tilde{Z}$ ). Hieraus folgt die Behauptung.

**Definition 3.23** Der homogene Koordinatenring einer projektiven Varietät  $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ist die graduierte  $k$ -Algebra

$$\mathcal{O}_*(Z) = k[X_0, \dots, X_n]/I_+(Z).$$

Diese  $k$ -Algebra ist nach den Erläuterungen vor 3.17 graduiert, da  $I_+(Z)$  ein homogenes Ideal ist. Anders als im affinen Fall können wir die Elemente von  $\mathcal{O}_*(Z)$  aber nicht als Funktionen auf  $Z$  deuten, da selbst für homogenes  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  der Wert  $F(a_0, \dots, a_n)$  von  $(a_0, \dots, a_n) \in k^{n+1}$  abhängt und nicht nur von  $(a_0 : \dots : a_n)$ . Die richtige Definition ist:

**Definition 3.23** Sei  $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine projektive Varietät und  $U \subseteq Z$  offen (also quasi-projektiv). Eine Abbildung

$$\varphi : U \rightarrow k$$

heißt *reguläre Funktion* auf  $U$ , wenn es für jeden Punkt  $P \in U$  eine offene Umgebung  $U'$  von  $P$  in  $U$  gibt und homogene Polynome  $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom gleichen Grad gibt mit

$$G(a_0, \dots, a_n) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(Q) = \frac{F(a_0, \dots, a_n)}{G(a_0, \dots, a_n)}$$

für alle  $Q = (a_0 : \dots : a_n) \in U'$ .

Der rechts stehende Bruch ist wohldefiniert: Sind  $F$  und  $G$  beide vom Grad  $m$ , so gilt für  $\lambda \in k^\times$

$$\frac{F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)}{G(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)} = \frac{\lambda^m F(a_0, \dots, a_n)}{\lambda^m G(a_0, \dots, a_n)} = \frac{F(a_0, \dots, a_n)}{G(a_0, \dots, a_n)},$$

so dass der Bruch nur von  $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$  abhängt. Wir schreiben auch manchmal  $F(Q)/G(Q)$  (Für  $F$  und  $Q$  homogen vom gleichen Grad!).

Wie im Affinen erhält man nun:

**Lemma/Definition 3.24** Sei  $V$  eine quasi-projektive Varietät. Durch die Definition

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &= \{\text{reguläre Funktion auf } U\} & (U \subseteq V \text{ offen}), \\ \text{res}_{U,U'} &= \text{Einschränkungsabbildung } \varphi \mapsto \varphi|_{U'} & (U' \subseteq U) \end{aligned}$$

erhält man eine Garbe von  $k$ -Algebren auf  $V$ , die Garbe der regulären Funktionen auf  $V$  (Hierbei sei wieder  $\mathcal{O}(\emptyset) = \{0\}$  gesetzt).

Wir kommen nun zu regulären Abbildungen.

**Definition 3.25** Seien  $V, V'$  quasi-affine oder quasi-projektive Varietäten.

(a) Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  heißt regulär, wenn gilt:

(i)  $\varphi$  ist stetig (bezüglich der Zariski-Topologie),

(ii) Für jede offene Menge  $U' \subseteq V'$  und jede reguläre Funktion  $\psi : U' \rightarrow k$  auf  $U'$  ist

$$\psi \circ \varphi|_U : U := \varphi^{-1}(U') \xrightarrow{\varphi} U' \xrightarrow{\psi} k$$

regulär.

(b) Eine reguläre Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  ist ein Isomorphismus, wenn es eine reguläre Abbildung  $\psi : V' \rightarrow V$  gibt mit  $\psi \circ \varphi = id_V$  und  $\varphi \circ \psi = id_{V'}$ .

Wir wollen nun die Struktur des projektiven Raums  $\mathbb{P}^n(k)$  noch etwas besser verstehen. Für jedes der Elemente  $X_i \in k[X_0, \dots, X_n]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (die sogenannten projektiven Koordinaten) ist nach Definition die Menge  $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus Z_+(X_i)$  offen in  $\mathbb{P}^n(k)$ . Nach Definition ist

$$D_+(X_i) = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid a_i \neq 0\}.$$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$(19) \quad \begin{aligned} \varphi_i : D_+(X_i) &\rightarrow \mathbb{A}^n(k) \\ (a_0 : \dots : a_n) &\mapsto \left( \frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\widehat{a_i}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\frac{a_i}{a_i}$  ausgelassen wird, wie angedeutet. Diese Abbildung ist offenbar wohldefiniert und bijektiv.

**Lemma 3.26**  $\varphi_i$  ist ein Homöomorphismus.

**Beweis** Wir haben zu zeigen, dass  $\varphi_i$  die abgeschlossenen Mengen in  $U_i$  mit den abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{A}^n(k)$  identifiziert. Sei  $S = k[X_0, \dots, X_n]$  und  $A_i = k[x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n]$  (Polynomring in den Variablen  $\{x_0, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ ). Zu jedem homogenen Element  $F(X_0, \dots, X_n) \in S$  assoziiere das Element

$$\alpha_i(F) = F(x_0, \dots, 1, \dots, x_n) \in A_i,$$

wobei die 1 an der  $i$ -ten Stelle steht (Wir setzen also  $X_i = 1$  und ersetzen die anderen  $X_j$  durch  $x_j$ ). Umgekehrt assoziiere zu jedem  $f \in A_i$  das homogene Polynom vom Grad  $d = \deg(f)$

$$\beta_i(f) = X_i^d f \left( \frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right).$$

$\beta_i(f)$  heißt auch die *Homogenisierung* von  $f$  (mittels der Koordinate  $X_i$ ).

*Beispiel:* Für  $n = 2, i = 0$  und  $F = X_0^5 + X_0^2 X_1^3 + X_0 X_2^4$  ist  $\alpha_0(F) = 1 + x_1^3 + x_2^4$ . Für  $f = x_1^3 + x_1 x_2 + x_2$  ist  $\beta_0(f) = X_0^3 (\frac{X_1^3}{X_0^3} + \frac{X_1 X_2}{X_0 X_0} + \frac{X_2}{X_0}) = X_1^3 + X_0 X_2 X_3 + X_0^2 X_2$ , d.h., man "füllt mit  $X_0$  zu einem homogenen Polynom auf".

Nun sei  $Y \subseteq D(X_i)$  abgeschlossen und sei  $\bar{Y}$  der Abschluss von  $Y$  in  $\mathbb{P}^n(k)$ ; dies ist eine algebraische Menge. Seien  $F_1, \dots, F_m$  homogene Polynome in  $S$  mit  $\bar{Y} = Z_+(F_1, \dots, F_m)$ . Dann sieht man leicht, dass

$$\varphi_i(Y) = Z(\alpha_i(F_1), \dots, \alpha_i(F_m)).$$

Umgekehrt sei  $W \subseteq \mathbb{A}_k^n$  abgeschlossen, etwa  $W = Z(f_1, \dots, f_m)$  mit  $f_1, \dots, f_m \in A_i$ . Dann sieht man wieder leicht, dass  $\varphi_i^{-1}(W) = Z_+(\beta_i(f_1), \dots, \beta_i(f_m)) \cap D_+(X_i)$ .

**Satz 3.27** Die Abbildung

$$\varphi_i : D_+(X_i) \rightarrow V_i = \mathbb{A}^n(k) \quad , \quad (a_0 : \dots : a_n) \mapsto \left( \frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\hat{a}_i}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right)$$

ist ein Isomorphismus von  $k$ -Varietäten (wobei  $D_+(X_i)$  quasi-projektiv und  $\mathbb{A}^n(k)$  affin ist).

**Beweis** 1) Nach 3.26 ist  $\varphi_i$  stetig.

2) Wir verwenden die  $n$  Koordinaten  $x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$  auf dem Bildraum  $V_i = \mathbb{A}^n(k)$ . Ist

$$pr_j : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow k \quad (j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\})$$

die Projektion, so ist  $pr_j \circ \varphi_i$  gegeben durch

$$a = (a_0 : \dots : a_n) \mapsto \frac{a_j}{a_i} = \frac{X_j(a)}{X_i(a)},$$

ist also eine reguläre Funktion auf  $D_+(X_i)$ . Da der Ring

$$A_i = \mathcal{O}(V_i) = k[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

der regulären Funktionen auf  $\mathbb{A}^n(k)$  als  $k$ -Algebren von den Projektionen  $pr_j = x_j$  erzeugt wird und die Abbildung  $\psi \mapsto \psi \circ \varphi_i$  mit  $+$ ,  $\cdot$  und Skalarmultiplikation verträglich ist, ist  $\psi \circ \varphi_i$  für jedes  $\psi \in \mathcal{O}(V_i)$  regulär auf ganz  $D_+(X_i)$ .

Ist nun  $W \subseteq V_i$  offen und  $\psi \in \mathcal{O}(W)$ , so ist  $\psi$  lokal von der Form  $\psi_1/\psi_2$  mit  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{O}(V_i)$ , also  $\psi \circ \varphi_i$  lokal von der Form  $\psi_1 \circ \varphi/\psi_2 \circ \varphi$ , wobei  $\psi_\nu \circ \varphi_i$  regulär auf ganz  $D_+(X_i)$  ist ( $\nu = 1, 2$ ). Dies zeigt, dass  $\psi \circ \varphi_i$  regulär auf  $\varphi_i^{-1}(W)$  ist (Details: selbst). Also ist  $\varphi_i$  regulär.

3)  $\psi_i := \varphi_i^{-1}$  ist nach 3.26 stetig.

4) Sei  $U' \subseteq D_+(X_i)$  offen und  $\varphi : U' \rightarrow k$  regulär. Für alle  $P \in U'$  gibt es also eine offene Umgebung  $W'_P$  von  $P$  in  $U'$  sowie  $F, G \in S = k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom gleichen Grad  $d$ , mit

$$G(Q') \neq 0 \quad , \quad \varphi(Q') = \frac{F(Q')}{G(Q')} \quad \forall Q' \in W'_P.$$

Nach 3) ist  $W_P := \psi_i^{-1}(W'_P)$  offen. Weiter gilt für alle  $Q = (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) \in W_P$

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi_i(Q) &= \varphi(a_0 : \dots : 1 : \dots : a_n) \quad (1 \text{ an der } i\text{-ten Stelle}) \\ &= \frac{F(a_0, \dots, 1, \dots, a_n)}{G(a_0, \dots, 1, \dots, a_n)} \\ &= \frac{\alpha_i(F)(Q)}{\alpha_i(G)(Q)}, \end{aligned}$$

wobei der Nenner nicht null ist und  $\alpha_i(F), \alpha_i(G) \in A_i = \mathcal{O}(V_i)$  sind. Also ist auch  $\psi_i$  regulär (die obigen Mengen  $W_P$  überdecken  $\psi_i^{-1}(U')$ ).

Wir können nun auch  $\mathcal{O}(D_+(X_i))$  beschreiben:

**Lemma/Definition 3.28** Sei  $S$  ein graduierter Ring,  $G \in S$  ein homogenes Element vom Grad  $d$  (also  $G \in S_d$ ) und  $S_G$  die Lokalisierung nach  $G$ . Dann definiere

$$S_{(G)} := \left\{ \frac{F}{G^m} \in S_G \mid F \text{ homogen vom Grad } md \right\}.$$

Dies ist ein Unterring von  $S_G$ , und eine Unter- $R$ -Algebra, wenn  $S$  eine  $R$ -Algebra für einen Ring  $R$  ist.

**Beweis** der Behauptungen: selbst.

**Corollar 3.29** Es gibt kanonische Isomorphismen von  $k$ -Algebren

$$A_i = k[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] \xrightarrow{\tilde{\beta}_i} k[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}(D_+(X_i)),$$

wobei  $\tilde{\beta}_i$  durch

$$x_j \mapsto \frac{X_j}{X_i} \quad (j \neq i) \quad \text{bzw.} \quad f \mapsto f \left( \frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right) = \frac{\beta_i(f)}{X_i^{\deg(f)}}$$

gegeben ist und  $\gamma$  durch

$$\frac{F}{X_i^m} \mapsto \varphi \text{ mit } \varphi(P) = \frac{F(P)}{X_i(P)^m}.$$

**Beweis** Die Komposition  $\gamma \circ \tilde{\beta}_i$  ist nach dem Beweis von 3.27 die Abbildung

$$(20) \quad \mathcal{O}(V_i) \rightarrow \mathcal{O}(D_+(X_i)), \quad \psi \mapsto \psi \circ \varphi_i,$$

denn beide Homomorphismen bilden  $x_j$  auf die Funktion  $(a_0 : \dots : a_n) \mapsto \frac{a_j}{a_i}$  ab. Nach Satz 3.27 ist (20) ein Isomorphismus (die Umkehrabbildung ist  $\varphi \mapsto \varphi \circ \psi_i$ ). Weiter ist  $\tilde{\beta}_i$  offenbar ein Isomorphismus: die Umkehrabbildung ist

$$\frac{F}{X_i^m} \mapsto F(x_0, \dots, 1, \dots, x_n) = \alpha_i(F).$$

Es folgt, dass auch  $\gamma$  ein Isomorphismus ist.

**Bemerkung 3.30** Nach Definition bilden

$$D_+(X_0), \dots, D_+(X_n)$$

eine Überdeckung von  $\mathbb{P}^n(k)$  durch  $n + 1$  offene Mengen (die nach 3.27 jeweils isomorph zu  $\mathbb{A}^n(k)$  sind). Dabei ist für  $i \neq j$

$$D_+(X_i) \cap D_+(X_j) = D_+(X_i X_j)$$

und entspricht unter dem Isomorphismus  $D_+(X_i) \cong V_i \cong \mathbb{A}^n(k)$  der Standard-offenen Menge in  $V_i$

$$D(x_j) = \{P = (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) \mid a_j \neq 0\}.$$

Wir nennen die  $D_+(X_i)$  auch die Standard-Karten von  $\mathbb{P}^n(k)$ .

**Beispiele 3.31** (a) Es ist  $\mathbb{P}^1(k) = D_+(X_0) \cup D_+(X_1)$ , wobei

$$D_+(X_1) = \{(a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1(k) \mid a_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1(k) \\ (a : 1) \leftrightarrow a.$$

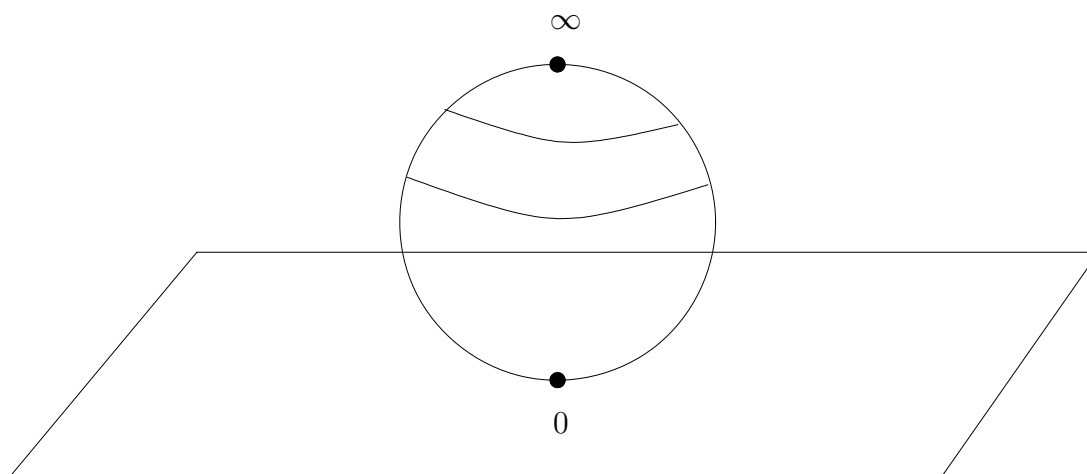
Dies liefert die sogenannte Standard-Einbettung

$$\mathbb{A}^1(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad a \mapsto (a : 1)$$

(mit Bild  $D_+(X_1)$ ). Das Komplement  $\mathbb{P}^1(k) \setminus \mathbb{A}^1(k) := \mathbb{P}^1(k) \setminus D_+(X_1)$  besteht nur aus einem Punkt, nämlich

$$(1 : 0).$$

Man nennt diesen auch den Punkt  $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$ . Man kann sich dies so vorstellen, dass  $\mathbb{A}^1(k)$  durch Hinzunahme des Punktes  $\infty$  zum  $\mathbb{P}^1(k)$  ‘kompaktifiziert’ wird – dies stimmt für die Zariski-Topologie aber nicht wörtlich. Über  $k = \mathbb{C}$  ist  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  die ‘Riemannsche Zahlenkugel’:



(Kugel ohne  $\infty$  ist isomorph zu  $\mathbb{C}$ , durch stereographische Projektion), die tatsächlich kompakt ist (in der Topologie einer komplexen Mannigfaltigkeit).

Natürlich ist auch  $D_+(X_0) \cong \mathbb{A}^1(k)$ , und  $\mathbb{P}^1(k) \setminus D_+(X_0)$  besteht aus einem Punkt, nämlich  $(0 : 1)$ , dem Nullpunkt in  $D_+(X_1) = \mathbb{A}^1(k)$ .

(b) Entsprechend hat man für  $n \geq 2$  eine Standard-Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(k) \cong D_+(X_n) &\hookrightarrow \mathbb{P}^n(k) \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) &\mapsto (a_0 : \dots : a_{n-1} : 1) \end{aligned}$$

und das Komplement ist

$$\begin{aligned} Z_+(X_n) = \{(a_0 : \dots : a_n) \mid a_n = 0\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (a_0 : \dots : a_{n-1} : 0) &\mapsto (a_0 : \dots : a_{n-1}) \end{aligned}$$

(Beweis, dass die rechte Abbildung ein Isomorphismus ist: selbst).

Im Folgenden sagen wir  $k$ -Varietät, wenn wir eine affine, quasi-affine, projektive oder quasi-projektive  $k$ -Varietät betrachten. Weiter nennen wir eine  $k$ -Varietät auch affin, quasi-affin usw., wenn sie isomorph zu einer solchen Varietät ist. Nach Satz 3.27 ist dann tatsächlich jede Varietät (in unserem Sinne) quasi-projektiv: Ist nämlich  $V$  quasi-affin, so gibt es eine affine  $k$ -Varietät  $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $V \subseteq Z$  offen ist. Per Definition gibt es dann eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  mit  $V = Z \cap U$ . Wählen wir nun die Standard-Einbettung  $\mathbb{A}^n(k) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ , so ist  $U$  offen in  $\mathbb{P}^n(k)$ . Der Abschluss  $\bar{Z}$  von  $Z$  in  $\mathbb{P}^n(k)$  ist eine projektive Varietät mit  $Z = \mathbb{A}^n(k) \cap \bar{Z}$ . Also ist  $V = Z \cap U = \bar{Z} \cap U \cap \mathbb{A}^n(k)$  quasi-projektiv.

**Bemerkung 3.32** Es gibt auch eine allgemeinere Definition von Varietäten, die die quasi-projektiven einschließt, aber mehr Varietäten enthält.

Aus dem projektiven Nullstellensatz folgt wie im affinen Fall (Lemma 3.6):

**Lemma 3.33** Eine projektive  $k$ -Varietät  $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ist genau dann irreduzibel, wenn ihr homogener Koordinatenring  $\mathcal{O}_*(Z)$  ein Integritätsring ist.

**Bemerkung 3.34** Analog zu Bemerkung 2.10 (b) kann man die Zariski-Topologie auf  $Z$  allein durch  $\mathcal{O}_*(Z)$  definieren: Obwohl die Elemente in  $\mathcal{O}_*(Z)$  keine Funktion auf  $Z$  sind, sind die Nullstellenmengen

$$Z_+(g) = \{P \in Z \mid g(P) = 0\}$$

für *homogene* Elemente  $f \in \mathcal{O}_*(Z) = k[X_0, \dots, X_n]/I_+(Z)$  definiert, und die Nullstellenmengen von homogenen Idealen  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$

$$Z_+(\mathfrak{a}) = \{P \in Z \mid g(P) = 0 \text{ für alle homogenen } g \in \mathfrak{a}\}$$

sind wohldefiniert und bilden die abgeschlossenen Mengen von  $Z$ . Entsprechend sind die Mengen  $D_+(g) = Z \setminus Z_+(g)$  für homogene  $g \in \mathcal{O}_*(Z)$  definiert und bilden eine Basis der Topologie.

**Lemma/Definition 3.35** Für eine irreduzible projektive  $k$ -Varietät  $Z$  ist

$$K(Z) = \left\{ \frac{F}{G} \in \text{Quot}(\mathcal{O}_*(Z)) \mid F, G \in \mathcal{O}_*(Z) \text{ homogen vom gleichen Grad, } G \neq 0 \right\}$$

ein Teilkörper von  $\text{Quot}(\mathcal{O}_*(Z))$  und heißt der *Funktionskörper* von  $Z$ . Seine Elemente heißen auch die (algebraischen) meromorphen Funktionen auf  $Z$ .

**Beweis** dass dies ein Teilkörper ist: selbst!

**Beispiele 3.36**  $\mathbb{P}^n(k)$  ist irreduzibel, und es ist

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = k\left(\frac{X_0}{X_n}, \dots, \frac{X_{n-1}}{X_n}\right) \cong k(x_0, \dots, x_{n-1}) = K(\mathbb{A}^n(k))$$

ein rationaler Funktionenkörper in den Variablen

$$\frac{X_i}{X_n} = x_i \quad (i = 0, \dots, n-1).$$

Wie in Lemmas 3.7 und 3.9 zeigt man:

**Lemma 3.37** Sei  $Z$  eine irreduzible projektive  $k$ -Varietät und sei  $K(Z)$  ihr Funktionenkörper.

(a) Für jede nicht-leere offene Menge  $U \subseteq Z$  gibt es einen kanonischen Monomorphismus von  $k$ -Algebren

$$\mathcal{O}(U) \subseteq K(Z).$$

Dies ist kompatibel mit Restriktionen.

(b) Für jedes  $\varphi \in K(Z)$  gibt es eine größte nicht-leere offene Menge  $V \subseteq Z$  mit  $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ .  $V$  heißt die Definitionsmenge von  $\varphi$  und  $Z \setminus V$  heißt die Polmenge von  $\varphi$ .

**Beweis** Die Abbildung in (a) ist wie folgt definiert: Sei  $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ . Ist  $W \subseteq U$  eine nicht leere offene Menge und sind  $F, G \in \mathcal{O}_*(Z)$  homogen vom gleichen Grad mit

$$G(Q) \neq 0 \quad , \quad \varphi(Q) = \frac{F(Q)}{G(Q)} \quad \forall Q \in W,$$

so wird  $\varphi$  auf  $\frac{F}{G} \in K(Z)$  abgebildet. Die Beweise von (a) und (b) verlaufen dann wie in 3.7 und 3.9.

### 3.A Exakte Sequenzen

Sei  $R$  ein Ring (kommutativ, mit Eins)

**Definition 3.A.1** (a) Eine Sequenz von Moduln (d.h., die folgenden  $f_i$  sind  $R$ -Modul-Homomorphismen)

$$\dots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \rightarrow$$

( $n \in \mathbb{Z}$ , kann abbrechen oder nicht) heißt *Komplex*, wenn  $f_n \circ f_{n-1} = 0$  (d.h.,  $\text{im}(f_{n-1}) \subseteq \text{ker}(f_n)$ ) an allen Stellen.

(b) Die Sequenz heißt *exakt* an der Stelle  $n$  (oder  $M_n$ ), wenn  $\text{im}(f_{n-1}) = \text{ker}(f_n)$ , und sie heißt *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist.

**Lemma 3.A.2** Es gilt:

(a)  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N$  ist genau dann exakt, wenn  $i$  injektiv ist.

(b)  $M \xrightarrow{p} N \rightarrow 0$  ist genau dann exakt, wenn  $p$  surjektiv ist.

(c)  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$  ist genau dann exakt, wenn  $f$  ein Isomorphismus ist.

(d) Eine Sequenz

$$(3.A.1) \quad 0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn  $i$  injektiv ist,  $p$  surjektiv ist und  $i(M')$  der Kern von  $p$  ist.

(e) Ist (3.A.1) exakt, so gilt  $p \circ i = 0$ , und  $p$  induziert einen Isomorphismus

$$M/i(M') \xrightarrow{\sim} M'' .$$

**Beweis** (a):  $\text{ker}(i) = \text{im}(0 \rightarrow M) = 0 \Leftrightarrow i$  ist injektiv.

(b):  $\text{im}(p) = \text{ker}(N \rightarrow 0) = N \Leftrightarrow p$  ist surjektiv.

(c) folgt aus (a) und (b).

(d): Die genannten Aussagen sind gerade die Exaktheit bei  $M'$ , die Exaktheit bei  $M''$  und die Exaktheit bei  $M$ .

(e): Die erste Behauptung ist klar, und die zweite folgt aus dem Homomorphiesatz.

Exakte Sequenzen von  $R$ -Moduln

$$(3.A.2) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

werden auch *kurze exakte Sequenzen* genannt. Identifiziert man  $A$  mit seinem Bild in  $B$ , so kodifiziert die kurze exakte Sequenz die Beziehung

$$B/A \cong C .$$

Wir zeigen nun eine Exaktheitsaussage für das Tensorprodukt.

**Vorbemerkung 3.A.3** Für Morphismen von  $R$ -Moduln  $f : M_1 \rightarrow M_2$  und  $g : N_1 \rightarrow N_2$  hat man einen kanonischen Morphismus von  $R$ -Moduln

$$\begin{array}{ccc} f \otimes g : M_1 \otimes_r N_1 & \rightarrow & M_2 \otimes_R N_2 \\ \text{mit} & & \\ & m_1 \otimes n_1 & \mapsto f(m_1) \otimes f(n_1) \end{array}$$

(entsprechend der bilinearen Abbildung  $(m_1, n_1) \mapsto f(m_1) \otimes f(n_1)$ ). Insbesondere hat man für jeden  $R$ -Modul  $N$  eine kanonische Abbildung

$$f' = f \otimes id_N : M_1 \otimes_R N \rightarrow M_2 \otimes_R N$$

Genauer hat man einen kovarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} - \otimes N & : & (R\text{-Moduln}) \rightarrow (R\text{-Moduln}) \\ & & M \rightsquigarrow M \otimes_R N \\ & & f \rightsquigarrow f \otimes id_N. \end{array}$$

Es gilt nämlich für  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ , dass  $(g \circ f) \otimes id_N = (g \otimes id_N) \circ (f \otimes id_N)$ , und es ist  $id_M \otimes id_N = id_{M \otimes N}$ . Der folgende Satz ist extrem nützlich für das Rechnen mit Tensorprodukten.

**Satz 3.A.4** (Rechtsexaktheit des Tensorproduktes) Ist

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln, so ist für jeden  $R$ -Modul  $N$  auch die Sequenz

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f'} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g'} M_3 \otimes_R N \rightarrow 0$$

exakt, wobei  $f' = f \otimes id_N$  und  $g' = g \otimes id_N$  wie in 3.A.3.

**Beweis:** (1)  $g'$  ist surjektiv:  $M_3 \otimes_R N$  wird erzeugt von Elementen  $m_3 \otimes n$  mit  $m_3 \in M_3, n \in N$ . Für  $m_3$  existiert  $m_2 \in M_2$ , mit  $g(m_2) = m_3$ . Dann ist  $m_3 \otimes n = g'(m_2 \otimes n)$ .

(2)  $\text{im}(f') \subseteq \ker(g')$ : Es ist  $g' \circ f' = g \circ f \otimes id_N = 0$ .

(3)  $\text{im}(f') \supseteq \ker(g')$ : Sei

$$\varphi : M_2 \otimes_R N \rightarrow \text{coker}(f')$$

die kanonische (surjektiven) Abbildung. Definiere damit eine bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} b : M_2 \times N & \rightarrow & \text{coker}(f') \\ (m_2, n) & \mapsto & \varphi(m_2 \otimes n), \end{array}$$

wobei  $m_2 \in M_2$  mit  $g(m_2) = m_3$ . Die Abbildung  $b$  ist wohldefiniert: Da  $g$  surjektiv ist, gibt es immer ein solches  $m_2$ . Ist weiter  $m'_2 \in M_2$  ein anderes Element mit  $g(m'_2) = m_3$ , so ist  $g(m_2 - m'_2) = g(m_2) - g(m'_2) = m_3 - m_3 = 0$ , also  $m_2 - m'_2 \in \ker(g)$ . Wegen der Exaktheit von (3.A.3) gibt es ein  $m_1 \in M_1$  mit  $f(m_1) = m_2 - m'_2$ . Es ist dann

$$\varphi(m_2 \otimes n) - \varphi(m'_2 \otimes n) = \varphi(m_2 \otimes n - m'_2 \otimes n) = \varphi((m_2 - m'_2) \otimes n) = \varphi(f(m_1) \otimes n) = \varphi(f'(m_1 \otimes n)) = 0$$

wegen  $\varphi \circ f' = 0$ . Also ist  $\varphi(m_2 \otimes n) = \varphi(m'_2 \otimes n)$ .

Die bilineare Abbildung  $b$  induziert einen  $R$ -Modul-Homomorphismus

$$\psi : M_2 \otimes_R N \rightarrow \text{coker}(f').$$

Nach Konstruktion gilt dabei für  $m_2 \in M_2$  und  $n \in N$

$$(\psi \circ g')(m_2 \otimes n) = \psi(g(m_2) \otimes n) = b(g(m_2), n) = \varphi(m_2 \otimes n).$$

Also ist  $\psi \circ g' = \varphi$ . Es folgt  $\text{im}(f') = \ker(\varphi) \supseteq \ker(g')$ .

**Bemerkung 3.A.5** Ist  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  exakt, so ist die Sequenz

$$(3.A.4) \quad 0 \rightarrow M_1 \otimes_R N \rightarrow M_2 \otimes_R N \rightarrow M_3 \otimes_R N \rightarrow 0$$

im Allgemeinen nicht exakt, d.h., sie ist im Allgemeinen nicht an der Stelle  $M_1 \otimes_R N$  exakt (das Tensorprodukt ist nur rechtsexakt und nicht exakt). Ein Gegenbeispiel ist das Folgende: Wir haben eine exakte Sequenz von  $\mathbb{Z}$ -Moduln

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

wobei  $\cdot n$  die Multiplikation mit der natürlichen Zahl  $n$  bedeutet. Tensorieren wir dies mit  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , so erhalten wir vermöge der Isomorphismen  $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

wobei  $\cdot n$  die Nullabbildung, also nicht injektiv für  $n \geq 2$  ist.

Die Rechtsexaktheit reicht aber für folgende Anwendung:

**Corollar 3.A.6** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul, und  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus (von  $R$ - bzw. auch von  $R/\mathfrak{a}$ -Moduln)

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R M \cong M/\mathfrak{a}M,$$

wobei  $\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i m_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M \right\}$ .

**Beweis:** Nach Definition ist

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow R \rightarrow R/\mathfrak{a} \rightarrow 0$$

exakt. Nach 3.A.4 ist also

$$\mathfrak{a} \otimes_R M \rightarrow R \otimes_R M \rightarrow R/\mathfrak{a} \otimes M \rightarrow 0$$

exakt. Vermöge der Isomorphie  $R \otimes_R M \cong M$  erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\mathfrak{a} \otimes_R M \rightarrow M \rightarrow R/\mathfrak{a} \otimes_R M \rightarrow 0$$

$$a \otimes m \mapsto a \cdot m, m \mapsto 1 \otimes m,$$

die die Behauptung zeigt, denn das Bild der ersten Abbildung ist offenbar  $\mathfrak{a}M$ .

Es gibt auch entsprechende Exaktheitsaussagen für Hom-Mengen. Hierzu:

**Vorbemerkung 3.A.7** Für einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f : M_1 \rightarrow M_2$  und einen  $R$ -Modul  $N$  haben wir Homomorphismen von  $R$ -Moduln

$$\begin{aligned} f_* : \text{Hom}_R(N, M_1) &\rightarrow \text{Hom}_R(N, M_2) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

(kovariante Funktorialität des Hom-Funktors im rechten Argument) und

$$\begin{aligned} f^* : \text{Hom}_R(M_2, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M_1, N) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

(kontravariante Funktorialität des Hom-Funktors im linken Argument)

Es gilt nun

**Satz 3.A.8** (Linksexaktheit des Hom-Funktors)

(a) Eine Sequenz von  $R$ -Moduln

$$(3.A.5) \quad 0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{j} M_3$$

ist genau dann exakt, wenn die Sequenzen

$$(3.A.6) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_R(N, M_2) \xrightarrow{j_*} \text{Hom}_R(N, M_3)$$

für alle  $R$ -Moduln  $N$  exakt sind.

(b) Eine Sequenz von  $R$ -Moduln

$$(3.A.7) \quad M_1 \xrightarrow{j} M_2 \xrightarrow{k} M_3 \rightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn die Sequenzen

$$(3.A.8) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{k^*} \text{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{j^*} \text{Hom}_R(M_1, N)$$

für alle  $R$ -Moduln  $N$  exakt sind.

**Beweis:** von (a): ((b) ist analog)

(1)  $i$  ist genau dann injektiv, wenn  $i_*$  injektiv für alle  $N$  ist: Ist  $i$  injektiv, so gilt für eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : N \rightarrow M_1$

$$if = 0 \Leftrightarrow i(f(x)) = 0 \quad \forall x \in N \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in N \Leftrightarrow f = 0$$

Dies ist aber gerade die Injektivität von  $i_*$ . Sei umgekehrt  $i_*$  injektiv für alle  $R$ -Moduln  $N$ .

Betrachte  $N = \ker(i)$  und die Inklusion  $\alpha : \ker(i) \hookrightarrow M_1$ . Nach Definition ist  $i\alpha = 0$ , d.h.,  $i_*(\alpha) = 0$ . Nach Voraussetzung ist  $\alpha = 0$ , d.h.,  $\ker(i) = 0$ , also  $i$  injektiv.

(2) Sei (3.A.5) exakt. Nach (1) ist dann  $i_*$  injektiv für alle  $N$ . Wegen  $ji = 0$  ist weiter  $0 = (ji)_* = j_*i_*$ , also  $\text{im}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$ . Sei nun  $N$  gegeben und  $f : N \rightarrow M_1$  im Kern von  $j_*$ , also  $0 = ji : N \rightarrow M_2$ . Dies bedeutet  $\text{im}(f) \subseteq \ker(j)$ , d.h., wir haben eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow \tilde{f} & \nearrow \alpha \\ & & \ker j \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M_2 \\ & \searrow \tilde{f} & \nearrow i \\ & & M_1 \end{array},$$

da  $M_1 \xrightarrow{\sim} \ker(j)$ . Es folgt  $f = i\tilde{f} = i_*(f) \in \text{im}(i_*)$ . Also ist  $\ker(j_*) = \text{im}(i_*)$ . Insgesamt ist (3.A.6) exakt.

(3) Sei (3.A.6) exakt für alle  $N$ . Nach (1) ist dann  $i$  injektiv. Wegen  $j_*i_* = 0$  ist insbesondere  $0 = j_*i_*(id_{M_1}) = ji$ , also  $\text{im}(i) \subseteq \ker(j)$ . Betrachte nun  $N = \ker(j)$  und die Inklusion  $\beta : \ker(j) \hookrightarrow M_2$ . Nach Definition ist  $0 = j\beta = j_*(\beta)$ . Nach Voraussetzung ist also  $\beta \in \text{im}(i_*)$ . Es gibt also einen Homomorphismus  $\gamma : \ker(j) \rightarrow M_1$  mit  $\beta = i_*(\gamma) = i\gamma$ . Dies bedeutet eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} \ker(j) & \xrightarrow{\beta} & M_2 \\ & \searrow \gamma & \nearrow i \\ & & M_1 \end{array}$$

und damit  $\ker(j) \subseteq \text{im}(i)$ . Es gilt also  $\text{im}(i) = \ker(j)$ , d.h., Exaktheit von (3.A.5) auch bei  $M_2$ .

Wir zeigen nun, dass Lokalisierung ein exakter Funktor ist.

Sei  $A$  ein Ring (kommutativ, mit Eins), und sei  $S \subseteq A$  eine multiplikative Teilmenge.

**Vorbemerkung 3.A.9** Für jeden  $A$ -Modul-Homomorphismus  $f : M \rightarrow N$  haben wir einen Homomorphismus von  $A_S$ -Moduln

$$f' = f_S \quad : \quad \begin{array}{ccc} M_S & \rightarrow & N_S \\ \frac{m}{s} & \mapsto & \frac{f(m)}{s} \end{array}$$

Dies liefert einen kovarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} (A\text{-Moduln}) & \rightarrow & (A_S\text{-Moduln}) \\ M & \mapsto & M_S \\ f & \mapsto & f_S \end{array}$$

Es gibt nämlich  $(g \circ f)_S = g_S \circ f_S$  und  $(id_M)_S = id_{M_S}$ .

**Satz 3.A.10** (Exaktheit der Lokalisierung) Ist

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

eine exakte Sequenz von  $A$ -Moduln, so ist auch

$$(M_1)_S \xrightarrow{f'} (M_2)_S \xrightarrow{g'} (M_3)_S$$

exakt (Daher folgt dasselbe für beliebige exakte Sequenzen).

**Beweis:** Sei  $\frac{m_2}{s} \in (M_2)_S$  mit  $0 = g'(\frac{m_2}{s}) = \frac{g(m_2)}{s}$ . Dann existiert ein  $r \in S$  mit  $0 = rg(m_2) = g(rm_2)$ . Nach Voraussetzung existiert ein  $m_1 \in M_1$  mit  $rm_2 = f(m_1)$ . Es folgt  $\frac{m_2}{s} = \frac{f(m_1)}{rs} = f'(\frac{m_1}{rs})$ , d.h.,  $\ker(g') \subseteq \text{im}(f')$ . Die Inklusion  $\text{im}(f') \subseteq \ker(g')$  ist klar, denn es gilt  $g'f' = 0$ , wegen  $gf = 0$ .

## 4 Dimension und irreduzible Komponenten

**Definition 4.1** Die (kombinatorische) Dimension eines topologischen Raums  $X$  ist definiert als

$$\dim X = \sup \{r \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert eine Kette der Länge } r : Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r \text{ mit nicht-leeren irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen } Z_i \subseteq X\}$$

**Definition 4.2** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die Dimension einer  $k$ -Varietät  $V$  (Bez.  $\dim(V)$ ) ist die kombinatorische Dimension von  $V$ .

**Definition 4.3** Die (Krull-) Dimension eines Ringes  $R$  ist definiert als

$$\dim R = \sup \{r \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert eine Kette der Länge } r : \mathfrak{p}_r \subsetneq \mathfrak{p}_{r-1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_0 \text{ von Primidealen } \mathfrak{p}_i \subseteq R\}.$$

**Lemma 4.4** Sei  $Z$  eine affine  $k$ -Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Sei  $\mathcal{O}(Z)$  der Koordinatenring. Dann ist

$$\dim Z = \dim \mathcal{O}(Z).$$

**Beweis** Nach Hilberts Nullstellensatz und Lemma 3.6 entsprechen die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen  $Y \subseteq Z$  den Primidealen  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ , vermöge  $Y = Z(\mathfrak{p})$ . Dabei gilt

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \iff Z(\mathfrak{p}_2) \subseteq Z(\mathfrak{p}_1)$$

(da  $\sqrt{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i$ ). Also entsprechen die Ketten wie in 4.1 für  $Z$  den Ketten wie in 4.3 für  $\mathcal{O}(Z)$ .

**Beispiele 4.5** (a) Für einen Körper  $K$  ist  $\dim K = 0$ , da  $K$  nur das Primideal  $\{0\}$  hat.

(b) Sei  $k$  ein Körper. Es ist  $\dim k[x] = 1$ , denn die Primideale in  $k[x]$  sind  $\langle 0 \rangle$  und die Ideale  $\langle f \rangle$  für  $f \in k[x]$  irreduzibel. Die maximalen Ketten sind also von der Form  $\{0\} \subseteq \langle f \rangle$ , denn für ein irreduzibles  $g$  mit  $\langle f \rangle \neq \langle g \rangle$  sind  $f$  und  $g$  nicht assoziiert, also teilerfremd; also kann es keine Inklusion zwischen  $\langle f \rangle$  und  $\langle g \rangle$  geben. Entsprechend ist  $\dim R = 1$  für jeden (integren) Hauptidealring, z.B. ist  $\dim \mathbb{Z} = 1$ .

(c) Insbesondere ist nach (b) und Lemma 4.4  $\dim \mathbb{A}^1(k) = 1$ , falls  $k$  algebraisch abgeschlossen ist.

(d) Sei weiter  $k$  algebraisch abgeschlossen. Nach Übungsblatt 5, Aufgabe 3 sind die Primideale in  $k[X, Y]$  das Nullideal, ein Ideal  $\langle f \rangle$  mit irreduziblem  $f \in k[X, Y]$  oder ein maximales Ideal  $\langle X - a, Y - b \rangle$  mit  $a, b \in k$ . Die maximalen Primidealketten sind also von der Form

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle f \rangle \subsetneq \langle X - a, Y - b \rangle$$

für ein irreduzibles  $f$ , denn wie in (c) folgt, dass es keine Inklusion  $\langle f \rangle \subsetneq \langle g \rangle$  für irreduzible  $f, g$  geben kann. Weiter gibt es keine Inklusion zwischen zwei verschiedenen maximalen Idealen. Es ist also  $\dim \mathbb{A}^2(k) = 2$ .

- (e)  $\dim k[x_n \mid n \in \mathbb{N}] = \infty$ .  
 (f) Es gibt noethersche Ringe unendlicher Dimension.

**Definition 4.6** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine maximale irreduzible Teilmenge von  $X$  heißt irreduzible Komponente von  $X$ .

**Lemma 4.7** Für  $M \subseteq X$  ist  $M$  genau dann irreduzibel, wenn  $\overline{M}$  irreduzibel ist.

**Beweis** Für  $U \subseteq X$  offen ist  $U \cap M \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $U \cap \overline{M} \neq \emptyset$ . Weiter ist  $M$  irreduzibel, wenn gilt: für  $U_1, U_2 \subseteq X$  offen mit  $U_1 \cap M, U_2 \cap M \neq \emptyset$  ist auch  $U_1 \cap U_2 \cap M \neq \emptyset$ . Durch Anwendung auf  $M$  und  $\overline{M}$  folgt die Behauptung.

**Proposition 4.8** (a) Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen.

- (b) Jede irreduzible Teilmenge  $M \subseteq X$  ist in einer irreduziblen Komponente von  $X$  enthalten.  
 (c)  $X$  ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.

**Beweis** (a): dies folgt aus dem obigen Lemma.

(b) Sei  $\mathcal{M} = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ irreduzibel und } M \subseteq Y\}$ . Nach Zorn's Lemma genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{M}$  induktiv geordnet ist (ein maximales Element von  $\mathcal{M}$  ist dann eine irreduzible Komponente, die  $M$  enthält). Ist aber  $(Y_i)_{i \in I}$  eine Kette in  $\mathcal{M}$ , so ist  $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$  irreduzibel, also in  $\mathcal{M}$ : Sind  $U, V$  offen in  $X$  mit  $U \cap Y, V \cap Y \neq \emptyset$ , so gibt es  $i, j \in I$  mit  $U \cap Y_i \neq \emptyset, V \cap Y_j \neq \emptyset$ . Da  $(Y_i)$  eine Kette ist, ist o.E.  $Y_i \subseteq Y_j$ . Dann ist auch  $U \cap Y_j \neq \emptyset$  und damit  $U \cap V \cap Y_j \neq \emptyset$ , d.h.,  $U \cap Y \neq \emptyset$ .

(c) folgt aus (b), da für jedes  $x \in X$  die Menge  $\{x\}$  irreduzibel ist.

**Corollar 4.9** Ist  $(X_i)_{i \in I}$  die Familie der irreduziblen Komponenten eines topologischen Raums  $X$ , so gilt

$$\dim X = \sup_{i \in I} \dim X_i.$$

**Beweis** Jede Kette  $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r$  von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen ist in einer irreduziblen Komponente enthalten.

**Corollar 4.10** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

- (a) Die irreduziblen Komponenten einer affinen  $k$ -Varietät  $Z$  sind die abgeschlossenen Teilmengen  $Z(\mathfrak{g})$  für *minimale* Primideale  $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{O}(Z)$ .  
 (b) Die irreduziblen Komponenten einer projektiven  $k$ -Varietät  $Z$  sind die abgeschlossenen Teilmengen  $Z_+(\mathfrak{g})$  für *minimale* homogene Primideale  $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{O}_*(Z)$ .

**Beweis** (a) folgt aus dem Nullstellensatz, denn für Primideale  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathcal{O}(Z)$  gilt  $Z(\mathfrak{p}_1) \subseteq Z(\mathfrak{p}_2)$  genau dann wenn  $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$ .

Entsprechend folgt (b) aus dem projektiven Nullstellensatz.

**Corollar 4.11** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ist

$$X = \bigcup_{i=1}^n X_i$$

mit irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen  $X_i$ , und gilt  $X_i \not\subseteq X_j$  für  $i \neq j$ , so sind  $X_1, \dots, X_n$  die irreduziblen Komponenten von  $X$ .

**Beweis** Sei  $Z$  eine irreduzible Komponente von  $X$ . Dann ist  $Z = \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap Z)$ . Da  $Z$  irreduzibel ist, muss  $Z = X_i \cap Z$  für ein  $i$  gelten, also  $Z \subseteq X_i$ , wegen der Maximalität von  $Z$  also  $Z = X_i$ . Umgekehrt gibt es zu jedem  $X_i$  eine irreduzible Komponente  $Z$  von  $X$  mit  $X_i \subseteq Z$ . Ist nun (nach dem ersten Schritt)  $Z = X_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so muss  $j = i$  gelten, also  $X_i = Z$ .

**Definition 4.12** Ein topologischer Raum  $X$  heißt noethersch, wenn jede *absteigende* Kette

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$$

von abgeschlossenen Teilmengen stationär wird (d.h., es existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $Y_n = Y_{n+1} = \dots$ ). Äquivalente Bedingung: jede nichtleere Menge von abgeschlossenen Teilmengen besitzt ein minimales Element.

**Bemerkung 4.13** Ist  $X$  noethersch, so auch jeder abgeschlossene Teilraum  $Y \subseteq X$  und auch jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$ .

**Erinnerung 4.14** Ein Ring  $R$  heißt noethersch, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

- (a) Jede **aufsteigende** Kette  $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$  von Idealen wird stationär.
- (b) Jede nichtleere Menge von Idealen besitzt ein maximales Element.
- (c) Alle Ideale sind endlich erzeugt.
- (d) Jeder Untermodul eines endlich-erzeugten  $R$ -Moduls ist endlich erzeugt.

**Satz 4.15** Eine  $k$ -Varietät ist ein noetherscher Raum.

**Beweis:** Sei  $Z$  affin und  $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$  eine absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen in  $Z$ , etwa  $Y_i = Z(\mathfrak{a}_i)$  für Ideale  $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathcal{O}(Z)$ , wobei o.E.  $\mathfrak{a}_i$  Radikalideal ist, d.h.,  $\mathfrak{a}_i = \sqrt{\mathfrak{a}_i}$ . Dann ist  $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$  eine Kette von Idealen, diese wird stationär, also auch die Folge der  $Y_i$ . Analog folgt der Fall von projektiven  $k$ -Varietäten, wobei man Ketten von homogenen Idealen betrachtet. Der Fall von quasi-affinen und quasi-projektiven Varietäten folgt mit Bemerkung 4.13.

**Proposition 4.16** Ein noetherscher topologischer Raum hat nur endlich viele irreduzible Komponenten.

**Beweis** nach dem *Prinzip der noetherschen Induktion* (“Prinzip des kleinsten Verbrechers”): Sei  $\mathcal{M}$  die Menge der abgeschlossenen Teilmengen  $Y \subseteq X$ , die *nicht* Vereinigung von endlich

vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen  $Y_1, \dots, Y_n$  sind. Sei  $\mathcal{M}$  nicht-leer. Da  $X$  noethersch ist, ist  $\mathcal{M}$  mit  $\supseteq$  induktiv geordnet, besitzt also ein minimales Element, etwa  $Y$  (Zorn's Lemma). Dann ist  $Y$  nicht irreduzibel, also

$$Y = Y' \cup Y''$$

wobei  $Y', Y'' \subsetneq Y$  echte abgeschlossene Teilmengen von  $Y$  sind. Wegen der Minimalität von  $Y$  sind  $Y'$  und  $Y''$  nicht in  $\mathcal{M}$ , also Vereinigung von endlich vielen irreduziblen algebraischen Teilmengen. Dann gilt dies auch für  $Y$  - Widerspruch!

**Corollar 4.17** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

- (a) Jede  $k$ -Varietät hat nur endlich viele irreduzible Komponenten.
- (b) Jede endlich erzeugte  $k$ -Algebra  $A$  hat nur endlich viele minimale Primideale.
- (c) Jede endlich erzeugte graduierte  $k$ -Algebra  $S$  hat nur endlich viele minimale homogene Primideale.

**Beweis** (a) folgt aus 4.15 und 4.16, und (b) und (c) folgen hieraus mit 4.10.

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Definition 4.18** Eine *Hyperfläche* in einer irreduziblen affinen (bzw. projektiven)  $k$ -Varietät  $Z$  ist eine abgeschlossene Untervarietät  $W \subseteq Z$  von der Form  $Z(f)$  für ein  $f \in \mathcal{O}(Z) \setminus \{0\}$  (bzw.  $Z_+(F)$  für ein homogenes  $F \in \mathcal{O}_*(Z) \setminus \{0\}$ ).

**Beispiele 4.19** (a) Sei  $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine Hyperfläche, mit  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ , und sei

$$f = \prod_{i=1}^r p_i^{n_i}$$

eine Primfaktorzerlegung von  $f$  in dem faktoriellen Ring  $k[X_0, \dots, X_n]$  (d.h., die  $p_i$  sind irreduzibel und paarweise teilerfremd und es ist  $n_i \geq 1$  für alle  $i$ ). Dann sind  $Z(p_1), \dots, Z(p_r)$  die irreduziblen Komponenten von  $Z(f)$ . Dies folgt aus Corollar 4.11, da die  $Z(p_i)$  irreduzibel sind ( $\langle p_i \rangle$  ist ein Primideal) und  $Z(f) = \bigcup_{i=1}^r Z(p_i)$ , sowie  $Z(p_i) \not\subseteq Z(p_j)$  für  $i \neq j$  (da sonst  $p_i \mid p_j$ ).

(b) Entsprechend sei  $F \in k[X_0, \dots, X_n] \setminus \{0\}$  homogen und

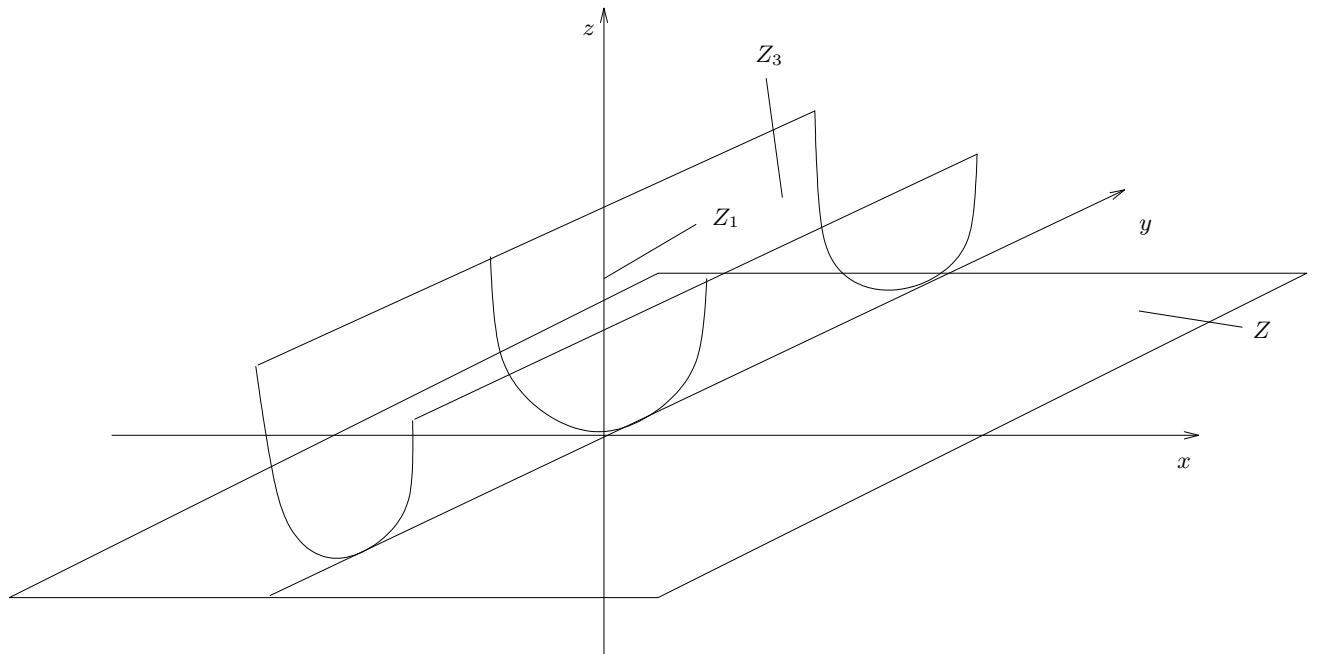
$$F = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$$

eine Primfaktorzerlegung von  $F$  mit (notwendigerweise) homogenen irreduziblen Polynomen  $P_i$ . Dann sind  $Z_+(P_1), \dots, Z_+(P_r)$  die irreduziblen Komponenten der Hyperfläche  $Z_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ .

(c) Sei  $Z = Z(xz^2 - x^3z, yz^2 - x^2yz) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ . Dann ist  $Z = Z(xz(z - x^2), yz(z - x^2))$  und daher

$$Z = Z(x, y) \cup Z(z) \cup Z(z - x^2)$$

die Zerlegung in die irreduzible Komponente  $Z_1 = Z(x, y)$  ( $z$ -Achse),  $Z_2 = Z(z)$  ( $x$ - $y$ -Ebene) und  $Z_3 = Z(z - x^2)$  (Parabelfläche):  $x^2 - z$  ist irreduzibel, und  $\langle x, y \rangle$  sowie  $\langle z \rangle$  sind Primideale in  $k[x, y, z]$ ; weiter gibt es keine Inklusionsbeziehungen zwischen den Idealen  $\langle x^2 - z \rangle$ ,  $\langle x, y \rangle$  und  $\langle z \rangle$ .



## 5 Das Spektrum eines Rings

Das letzte Kapitel hat gezeigt, dass es von Interesse ist, die Primideale eines Rings zu studieren. Sei  $R$  ein Ring.

**Definition 5.1** Die Menge  $\text{Spec}(R)$  aller Primideale von  $R$  heißt das Spektrum von  $R$ .

**Beispiele 5.2** (a) Ist  $k$  ein Körper, so besteht  $\text{Spec}(k)$  nur aus einem Punkt (dem Nullideal).

(b)  $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{ \langle 0 \rangle \} \cup \{ \langle p \rangle \mid p \text{ Primzahl} \}$ .

(c)  $\text{Spec}(k[x]) = \{ \langle 0 \rangle \} \cup \{ \langle f \rangle \mid f \in k[x] \text{ normiert und irreduzibel} \}$ .

(d)  $\text{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{ \langle 0 \rangle \} \cup \{ \langle x - a \rangle \mid a \in \mathbb{C} \}$ .

**Definition 5.3** Für  $f_1, \dots, f_m \in R$  setze

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid f_i \in \mathfrak{p} \quad \forall i = 1, \dots, m \} \subseteq \text{Spec}(R).$$

Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  setze

$$V(\mathfrak{a}) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \} \subseteq \text{Spec}(R).$$

Offenbar gilt  $V(f_1, \dots, f_m) = V(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$ .

**Bemerkung 5.4** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ , und sei  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Für das maximale Ideal  $\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  gilt dann

$$a \in Z(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle.$$

Allgemeiner gilt für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$

$$a \in Z(\mathfrak{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{a} \subseteq \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

Unter der Bijektion (Hilberts Nullstellensatz)

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(k) &\xrightarrow{\text{bji.}} \text{Max}(k[X_1, \dots, X_n]) \\ a &\longmapsto \mathfrak{m}_a := \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle \end{aligned}$$

entsprechen sich also  $Z(\mathfrak{a})$  und  $\text{Max}(k[X_1, \dots, X_n]) \cap V(\mathfrak{a})$ .

Allgemeiner  $Z$  eine affine  $k$ -Varietät. Für den Koordinatenring  $\mathcal{O}(Z)$  haben wir dann eine Bijektion

$$\begin{aligned} Z &\xrightarrow{\text{bji.}} \text{Max}(\mathcal{O}(Z)) \\ a &\longmapsto \mathfrak{m}_a = \{ f \in \mathcal{O}(Z) \mid f(a) = 0 \}. \end{aligned}$$

Für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(Z)$  entsprechen sich dann

$$Z(\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad V(\mathfrak{a}) \cap \text{Max}(\mathcal{O}(Z)) \subseteq \text{Spec}(\mathcal{O}(Z)),$$

denn es gilt

$$a \in Z(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow f(a) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_a.$$

Die Mengen  $V(\mathfrak{a})$  verallgemeinern also die Nullstellenmengen  $Z(\mathfrak{a})$  für (affine) Varietäten auf beliebige Ringe und deren gesamtes Spektrum.

**Lemma 5.5** (a)  $V\{0\} = \text{Spec}(R), V(R) = \emptyset$ .

(b) Für jede Familie  $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$  von Idealen in  $R$  gilt  $V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$

(c) Für Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  in  $R$  gilt  $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ .

**Beweis:** (a) und (b) sind offensichtlich.

(c): offenbar gilt

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}).$$

Wegen  $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  folgt daher

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Angenommen, die rechte Seite ist echt größer. Dann gibt es ein Primideal  $\mathfrak{p}$  welches  $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$  enthält, aber weder  $\mathfrak{a}$  noch  $\mathfrak{b}$ . Wähle  $s \in \mathfrak{a} - \mathfrak{p}$  und  $t \in \mathfrak{b} - \mathfrak{p}$ . Dann ist  $s \cdot t \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  im Widerspruch dazu, dass  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist.

Aus 5.5 folgt, dass die Mengen  $V(\mathfrak{a})$  ( $\mathfrak{a}$  Ideal in  $R$ ) die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\text{Spec}(R)$  bilden.

**Definition 5.6** Diese Topologie heißt die Zariski-Topologie von  $\text{Spec}(R)$ .

**Definition 5.7** Für  $f \in R$  setze  $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ .

**Lemma/Definition 5.8** Die Mengen  $D(f)$  sind offen und bilden eine Basis der Zariski-Topologie. Sie heißen Standard-offene (oder elementare offene) Mengen.

**Beweis:**  $D(f) = \text{Spec}(R) - V(f)$ , und für ein Ideal  $\mathfrak{a}$  ist nach 5.5 (b)

$$(21) \quad \text{Spec}(R) - V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$$

**Bemerkung 5.9** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $Z$  eine affine  $k$ -Varietät.

(a) Aus 5.4 folgt, dass die Bijektion

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\text{bji.}} & \text{Max}(\mathcal{O}(Z)) \subseteq \text{Spec}(\mathcal{O}(Z)) \\ a & \longmapsto & \mathfrak{m}_a \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist, wenn man beide Seiten mit der Zariski-Topologie versieht. (also  $\text{Max}(\mathcal{O}(Z))$  mit der Einschränkung der Zariski-Topologie auf  $\text{Spec}(\mathcal{O}(Z))$ ). Denn nach 5.4 induziert die Bijektion für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(Z)$  eine Bijektion

$$Z(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\text{bij.}} V(\mathfrak{a}) \cap \text{Max}(\mathcal{O}(Z)).$$

(b) Es gibt nach Hilberts Nullstellensatz und Lemma 3.6 zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{aligned} Irr(Z) := \left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible abgeschlossene} \\ \text{Teilmengen } Y \subseteq Z \end{array} \right\} &\rightleftharpoons \text{Spec}(\mathcal{O}(Z)) \\ Y &\mapsto I(Y) \\ Z(\mathfrak{p}) &\leftarrow \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

(c) Man kann  $Z$  in  $Irr(Z)$  einbetten, indem man  $x \in Z$  auf  $\{x\}$  abbildet. Dies liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\text{bij.}} & \text{Max}(\mathcal{O}(Z)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Irr(Z) & \xrightarrow{\text{bij.}} & \text{Spec}(\mathcal{O}(Z)) \end{array}$$

Wir betrachten nun wieder beliebige Ringe (kommutativ, mit Eins).

**Lemma/Definition 5.10** Ein Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$  induziert eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^* = \text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) &\rightarrow \text{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} &\mapsto \mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

(Sprechweise: gilt  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ , so sagen wir:  $\mathfrak{q}$  liegt über  $\mathfrak{p}$ ).

**Beweis** der Behauptungen: Die von  $\varphi$  induzierte Abbildung  $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$  ist injektiv. Mit  $B/\mathfrak{p}$  ist also auch  $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$  ein Integritätsbereich, d.h.,  $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$  wieder ein Primideal. Weiter gilt für  $f \in A$  und  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$

$$\mathfrak{q} \in D(\varphi(f)) \Leftrightarrow \varphi(f) \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in D(f).$$

Hieraus folgt

$$(22) \quad (\varphi^*)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

Insbesondere ist  $(\varphi^*)^{-1}(D(f))$  offen. Da die  $D(f)$  eine Basis der Topologie von  $\text{Spec}(A)$  bilden, folgt hieraus die Stetigkeit von  $\varphi^*$ .

**Bemerkungen 5.11** (a) Genauer gesagt, erhalten wir einen kontravarianten Funktor

$$\text{Spec} : \text{Ringe} \rightarrow \text{Topologische Räume}, \quad A \mapsto \text{Spec}(A), \varphi \mapsto \text{Spec}(\varphi)$$

Für einen Ringhomomorphismus  $\psi : B \rightarrow C$  ist nämlich  $\text{Spec}(\psi \circ \varphi) = \text{Spec}(\varphi) \circ \text{Spec}(\psi)$ , und es ist  $\text{Spec}(id_A) = id_{\text{Spec}(A)}$ .

(b) Die Abbildung  $\text{Spec}(\varphi)$  bildet im Allgemeinen  $\text{Max}(B)$  nicht in  $\text{Max}(A)$  ab, wie man am Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  (oder  $k[X] \subseteq k(X)$ ) sieht.

Wir studieren nun  $\varphi^* = \text{Spec}(\varphi)$  in verschiedenen Situationen.

**Satz 5.12** Sei  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal. Die kanonische Surjektion  $\varphi : R \rightarrow R/\mathfrak{a}$  induziert eine injektive Abbildung

$$\varphi^* : \text{Spec}(R/\mathfrak{a}) \hookrightarrow \text{Spec}(R)$$

mit Bild  $V(\mathfrak{a})$ . Die induzierte Bijektion

$$\varphi^* : \text{Spec}(R/\mathfrak{a}) \rightarrow V(\mathfrak{a}), \quad \bar{\mathfrak{p}} \mapsto \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})$$

ist ein Homöomorphismus, wenn  $V(\mathfrak{a})$  die Teilraum-Topologie trägt.

**Beweis:** Nach Lemma 1.10 haben wir zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(R/\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\varphi^*} & V(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{p}' & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{p}') = \varphi^*(\mathfrak{p}') \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{a} & \longleftarrow & \mathfrak{p} \end{array}$$

Für ein Ideal  $\mathfrak{b}' \subseteq R/\mathfrak{a}$  und ein Primideal  $\mathfrak{p}' \subseteq R/\mathfrak{a}$  gilt dabei offenbar  $\mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{p}'$  genau dann wenn  $\varphi^{-1}(\mathfrak{b}') \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ , also

$$(23) \quad \varphi^*(V(\mathfrak{b}')) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}')).$$

Also ist  $\varphi^*$  eine abgeschlossene Abbildung (die Bilder von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen).

Eine bijektive stetige abgeschlossene Abbildung ist aber ein Homöomorphismus.

**Satz 5.13** Sei  $S \subseteq A$  eine multiplikative Teilmenge. Dann induziert der universelle Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow A_S$  einen Homöomorphismus

$$(24) \quad \varphi^* : \text{Spec}(A_S) \rightarrow \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\},$$

wobei  $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \subseteq \text{Spec}(A)$  mit der Relativtopologie versehen ist. Die Umkehrabbildung ist

$$\psi : \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_S := \left\{ \frac{p}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S \right\}.$$

**Beweis:** Wohldefiniertheit: für  $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(A_S)$  gilt  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \cap S = \emptyset$ . Denn wäre  $s \in S$  mit  $\varphi(s) = \frac{s}{1} \in \mathfrak{p}'$ , so folgte  $\mathfrak{p}' = A_S$ , da  $\frac{s}{1}$  eine Einheit ist; Widerspruch!

Bijektivität: Für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$  mit  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  ist  $\mathfrak{p}_S$  offenbar ein Ideal. Weiter ist  $\mathfrak{p}_S$  auch ein Primideal, denn für  $a, b \in A$ ,  $p \in \mathfrak{p}$  und  $r, s, t \in S$  gilt:

$$\frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{p}{r} \Rightarrow r'rab = r'stp \in \mathfrak{p} \text{ für ein } r' \in S \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \text{ oder } b \in \mathfrak{p}, \text{ da } r, r' \notin \mathfrak{p}.$$

Damit erhalten wir die Wohldefiniertheit von  $\psi$ .

$\varphi^*\psi = id$ : Für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  mit  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  ist  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_S) = \mathfrak{p}$ : Ist  $a \in A$  mit  $\varphi(a) = \frac{a}{1} \in \mathfrak{p}_S$ , so gibt es  $p \in \mathfrak{p}$ ,  $s \in S$  mit  $\frac{a}{1} = \frac{p}{s}$ , also ein  $r \in S$  mit  $rsa = rp$ ; wegen  $rs \notin \mathfrak{p}$  folgt also  $a \in \mathfrak{p}$ . Die umgekehrte Inklusion  $\mathfrak{p} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_S)$  ist klar.

$\psi\varphi^* = id$ : Ist  $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(A_S)$  und  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$ , so ist  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_S$ : Ist nämlich  $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}'$  ( $a \in A, s \in S$ ), so folgt  $\varphi(a) = \frac{a}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in \mathfrak{p}'$ , also  $a \in \mathfrak{p}$  und damit  $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}_S$ . Umgekehrt ist mit  $\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}'$  auch  $\mathfrak{p}_S \subseteq \mathfrak{p}'$ .

Die Abbildung (24) ist ein Homöomorphismus: Da  $\varphi^* : \text{Spec}(A_S) \rightarrow \text{Spec}(A)$  stetig ist, genügt es zu zeigen, dass diese Abbildung nach Einschränkung auf das Bild

$$Y = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

offen ist. Die Mengen  $D(\frac{f}{s})$ , für  $f \in A$  und  $s \in S$ , bilden aber eine Basis der Topologie von  $\text{Spec}(A_S)$ , und es gilt

$$\varphi^*(D(\frac{f}{s})) = D(f) \cap Y$$

(was nach Definition der Relativtopologie offen in  $Y$  ist). Denn für ein Primideal  $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(A_S)$  gilt, da  $\frac{1}{s}$  eine Einheit in  $A_S$  ist:

$$\frac{f}{s} = \frac{1}{s} \cdot \varphi(f) \in \mathfrak{p}' \Leftrightarrow \varphi(f) \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}'),$$

also

$$\mathfrak{p}' \in D(\frac{f}{s}) \Leftrightarrow \varphi^*(\mathfrak{p}') \in D(f).$$

**Corollar 5.14** Für  $f \in A$  und die kanonische Abbildung  $\varphi_f : A \rightarrow A_f$  ist die Abbildung

$$\varphi_f^* : \text{Spec}(A_f) \xrightarrow{\sim} D(f)$$

ein Homöomorphismus auf die offene Menge  $D(f) \subseteq \text{Spec}(A)$ , mit Umkehrabbildung  $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_f = \mathfrak{p} \cdot A_f$ .

**Beweis:** Für  $S_f = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  und  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  gilt  $\mathfrak{p} \cap S_f = \emptyset$  genau dann, wenn  $f \notin \mathfrak{p}$  (d.h., wenn  $\mathfrak{p} \in D(f)$ ). Denn für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $f^n \in \mathfrak{p}$  genau dann wenn  $f \in \mathfrak{p}$ , da  $\mathfrak{p}$  Primideal ist.

**Corollar 5.15** Für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  und die kanonische Abbildung  $\varphi : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$  ist

$$\varphi^* : \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q} \in \text{Spec} A \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

ein Homöomorphismus, mit Umkehrabbildung  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ .

**Beweis:** Es gilt  $\mathfrak{q} \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$  genau dann wenn  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ .

**Definition/Lemma 5.16** (a) Ein Ring  $A$  heißt lokal, wenn die folgenden äquivalenten Eigenschaften gelten:

- (i)  $A$  hat genau ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$ .
- (ii) Die Menge  $A \setminus A^\times$  der Nichteinheiten ist ein Ideal.

(b) Es ist in diesem Fall  $\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$ , und der Körper  $A/\mathfrak{m}$  heißt der Restklassenkörper von  $A$ .

**Beweis** der Behauptungen: Für jeden Ring  $A$  ist

$$(25) \quad A \setminus A^\times = \bigcup_{\mathfrak{a} \subsetneq A \text{ Ideal}} \mathfrak{a},$$

denn es gilt für  $f \in A$ :  $f \in A \setminus A^\times \Leftrightarrow 1 \notin (f) \Leftrightarrow (f) \neq A$ .

Gilt nun (i), so ist  $A \setminus A^\times = \mathfrak{m}$  ein Ideal, da alle echten Ideale  $\mathfrak{a} \subsetneq A$  in  $\mathfrak{m}$  enthalten sind. Es ist nämlich jedes solche  $\mathfrak{a}$  in einem maximalen Ideal enthalten; siehe Algebra I Satz 16.8, oder Satz 5.20 (a) weiter unten. Gilt umgekehrt (ii), ist also  $A \setminus A^\times$  ein Ideal, so enthält es alle Ideale  $\mathfrak{a} \subsetneq A$ , ist also maximal und das einzige maximale Ideal.

**Beispiele 5.17:** (a) Ein Körper ist ein lokaler Ring.

(b) Der Nullring ist kein lokaler Ring.

(c) Ist  $A$  ein lokaler Ring, so ist der Ring  $R = A[[x_1, \dots, x_n]]$  der formalen Potenzreihen in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ein lokaler Ring und der Ringhomomorphismus  $A \rightarrow A[[x_1, \dots, x_n]]$  induziert einen Isomorphismus der Restklassenkörper: Wegen

$$A[[x_1, \dots, x_n]] = A[[x_1, \dots, x_{n-1}]][[x_n]]$$

können wir dies durch Induktion über  $n$  beweisen; es ist also ohne Einschränkung  $n = 1$ . Ein Element  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$  ist aber genau dann eine Einheit, wenn der konstante Term  $a_0$  eine Einheit ist (Beweis selbst: löse  $f \cdot g = 1$ ). Es folgt  $A[[x]] \setminus A[[x]]^\times = \langle x \rangle + \mathfrak{m} A[[x]]$  ( $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $A$ ); dies ist aber ein Ideal.

**Satz 5.18** Sei  $A$  ein Ring und  $\mathfrak{p} \subseteq A$  ein Primideal. Dann ist die Lokalisierung  $A_{\mathfrak{p}}$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{p} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathfrak{p}, b \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Der Restklassenkörper  $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  ist isomorph zu  $Quot(A/\mathfrak{p})$ .

**Beweis:** 1) Mit dem kanonischen Homomorphismus  $\varphi : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$  hatten wir zueinander inverse Homomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) &\xrightarrow{\cong} \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \\ \mathfrak{q}' &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}') \\ \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} &\leftarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Daher ist  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  das einzige maximale Ideal (es enthält alle Primideale).

2) Nach 1) ist  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$ ; der Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$  induziert daher eine Einbettung  $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ , und die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers induziert eine Einbettung von Körpern

$$Quot(A/\mathfrak{p}) \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}.$$

Diese ist auch surjektiv: Ist  $\frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{p}}$ , mit  $a \in A$  und  $b \in A \setminus \mathfrak{p}$ , so ist für die Restklassen  $\bar{a}, \bar{b}$  in  $A/\mathfrak{p}$  offenbar  $\bar{b} \neq 0$ , und das Element  $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \in \text{Quot}(A \setminus \mathfrak{p})$  wird auf die Restklasse von  $\frac{a}{b}$  abgebildet.

**Corollar 5.19** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Die Faser von

$$\varphi^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A), \quad \varphi^*(\mathfrak{P}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$$

über  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  (also das Urbild  $(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{P} \in \text{Spec}(B) \mid \varphi^*(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}\}$ ) ist (versehen mit der Unterraumtopologie) homöomorph zu

$$\text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p})),$$

wobei  $k(\mathfrak{p}) = \text{Quot}(A/\mathfrak{p})$  der Restklassenkörper von  $A$  bei  $\mathfrak{p}$  ist.

**Beweis** Wir zeigen dies durch Kombination von Satz 5.12 (der die Primideale  $\mathfrak{P}$  mit  $\varphi^*(\mathfrak{P}) \supseteq \mathfrak{p}$  behandelt) und Corollar 5.15 (das die  $\mathfrak{P}$  mit  $\varphi^*(\mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{p}$  behandelt). Sei  $B_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$  die Lokalisierung des  $A$ -Moduls bezüglich  $\mathfrak{p}$ . Dies ist ein Ring und isomorph zu  $B_{\varphi(A \setminus \mathfrak{p})}$  für die multiplikative Teilmenge  $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ . Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \\ \uparrow \varphi & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = k(\mathfrak{p}), \end{array}$$

und das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

identifiziert  $\text{Spec}(B_{\mathfrak{p}})$  nach Corollar 5.15 homöomorph mit der Menge der Ideale  $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(B)$  mit  $\mathfrak{P} \cap \varphi(A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$ , also  $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}) \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$ , also  $\varphi^*(\mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{p}$ . Weiter identifiziert es  $\text{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$  nach Satz 5.12 homöomorph mit der Menge aller  $\mathfrak{P}' \in \text{Spec}(B_{\mathfrak{p}})$  mit  $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{P}'$ , also  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subseteq \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{P}')$ . Über das rechte Quadrat entspricht dies also homöomorph der Menge aller  $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(B)$  mit  $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p} = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ , d.h., mit  $\varphi^*(\mathfrak{P}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$ .

Wir bemerken schließlich, dass

$$B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong B \otimes_A k(\mathfrak{p}),$$

mittels der Isomorphismen  $B_{\mathfrak{p}} \cong B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$  und dem Morphismus  $A \rightarrow \text{Quot}(A/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ .

Wir diskutieren nun ein Analogon von Hilberts Nullstellensatz für beliebige Ringe  $R$ . Dafür erinnern wir uns daran, dass wir für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  sein Radikal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in R \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

definiert und seine Eigenschaften diskutiert hatten (1.17 und 1.18).

Aus dem Zornschen Lemma folgern wir:

**Satz 5.20** (a) Jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subsetneq R$  ist in einem maximalen Ideal enthalten.

(b) Jedes Primideal enthält ein minimales Primideal.

(c) (abstrakter Nullstellensatz) Für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}.$$

Insbesondere gilt für das Nilradikal

$$\text{nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \\ \mathfrak{p} \text{ minimal}}} \mathfrak{p}.$$

**Beweis:** (a) Die Menge  $M = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \subsetneq R \text{ Ideal und } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\}$  ist nichtleer und (bezüglich der Inklusionen) induktiv geordnet - d.h., man hat eine Ordnung, und jede Kette, d.h., total geordnete Teilmenge, besitzt eine obere Schranke in  $M$ . Ist nämlich  $N$  eine solche Kette, so ist

$$\mathfrak{c} := \bigcup_{\mathfrak{b} \in N} \mathfrak{b}$$

wieder ein Ideal: Seien  $a, b \in \mathfrak{c}$  und  $r \in R$ . Dann gibt es  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in N$  mit  $a \in \mathfrak{b}_1$  und  $b \in \mathfrak{b}_2$ . Ohne Einschränkung sei  $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2$  ( $N$  ist total geordnet!). Es folgt  $ra, a + b \in \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{c}$ . Weiter ist  $1 \notin \mathfrak{c}$  (da  $1 \notin \mathfrak{b}$  für alle  $\mathfrak{b} \in M$ ) also  $\mathfrak{c} \in M$ .

Nach dem Zornschen Lemma besitzt  $M$  also ein maximales Element  $\mathfrak{m}$ . Es ist dann  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{m}$  notwendigerweise ein maximales Ideal.

(b)  $\text{Spec}(R)$  ist nach der Umkehrung der Inklusionsordnung induktiv geordnet: ist  $N$  eine totalgeordnete Menge von Primidealen so ist

$$\mathfrak{c} := \bigcap_{\mathfrak{p} \in N} \mathfrak{p}$$

ein Primideal:

$$a \cdot b \in \mathfrak{c} \Rightarrow a \in \mathfrak{c} \text{ oder } b \in \mathfrak{c}.$$

Denn wäre  $a \notin \mathfrak{c}$  und  $b \notin \mathfrak{c}$ , so gäbe es  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in N$  mit  $a \notin \mathfrak{p}$  und  $b \notin \mathfrak{q}$ . Ist etwa  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ , so folgt auch  $b \notin \mathfrak{p}$ , also  $a \cdot b \notin \mathfrak{p}$ , ein Widerspruch!

Entsprechend ist für ein Primideal  $\mathfrak{p}_0$  von  $R$  die Menge  $M := \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_0\}$  bezüglich " $\supseteq$ " induktiv geordnet, und (b) folgt aus dem Zornschen Lemma.

(c) Es ist nur die zweite Aussage zu zeigen; die erste folgt dann durch Anwendung auf  $R/\mathfrak{a}$ . Ist  $f \in R$  nilpotent, so ist offenbar  $f$  in jedem Primideal  $\mathfrak{p}$  enthalten ( $R/\mathfrak{p}$  integer!). Sei umgekehrt  $f$  nicht nilpotent. Dann enthält  $S_f = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  nicht die Null und  $A_f$  ist nach dem folgenden Lemma nicht der Nullring. Daher gibt es ein Primideal von  $A_f$  (z.B. ein maximales Ideal nach (a)), also ein Primideal  $\mathfrak{p} \in D(f)$  (nach 5,14!), d.h., mit  $f \notin \mathfrak{p}$ . Die zweite Gleichheit folgt mit (b).

**Lemma 5.21** Sei  $A$  ein Ring und  $S \subseteq A$  eine multiplikative Teilmenge. Dann gilt

$$A_S = 0 \Leftrightarrow 0 \in S.$$

**Beweis** Es gilt

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ mit } s \cdot 1 \cdot 1 = s \cdot 1 \cdot 0, \text{ also } s = 0.$$

**Corollar 5.22** (a) Für Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt:  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$  und  $V(\mathfrak{a}) = \text{Spec}(R) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \text{nil}(R)$ .

(b) Es gibt eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{abgeschlossene Mengen von } \text{Spec}(R)\} &\leftrightarrow \{\text{Radikalideale von } R\} \\ V(\mathfrak{a}) &\leftarrow \mathfrak{a} \\ V(\mathfrak{a}) &\mapsto \sqrt{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

**Corollar 5.23** Sei  $R$  ein Ring. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\text{Spec}(R)$  ist irreduzibel.
- (b)  $\text{nil}(R)$  ist ein Primideal.

**Beweis** Es sind äquivalent:

- (i)  $\text{Spec}(R)$  ist reduzibel (= nicht irreduzibel).
- (ii) Es existieren zwei nicht-leere offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \text{Spec}(R)$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .
- (iii) Es existieren zwei nicht leere offene Standardmengen  $D(f_1), D(f_2) \subseteq \text{Spec}(R)$  mit  $D(f_1) \cap D(f_2) = \emptyset$ .
- (iv) Es existieren  $f_1, f_2 \in R$  mit  $f_1, f_2 \notin \text{nil}(R)$  aber  $f_1 \cdot f_2 \in \text{nil}(R)$ .
- (v)  $\text{nil}(R)$  ist kein Prinideal.

Hier sind (ii) und (iii) äquivalent, da die  $D(f)$  eine Basis der Topologie bilden. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Beziehung

$$(26) \quad D(f_1) \cap D(f_2) = D(f_1 \cdot f_2)$$

(die direkt oder aus 5.5 (c) folgt) sowie der Tatsache

$$(27) \quad D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \in \text{nil}(R),$$

die aus 5.21 (a) folgt.

**Corollar 5.24** Äquivalent sind: (a)  $R$  integer.

(b)  $R$  reduziert und  $\text{Spec}(R)$  irreduzibel.

**Beweis:** (a)  $\Leftrightarrow \langle 0 \rangle$  Primideal  $\Leftrightarrow \text{nil}(R) = \langle 0 \rangle$  und  $\text{nil}(R)$  ist Primideal  $\Leftrightarrow$  (b).

**Corollar 5.25** Für eine abgeschlossene Teilmenge  $Y \subseteq \text{Spec}(R)$  sind äquivalent:

(a)  $Y$  ist irreduzibel.

(b)  $Y = V(\mathfrak{p})$  für ein Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$ .

(c)  $Y = \overline{\{x\}}$  für einen Punkt  $x \in \text{Spec}(R)$ .

(Hier bezeichnet  $\overline{M}$  den (topologischen) Abschluss einer Menge  $M$ ).

**Beweis** (a)  $\Rightarrow$  (b): Sei  $Y = V(\mathfrak{a})$  für das Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$ . Durch Anwendung von 5.23 auf  $R/\mathfrak{a}$  folgt: Ist  $Y = V(\mathfrak{a}) \cong \text{Spec}(R/\mathfrak{a})$  (Homöomorphie) irreduzibel, so ist  $\text{nil}(R/\mathfrak{a})$  ein Primideal. Es ist aber  $\text{nil}(R/\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}/\mathfrak{a}$ . Also ist  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  ein Primideal; aber es ist  $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c): Sei  $Y = V(\mathfrak{p})$  und  $x = \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ . Für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  gilt:  $x \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{a})$ . Damit ist

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}} V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p})$$

(c)  $\Rightarrow$  (a): Für jeden topologischen Raum  $X$  und jedes  $x \in X$  ist  $\{x\}$  irreduzibel, nach 4.7 also auch  $\overline{\{x\}}$ .

**Bemerkung 5.26** Wir haben gesehen: für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  ist  $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ .

**Corollar 5.27** Sei  $R$  ein Ring

(a) Für Primideale  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  in  $R$  gilt:  $V(\mathfrak{p}_1) \subseteq V(\mathfrak{p}_2) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$ .

(b)  $\dim(R) = \dim(\text{Spec}(R))$ .

(c) Die irreduziblen Komponenten von  $\text{Spec}(R)$  sind die abgeschlossenen Teilmengen  $V(\mathfrak{q})$  für *minimale* Primideale  $\mathfrak{q}$ .

**Beweis** (a) folgt aus 5.22 (a), da  $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$  für ein Primideal. (c) folgt aus (a) und 5.25.

(b): Nach (a) und 5.25 entsprechen die Ketten von Primidealen in  $R$  den Ketten von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von  $\text{Spec}(R)$  (vermöge  $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ , bei Umkehrung der Inklusion).

Mit denselben Argumenten wie in Satz 4.15 und Corollar 4.17 folgen aus 5.25 die nächsten beiden Resultate:

**Corollar 5.28** Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Dann ist  $\text{Spec}(R)$  ein noetherscher topologischer Raum.

**Corollar 5.29** Ein noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.

Weiter gilt:

**Lemma 5.30** Ein Punkt  $x = \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  ist genau dann abgeschlossen ( $\overline{\{x\}} = \{x\}$ ), wenn  $\mathfrak{p}$  ein maximales Ideal ist.

**Beweis** Nach 5.26 ist  $\mathfrak{p}$  genau dann abgeschlossen, wenn  $V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ .

**Definition 5.31** Ist in einem topologischen Raum  $X$  eine abgeschlossene Teilmenge  $Y$  irreduzibel und  $\eta \in Y$  mit  $\overline{\{\eta\}} = Y$ , so heißt  $\eta$  generischer Punkt von  $Y$ .

**Erinnerung:** Ein topologischer Raum  $X$  heißt ein Hausdorff-Raum (oder  $T_2$ -Raum), wenn es zu je zwei Punkten  $x_1 \neq x_2$  in  $X$  offene Umgebungen  $U_i$  von  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) gibt mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Weiter heißt  $X$  ein  $T_1$ -Raum, wenn es zu je zwei Punkten  $x_1 \neq x_2$  in  $X$  offene Umgebungen  $U_i$  von  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) gibt mit  $x_1 \in U_1, x_2 \notin U_1$  und  $x_2 \in U_2, x_1 \notin U_2$ . Schließlich heißt  $X$  ein  $T_0$ -Raum, wenn gilt: zu je zwei Punkten  $x_1 \neq x_2$  in  $X$  besitzt ein Punkt  $x_i$  eine Umgebung  $U_i$ , die den anderen Punkt  $x_j$  ( $j \neq i$ ) nicht enthält. Offenbar gilt:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

**Lemma 5.23** (a)  $X$  ist genau dann ein  $T_1$ -Raum, wenn jeder Punkt  $x \in X$  abgeschlossen ist.

(b) Ist  $X$  ein  $T_0$ -Raum, so sind generische Punkte eindeutig.

**Beweis** (a) ist klar.

(b): Sind  $\eta_1, \eta_2$  zwei generische Punkte von  $Y$ , so ist  $\eta_2 \in \overline{\{\eta_1\}}$ .

**Lemma 5.33** (a) Für jeden Ring  $R$  ist  $\text{Spec}(R)$  ein  $T_0$ -Raum.

(b) Jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge  $Y \subseteq X$  hat also einen eindeutig bestimmten generischen Punkt  $\eta$ .

**Beweis** (a): Seien  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(R)$  mit  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ , also etwa  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ . Dann gibt es ein  $f \in \mathfrak{p}$  mit  $f \notin \mathfrak{q}$ . Also ist  $D(f)$  eine offene Menge mit  $\mathfrak{q} \in D(f)$  und  $\mathfrak{p} \notin D(f)$ .

(b) folgt aus 5.25 und 5.32 (b).

## 6 Endliche und ganze Ringerweiterungen

Die Begriffe und Ergebnisse in diesem Paragraphen sind nützlich für Dimensionsberechnungen.

**Definition 6.1** Sei  $A$  ein Ring und  $B$  eine  $A$ -Algebra.  $B$  heißt endliche  $A$ -Algebra, wenn  $B$  als  $A$ -Modul endlich erzeugt ist.

Die folgende Definition wird meistens für  $\mathfrak{a} = A$  benutzt.

**Lemma/Definition 6.2** Sei  $A$  ein Ring,  $B$  eine  $A$ -Algebra und  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ein Ideal.

(a) Ein Element  $b \in B$  heißt ganz über  $\mathfrak{a}$ , wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gibt ein normiertes Polynom

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \quad \text{mit } a_i \in \mathfrak{a},$$

so dass  $f(b) = 0$  in  $B$ , d.h., eine *Ganzheitsgleichung*

$$(28) \quad b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 \quad \text{mit } a_i \in \mathfrak{a}.$$

(ii)  $A[b] \subseteq B$  ist eine endliche  $A$ -Algebra, und  $b \in \sqrt{\mathfrak{a}A[b]}$ .

(iii) Es gibt einen Unterring  $B' \subseteq B$  mit  $A[b] \subseteq B'$ , der eine endliche  $A$ -Algebra ist, und  $b \in \sqrt{\mathfrak{a}B'}$ .

(iv) Es gibt einen treuen  $A[b]$ -Modul  $M$ , der als  $A$ -Modul endlich erzeugt ist, und es gilt  $b^m M \subseteq \mathfrak{a}M$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . (Ein Modul  $M$  über einem Ring  $R$  heißt *treu*, wenn für jedes  $r \in R$  gilt: aus  $rm = 0$  für alle  $m \in M$  folgt  $r = 0$ ).

(b)  $B$  heißt ganz über  $\mathfrak{a}$ , wenn jedes  $b \in B$  ganz über  $\mathfrak{a}$  ist.

**Beweis** der Äquivalenzen in (a):

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Nach Definition wird  $A[b]$  als  $A$ -Modul von allen  $b^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) erzeugt. Aus (28) folgt aber per Induktion, dass  $A[b]$  von  $1, b, \dots, b^{n-1}$  erzeugt wird; weiter ist  $b^n \in \mathfrak{a}A[b]$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Setze  $B = A[b]$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Setze  $M = B'$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Seien  $m_1, \dots, m_\ell$  Erzeugende von  $M$  als  $A$ -Modul. Dann gibt es  $a_{ik} \in \mathfrak{a}$  ( $i, k \in \{1, \dots, \ell\}$ ) mit

$$b^m m_i = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} m_k \quad (i = 1, \dots, \ell).$$

Hieraus folgt die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} b^m \delta_{ik} - a_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\ell \end{pmatrix} = 0.$$

Aus der Cramerschen Regel (die auch über Ringen gilt) folgt  $dm_i = 0$  für  $i = 1, \dots, m_\ell$ , wobei  $d = \det(b^m \delta_{ik} - a_{ik})$ . Da die  $m_i$  den Modul  $M$  erzeugen, gilt  $d \cdot M = 0$ , also  $d = 0$ , da  $M$

ein treuer  $A[b]$ -Modul war. Für das normierte Polynom  $f(X) = \det(X^m \cdot E - (a_{ik})) \in A[X]$ , dessen Koeffizienten außer dem Leitkoeffizienten alle in  $\mathfrak{a}$  liegen, gilt also  $f(b) = 0$ , und es folgt (i), mit  $n = m \cdot \ell$ .

**Corollar 6.3** (a) Eine endliche  $A$ -Algebra  $B$  ist ganz über  $A$ .

(b)  $b_1, \dots, b_n \in B$  sind genau dann ganz über  $A$ , wenn  $A[b_1, \dots, b_n]$  eine endliche  $A$ -Algebra ist.

(c) Die Menge  $\overline{A}$  aller Elemente  $b \in B$ , die ganz über  $A$  sind, bildet eine  $A$ -Unteralgebra von  $B$  und heißt der ganze Abschluss von  $A$  in  $B$ .

(d) Die Menge aller über  $\mathfrak{a}$  ganzen Elemente in  $B$  ist  $\sqrt{\mathfrak{a}\overline{A}}$ .

**Beweis** (a) folgt mit Kriterium (iii), (b) folgt durch Induktion über  $n$  mit Kriterium (ii) und (c) folgt aus (b). Schließlich folgt (d) mit Kriterium (iii).

**Satz 6.4** (going-up-Theorem von Krull-Cohen-Seidenberg) Sei  $B/A$  eine ganze Ring-Erweiterung, d.h.,  $A \subseteq B$  ist ein Unterring, und  $B$  ist ganz über  $A$ . Dann gilt:

(a) Ist  $\mathfrak{P} \subseteq B$  ein Primideal über  $\mathfrak{p} \subseteq A$  (d.h.,  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ ), so ist  $\mathfrak{P}$  genau dann maximal, wenn  $\mathfrak{p}$  maximal ist.

(b) Sind  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}' \subseteq B$  Primideale über demselben Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$ , so ist  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ .

(c) Über jedem Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$  liegt ein Primideal  $\mathfrak{P} \subseteq B$ , d.h., die Abbildung  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  ist surjektiv.

(d) (going-up) Sei  $\mathfrak{P} \subseteq B$  ein Primideal und  $\mathfrak{p} \subseteq A$  das darunterliegende Primideal. Ist  $\mathfrak{p}' \subseteq A$  ein weiteres Primideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ , so gibt es ein Primideal  $\mathfrak{P}' \subseteq B$  über  $\mathfrak{p}'$  mit  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$ .

**Beweis** (b): Angenommen  $\mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{P}'$ . Sei  $f \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{P}$ . Sei  $p(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$  normiert mit  $n \geq 1$  und

$$(29) \quad p(f) = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 \in \mathfrak{P}.$$

Ein solches  $p(X)$  gibt es immer, da  $f$  ganz über  $A$  ist (so dass wir sogar  $p(f) = 0$  erreichen). Sei  $p(x)$  mit minimalen Grad gewählt. Aus der Gleichung (29) folgt  $a_0 \in \mathfrak{P}' \cap A = \mathfrak{p}$ , also auch  $a_0 \in \mathfrak{P}$ .

Wegen  $f \notin \mathfrak{P}$  ist  $n > 1$ . Dann haben wir

$$f \cdot (f^{n-1} + a_{n-1}f^{n-2} + \dots + a_1) \in \mathfrak{P}.$$

Da  $\mathfrak{P}$  ein Primideal ist, und  $f \notin \mathfrak{P}$ , folgt

$$f^{n-1} + a_{n-1}f^{n-2} + \dots + a_2f + a_1 \in \mathfrak{P}$$

im Widerspruch dazu, dass der Grad von  $p(X)$  minimal war.

(a): Ist  $\mathfrak{p}$  maximal, so auch  $\mathfrak{P}$ . Wäre nämlich  $\mathfrak{P}' \supsetneq \mathfrak{P}$  ein echt größeres Primideal, so wäre nach (b)  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{P}' \cap A \supsetneq \mathfrak{p}$  – Widerspruch.

Sei umgekehrt  $\mathfrak{P}$  maximal. Dann ist  $B/\mathfrak{p}$  ein Körper und  $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{P}$  wieder eine ganze Ringerweiterung. Es genügt also zu zeigen: Ist  $B$  ein Körper, so auch  $A$ . Sei  $B$  ein Körper, und  $a \in A \setminus \{0\}$ . Für  $b = \frac{1}{a} \in B$  gibt es dann eine Gleichung

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n + a_{n+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{1}{a} + a_0 = 0$$

mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ . Durch Multiplikation mit  $a^{n-1}$  folgt

$$\frac{1}{a} = -(a_{n-1} + aa_{n-2} + \dots + a^{n-1}a_0) \in A.$$

Für (c) betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & B_{\mathfrak{p}} \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A_{\mathfrak{p}}, \end{array}$$

wobei  $B_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$  die Lokalisierung von  $B$  nach  $A \setminus \mathfrak{p}$  ist. Dann ist  $A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow B_{\mathfrak{p}}$  injektiv (wegen der Exaktheit der Lokalisierung, siehe 3.A.10) und eine ganze Ringerweiterung: Sei  $\frac{b}{f} \in B_{\mathfrak{p}}$ , mit  $b \in B$  und  $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ , und sei

$$b^n + a_{n+1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0$$

(mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ ) eine Ganzheitsgleichung für  $b$ . Teilt man diese Gleichung durch  $f^n$ , so erhält man eine Ganzheitsgleichung für  $\frac{b}{f}$  über  $A_{\mathfrak{p}}$ .

Da  $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$ , ist auch  $B_{\mathfrak{p}} \neq 0$ , besitzt also ein maximales Ideal  $\tilde{\mathfrak{P}}$ . Nach (a) ist  $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{P}} \cap A_{\mathfrak{p}}$  ein maximales Ideal von  $A_{\mathfrak{p}}$ , also gleich dem eindeutig bestimmten maximalen Ideal  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  des lokalen Rings  $A_{\mathfrak{p}}$ . Wegen  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$  gilt für  $\mathfrak{P} = \psi^{-1}(\tilde{\mathfrak{P}})$  die Gleichheit  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$  wie gewünscht.

(Geometrisch gesehen haben wir das Diagramm

$$(30) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

betrachtet und benutzt, dass  $\mathfrak{p}$  schon in (dem Bild von)  $\text{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$  liegt; dies ist die Methode der Lokalisierung).

Für (d) betrachten wir die Ringerweiterung  $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{P}$ , die wieder ganz ist. Dann ist  $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{p}$  ein Primideal, und nach (c) gibt es ein Primideal  $\tilde{\mathfrak{P}} \subseteq B/\mathfrak{P}$  über  $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$ . Nach Satz 5.12 ist  $\tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}'/\mathfrak{P}$  für ein Primideal  $\mathfrak{P}' \subseteq B$  mit  $\mathfrak{P}' \supseteq \mathfrak{P}$ , und für dieses gilt  $\mathfrak{P}' \cap A = \mathfrak{p}'$ .

(Geometrisch gesehen haben wir das kommutative Diagramm

$$(31) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec}(B/\mathfrak{P}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(A/\mathfrak{p}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

betrachtet und benutzt, dass die linke Abbildung surjektiv ist).

**Corollar 6.5** Ist  $A \hookrightarrow B$  eine ganze Ringerweiterung, so ist  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  eine abgeschlossene Abbildung.

**Beweis** Sei  $V(\mathfrak{b}) \subseteq \text{Spec}(B)$  eine abgeschlossene Menge;  $\mathfrak{b} \subseteq B$  ein Ideal. Sei  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap A$ . Dann folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$(32) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec}(B/\mathfrak{b}) & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \text{Spec}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \text{Spec}(A), \end{array}$$

dass  $V(\mathfrak{b})$  auf die abgeschlossene Menge  $V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec}(A)$  abgebildet wird. Denn  $V(\mathfrak{b})$  (bzw.  $V(\mathfrak{a})$ ) ist das Bild der oberen (bzw. unteren) Abbildung, und die linke Abbildung ist nach 6.4 (c) surjektiv, da  $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow B/\mathfrak{b}$  eine ganze Ringerweiterung ist.

**Corollar 6.6** Ist  $A \hookrightarrow B$  eine ganze Ringerweiterung, so gilt

$$\dim A = \dim B.$$

**Beweis** Ist

$$(33) \quad \mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_r$$

eine Primidealkette in  $B$ , und ist  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap A$  ( $i = 1, \dots, r$ ), so ist nach 6.4(b)

$$(34) \quad \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

eine Primidealkette in  $A$ . Es ist also  $\dim A \geq \dim B$ . Ist umgekehrt (34) eine Primidealkette in  $A$ , so gibt es nach 6.4 (c) ein  $\mathfrak{P}_0 \in \text{Spec}(B)$  über  $\mathfrak{p}_0$ , und aus 6.4 (b) und (d) folgt induktiv die Existenz einer Primidealkette (33) in  $B$  mit  $\mathfrak{P}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ . Also ist  $\dim B \geq \dim A$ .

Ist  $A$  normal, so können wir die obigen Resultate verschärfen. Hierbei definieren wir.

**Definition 6.7** Sei  $A \hookrightarrow B$  eine Ringerweiterung.

(a)  $A$  heißt *ganz abgeschlossen* in  $B$ , wenn  $A$  gleich seinem ganzen Abschluss  $\overline{A}$  in  $B$  ist.

(b) Ein Integritätsring  $A$  heißt *normal*, wenn er ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper  $K$  ist.

**Lemma 6.8** Jeder faktorielle Ring  $R$  (also auch jeder Hauptidealring) ist ganz abgeschlossen.

**Beweis** Sei  $\frac{a}{b} \in K = \text{Quot}(R)$ ,  $a \in R$ ,  $b \in R \setminus \{0\}$ . Ohne Einschränkung seien  $a$  und  $b$  teilerfremd. Angenommen, es gibt  $a_0, \dots, a_{n-1} \in R$  mit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{a}{b}\right) + a_0 = 0.$$

Die Gleichung

$$-a^n = a_{n-1}a^{n-1}b + \dots + a_1ab^{n-1} + a_0b^n$$

steht dann im Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $a$  und  $b$ .

**Beispiele 6.9** Polynomringe  $k[X_1, \dots, X_n]$  über einem Körper sind ganz abgeschlossen,  $\mathbb{Z}$  ist ganz abgeschlossen.

**Lemma 6.10** Sei  $A$  ein normaler Ring mit Quotientenkörper  $K$ ,  $L/K$  eine Körpererweiterung und  $\mathfrak{p} \subseteq A$  ein Primideal. Ist  $b \in L$  ganz über  $\mathfrak{p}$ , so hat das Minimalpolynom von  $b$  über  $K$  die Form

$$(35) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}$ .

**Beweis** Seien  $b_1, b_2, \dots, b_n$  die Nullstellen von (35) in einer normalen Erweiterung  $L'/K$  (z.B.  $L' = \overline{K}$ , der algebraische Abschluss von  $K$ ). Für jedes  $i = 1, \dots, n$  gibt es dann eine  $K$ -Einbettung  $\sigma_i : L \hookrightarrow L'$  mit  $\sigma_i(b) = b_i$ . Nach Voraussetzung gibt es eine Gleichung

$$(36) \quad b^m + c_{m-1}b^{m-1} + \dots + c_1b + c_0 = 0$$

mit  $c_0, \dots, c_m \in \mathfrak{p}$ . Es folgt durch Anwendung von  $\sigma_i$ , dass  $b_i$  ebenfalls die Gleichung (36) erfüllt, also ganz über  $\mathfrak{p}$  ist ( $i = 1, \dots, n$ ). Dies folgt dann auch für die  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ), da diese polynomiale Ausdrücke in den  $b_j$  sind. Da  $a_i \in K$ , sehen wir, dass die  $a_i$  im ganzen Abschluss  $\overline{A}$  von  $A$  in  $K$  liegen, also in  $A$ , da  $A$  normal ist. Aus 6.2 (ii) folgt nun, dass  $a_i^m \in \mathfrak{p}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $a_i \in \mathfrak{p}$ , da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist.

**Lemma 6.11** Sei  $R$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal und  $S \subseteq R$  eine multiplikative Teilmenge. Dann gilt  $\mathfrak{a} \cap S = \emptyset$  genau dann, wenn es ein Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq R$  gibt mit  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$  und  $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ .

**Beweis** Nach Satz 5.12 und Satz 5.13 haben wir Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Spec}((R/\mathfrak{a})_{\overline{S}}) &= \{\overline{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}(R/\mathfrak{a}) \mid \overline{\mathfrak{p}} \cap \overline{S} = \emptyset\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}, \end{aligned}$$

wobei  $\overline{S}$  das Bild  $S$  in  $R/\mathfrak{a}$  ist. Weiter gilt

$$\text{Spec}((R/\mathfrak{a})_{\overline{S}}) \neq \emptyset \Leftrightarrow (R/\mathfrak{a})_{\overline{S}} \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in \overline{S} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S = \emptyset,$$

denn für einen Ring  $A$  und eine multiplikative Teilmenge  $T \subseteq A$  gilt nach Lemma 5.21

$$A_T = 0 \Leftrightarrow 0 \in T.$$

**Satz 6.12** (going-down-Theorem von Cohen-Seidenberg) Sei  $A \hookrightarrow B$  eine ganze Ringerweiterung, wobei  $A$  und  $B$  Integritätsringe sind und  $A$  normal ist. Seien  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$  Primideale in  $A$  und sei  $\mathfrak{P}' \subseteq B$  ein Primideal über  $\mathfrak{p}'$  (also  $\mathfrak{P}' \cap A = \mathfrak{p}'$ ). Dann gibt es ein Primideal  $\mathfrak{P} \subseteq B$  mit  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}$  über  $\mathfrak{p}$  (also  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ ).

**Beweis** Die Mengen  $S = A - \mathfrak{p}$  und  $S' = B - \mathfrak{P}'$  und  $T = S \cdot S' = \{s \cdot s' \mid s \in S, s' \in S'\}$  sind multiplikativ, und es ist  $S, S' \subseteq T$ . Wir zeigen nun  $\mathfrak{p}B \cap T = \emptyset$ . Nach Lemma 6.11 gibt es dann ein  $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(B)$  mit  $\mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{P}$  und  $T \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ . Aus  $S \cap \mathfrak{P} = \emptyset$  folgt  $\mathfrak{P} \cap A \subseteq \mathfrak{p}$  und

aus  $S' \cap \mathfrak{P} = \emptyset$  folgt  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$ . Hieraus folgt  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{P} \cap A \subseteq \mathfrak{p}$ , also  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ , sowie  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$  wie gewünscht.

Angenommen, es gibt ein  $f \in \mathfrak{p}B \cap T$ . Nach 6.2 (iii) und der Ganzheit von  $B$  über  $A$  ist  $f$  dann ganz über  $\mathfrak{p}$ , und nach Lemma 6.10 hat das Minimalpolynom von  $f$  über  $K = \text{Quot}(A)$  die Form

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}$ . Wegen  $f \in T$  ist  $f = s \cdot s'$  mit  $s \in S = A \setminus \mathfrak{p}$  und  $s' \in S' = B \setminus \mathfrak{P}'$ . Das Minimalpolynom von  $s' = \frac{f}{s} \in L = \text{Quot}(B)$  über  $K$  ist dann

$$(37) \quad X^n + \frac{a_1}{s}X^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s^n}.$$

Dessen Koeffizienten liegen nach 6.10 in  $A$ , da  $s'$  ganz über  $A$  ist. Also ist  $a_i = s^i \cdot r_i$  mit  $r_i \in A$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Wegen  $a_i \in \mathfrak{p}$ ,  $s \notin \mathfrak{p}$  folgt dann  $r_i \in \mathfrak{p}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Nach (37) ist also  $s'$  ganz über  $\mathfrak{p}$  und daher  $s' \in \sqrt{\mathfrak{p}B} \subseteq \mathfrak{P}'$ , im Widerspruch zu  $s' \notin \mathfrak{P}'$ .

## 7 Dimension von endlich erzeugten $k$ -Algebren und Varietäten

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass  $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$  für einen Körper  $k$  ist, und wie man hieraus die Dimension von endlich erzeugten  $k$ -Algebren  $A$  berechnet. Insbesondere ist  $\dim \mathbb{A}^n(k) = n$  für einen algebraisch abgeschlossenen Körper, und wir erhalten auch eine Methode zur Berechnung der Dimension von  $k$ -Varietäten.

**Definition 7.1** Sei  $A$  ein Ring und  $B$  eine  $A$ -Algebra. Elemente  $b_1, \dots, b_n \in B$  heißen *algebraisch unabhängig über  $A$* , wenn es kein Polynom  $f \in A[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  gibt mit  $f(b_1, \dots, b_n) = 0$  ( $\Leftrightarrow$  die verschiedenen Potenzen  $b_1^{i_1} \dots b_n^{i_n}$  sind *linear unabhängig* über  $A$ , d.h., es gibt keine nicht-triviale  $A$ -Linearkombination zu 0  $\Leftrightarrow$  der Einsetzungshomomorphismus  $A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B$ ,  $x_i \mapsto b_i$ , ist injektiv).

**Satz 7.2** (Noether-Normalisierung) Sei  $A$  eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra,  $k$  ein Körper, und sei  $I \subseteq A$  ein Ideal,  $I \neq A$ . Dann gibt es  $i, d \in \mathbb{N}_0$ ,  $i \leq d$ , und Elemente  $y_1, \dots, y_d \in A$ , so dass gilt:

- (a)  $y_1, \dots, y_d$  sind algebraisch unabhängig über  $k$ .
  - (b)  $A$  ist endliche  $k[y_1, \dots, y_d]$ -Algebra (d.h., als  $k[y_1, \dots, y_d]$ -Modul endlich erzeugt).
  - (c)  $I \cap k[y_1, \dots, y_d] = \langle y_{i+1}, \dots, y_d \rangle$ .
1. Zusatz: Ist  $A = k[x_1, \dots, x_n]$ , so kann  $d = n$  gewählt werden.  
 2. Zusatz: Für unendliches  $k$  können dabei  $y_1, \dots, y_i$  als Linearkombinationen der  $x_1, \dots, x_n$  gewählt werden.

Bevor wir den Satz beweisen, ziehen wir einige Schlussfolgerungen.

**Corollar 7.3** (a)  $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$ .

(b) Ist  $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$  eine Noether-Normalisierung (d.h., wie im Satz eine Injektion eines Polynomrings in  $A$  so, dass  $A$  endlich erzeugt als  $k[y_1, \dots, y_n]$ -Modul ist), so ist  $\dim A = n$ .

**Beweis** Es ist nur (b) zu zeigen. Nach Corollar 6.6 ist  $\dim A = \dim k[y_1, \dots, y_n]$ , und die Primidealkette

$$(0) \subsetneq \langle y_1 \rangle \subsetneq \langle y_1, y_2 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle y_1, \dots, y_n \rangle$$

zeigt, dass  $\dim k[y_1, \dots, y_n] \geq n$  ist. Es ist also zu zeigen: Für eine Primidealkette der Länge  $r$  in  $A$

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

ist  $r \leq n$ . Wir beweisen dies durch Induktion über  $n$ . Sei  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap k[y_1, \dots, y_n]$ ; dann ist nach 6.4 (b)  $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r$  eine Primidealkette in  $k[y_1, \dots, y_n]$ . Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen; sei  $n > 0$ , und die Behauptung für weniger Variablen als  $n$  schon bewiesen. Nach 7.2, 1. Zusatz gibt es eine Noether-Normalisierung

$$k[t_1, \dots, t_n] \subseteq k[y_1, \dots, y_n]$$

mit

$$\mathfrak{p}'_1 := \mathfrak{p}_1 \cap k[t_1, \dots, t_n] = \langle t_{i+1}, \dots, t_n \rangle$$

für ein  $i \leq n$ . Nach 6.4 (b) ist für  $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}_0 \cap k[t_1, \dots, t_n]$  wegen  $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1$  auch  $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1$ , also insbesondere  $\mathfrak{p}'_1 \neq 0$  und damit  $i < n$ .

Nun ist

$$\begin{array}{c} k[t_1, \dots, t_n] / \langle t_{i+1}, \dots, t_n \rangle \hookrightarrow A/\mathfrak{p}_1 \\ \parallel \lambda \\ k[t_1, \dots, t_i] \end{array}$$

wieder eine Noether-Normalisierung. Für die Primidealkette

$$\{0\} = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r/\mathfrak{p}_1$$

der Länge  $r-1$  in  $A/\mathfrak{p}_1$  gilt also nach Induktionsvoraussetzung  $r-1 \leq i < n$ . Es folgt  $r \leq n$ .

## Beweis von Satz 7.2

**1. Fall**  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  und  $I = \langle f \rangle$  ist ein Hauptideal,  $f \neq 0$ .

**Lemma 7.4** (a) Durch eine Substitution der Form

$$(38) \quad x_i = y_i + x_n^{r_i} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

mit geeigneten  $r_i \in \mathbb{N}_0$  geht  $f$  über in ein Element der Form

$$a x_n^m + g_{m-1} x_n^{m-1} + \dots + g_1 x_n + g_0$$

mit  $a \in k^\times$  und  $g_i \in k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ .

(b) Ist  $k$  unendlich, so ist dies auch möglich mit einer Substitution

$$(39) \quad x_i = y_i + a_i x_n$$

mit geeigneten  $a_i \in k^\times$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ).

**Beweis** Sei  $f = \sum a_{i_1, \dots, i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n} \neq 0$ . Im Fall (a) ist nach der Substitution

$$\begin{aligned} f &= \sum a_{i_1, \dots, i_n} (x_n^{r_1} + y_1)^{i_1} \dots (x_n^{r_{n-1}} + y_{n-1})^{i_{n-1}} x_n^{i_n} \\ &= \sum a_{i_1, \dots, i_n} (x_n^{i_1 r_1 + i_2 r_2 + \dots + i_{n-1} r_{n-1} + i_n} + \dots), \end{aligned}$$

wobei die Punkte Terme bedeuten, in denen  $x_n$  mit niedrigerer Potenz auftritt.

Sei  $k = \max \{i \mid \exists (i_1, \dots, i_n) \text{ mit } a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0 \text{ und } i \in \{i_1, \dots, i_n\}\} + 1$ . Die Zahlen

$$(40) \quad i_n + i_1 k + \dots + i_{n-1} k^{n-1} \quad (a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0)$$

sind dann für verschiedene  $n$ -Tupel  $(i_1, \dots, i_n)$  mit  $a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$  verschieden. Setzt man  $r_i := k^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), so erhält man die Darstellung in (a) mit  $m = \text{Maximum der Zahlen (40)}$ .

(b): Sei

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$$

die Zerlegung von  $f$  in homogene Komponenten  $f_i$ , mit  $\deg(f_i) = i$ , wobei  $f_m \neq 0$  sei. Nach der Substitution in (b) ist

$$f = f_m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) x_n^m + \dots$$

wobei die Punkte Terme bedeuten, in denen  $x_n$  in niedrigerer Potenz als  $m$  vorkommt. Ist  $k$  unendlich, so gibt es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$  mit  $f_m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$  (Ist  $f_m$  homogen,  $\neq 0$  so ist  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \neq 0$ ), und die Behauptung folgt.

Wir beweisen damit Satz 7.2 im ersten Fall: Wähle

$$(41) \quad y_n = f$$

und  $y_i$  wie in Lemma 7.4 ( $i = 1, \dots, n-1$ ) (Für unendliches  $k$  seien die  $y_i$  wie in (39) gewählt). Dann sind  $y_1, \dots, y_{n-1}$  algebraisch unabhängig über  $k$  (rechne modulo  $x_n$ !). Es sind auch  $y_1, \dots, y_n$  algebraisch unabhängig über  $k$ . Denn: Es ist von der Form der Substitution klar, dass mit  $x_1, \dots, x_n$  auch  $y_1, \dots, y_{n-1}, x_n$  algebraisch unabhängig sind: Ist  $g \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  mit  $0 = g(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) = g(x_1 + x_n^{k_1}, \dots, x_{n-1} + x_n^{k_{n-1}}, x_n)$  so ist durch erneute Substitution  $x_i \mapsto x_i - x_n^{k_i}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) und  $x_n \mapsto x_n$  auch  $0 = g(x_1, \dots, x_n)$ . Wäre nun

$$\sum_{i=0}^r g_i(y_1, \dots, y_{n-1}) y_n^i = 0,$$

mit  $g_r(y_1, \dots, y_{n-1}) \neq 0$ , so folgte mit  $y_n = f = a x_n^m + \dots$

$$0 = a^r g_r(y_1, \dots, y_{n-1}) x_n^{m \cdot r} + \dots$$

wobei  $\dots$  Terme bedeutet, in denen  $x_n$  mit kleinerem Grad vorkommt. Widerspruch zur algebraischen Unabhängigkeit von  $y_1, \dots, y_{n-1}, x_n$ !

Weiter ist  $A = k[y_1, \dots, y_{n-1}][x_n]$  und daher endlich über  $k[y_1, \dots, y_n]$ ; denn mit den Bezeichnungen von 7.4 ist

$$0 = f - y_n = a x_n^m + g_{m-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) x_n^{m-1} + \dots + (g_0(y_1, \dots, y_{n-1}) - y_n),$$

also ist  $x_n$  ganz über  $k[y_1, \dots, y_n]$ . Damit gilt der 1. Zusatz.

Es bleibt zu zeigen:  $I \cap k[y_1, \dots, y_n] = \langle y_n \rangle$ , wobei " $\supseteq$ " nach Definition gilt. Sei umgekehrt  $g \in I \cap k[y_1, \dots, y_n]$ . Dann ist  $g = h \cdot y_n$  mit  $h \in A$ . Es gibt dann eine Gleichung

$$h^s + a_{s-1} h^{s-1} + \dots + a_1 h + a_0 = 0$$

mit  $s > 0$  und  $a_0, \dots, a_{s-1} \in k[y_1, \dots, y_n]$ . Es folgt (durch Multiplikation mit  $y_n^s$ )

$$g^s + a_{s-1} y_n g^{s-1} + \dots + a_1 y_n^{s-1} g + a_0 y_n^s = 0,$$

also  $g^s \in \langle y_n \rangle \subseteq k[y_1, \dots, y_n]$  und daher auch  $g \in \langle y_n \rangle$ , da dies ein Primideal ist. Für unendliches  $k$  ist nach Wahl von  $y_1, \dots, y_{n-1}$  auch der 2. Zusatz erfüllt.

**2. Fall**  $A = k[x_1, \dots, x_n]$ , und  $I \subsetneq A$  ist ein beliebiges Ideal.

Für  $I = \langle 0 \rangle$  ist nichts zu zeigen; sei also  $0 \neq f \in I$  nicht konstant. Für  $n = 1$  sind wir ebenfalls fertig: dann ist  $I$  ein Hauptideal und wir sind im 1. Fall. Sei also  $n > 1$ , und sei  $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$  mit  $y_n = f$  wie im 1. Fall konstruiert (Insbesondere sei  $x_i = y_i + a_i x_n$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) für unendliches  $k$ ). Durch Induktion über  $n$  können wir annehmen, dass die Behauptung für  $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$  und das Ideal  $I \cap k[y_1, \dots, y_{n-1}]$  schon gilt; es gibt also eine Noether-Normalisierung (1. Zusatz!)

$$k[t_1, \dots, t_{n-1}] \subseteq k[y_1, \dots, y_{n-1}]$$

$$\text{mit } I \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}] = \langle t_{i+1}, \dots, t_{n-1} \rangle$$

für ein  $i \leq n-1$ . Für unendliches  $k$  können wir dabei annehmen, dass  $t_1, \dots, t_i$  Linearkombinationen der  $y_1, \dots, y_{n-1}$  sind, also auch der  $x_1, \dots, x_n$ . Mit  $k[t_1, \dots, t_{n-1}] \hookrightarrow k[y_1, \dots, y_{n-1}]$  ist auch  $k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n] \hookrightarrow k[y_1, \dots, y_n]$  eine endliche Ringerweiterung, also gilt dies auch für  $k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n] \hookrightarrow A$ . Die algebraische Unabhängigkeit von  $t_1, \dots, t_{n-1}, y_n$  in  $A$  ist nun offensichtlich (selbst!).

Jedes  $g \in I \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$  schreibt sich wegen  $y_n \in I$  als

$$g = g^* + h \cdot y_n$$

mit  $g^* \in I \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}] = \langle t_{i+1}, \dots, t_{n-1} \rangle$  und  $h \in k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n]$ . Es folgt  $I \cap k[t_1, \dots, t_{n-1}, y_n] = \langle t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, y_n \rangle$ .

**3. Fall** =allgemeiner Fall:

Schreibe  $A = k[x_1, \dots, x_n]/J$  und bestimme nach dem 2. Fall eine Noether-Normalisierung

$$k[y_1, \dots, y_n] \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$$

mit  $J \cap k[y_1, \dots, y_n] = \langle y_{i+1}, \dots, y_n \rangle$ ,  $i \leq n$ . Dies liefert eine Noether-Normalisierung

$$\begin{array}{c} k[y_1, \dots, y_n] / \langle y_{i+1}, \dots, y_n \rangle \hookrightarrow A \\ \parallel \\ k[y_1, \dots, y_i] \end{array}$$

Wenden wir den 2. Fall noch einmal an, auf  $k[y_1, \dots, y_i]$  und  $I' = I \cap k[y_1, \dots, y_i]$ , so erhalten wir eine Noether-Normalisierung

$$k[t_1, \dots, t_i] \hookrightarrow k[y_1, \dots, y_i]$$

$$\text{mit } I' \cap k[t_1, \dots, t_i] = \langle t_{j+1}, \dots, t_i \rangle \quad j \leq i.$$

Dann ist

$$k[t_1, \dots, t_i] \hookrightarrow A$$

die gewünschte Noether-Normalisierung für  $A$  und  $I$ . Für unendliches  $k$  sind dabei ohne Einschränkung  $y_1, \dots, y_i$  Linearkombinationen der  $x_1, \dots, x_n$  und  $t_1, \dots, t_j$  Linearkombinationen der  $y_1, \dots, y_i$ , also auch der  $x_1, \dots, x_n$ .

**Bemerkung 7.5** Der Beweis zeigt: Ist  $A$  eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra und  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_r$  eine Kette von Idealen, so gibt es eine Noether-Normalisierung

$$k[y_1, \dots, y_n] \subseteq A$$

$$\text{mit } I_\nu \cap k[y_1, \dots, y_n] = \langle y_{i_\nu+1}, \dots, y_n \rangle$$

für  $\nu = 0, \dots, r$  (und  $i_0 \geq i_1 \geq \dots \geq i_r$ ).

**Corollar 7.6** (a) Sei  $k$  ein Körper. Für eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra  $A$  sind äquivalent

(i)  $\dim A = 0$

(ii)  $\dim_k A < \infty$  ( $A$  ist als  $k$ -Vektorraum endlich-dimensional).

- (b) Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $V$  eine  $k$ -Varietät. Dann sind äquivalent
- (i)  $\dim V = 0$
  - (ii)  $V$  ist endlich.

**Beweis** (i): Sei  $k[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow A$  eine Noether-Normalisierung ( $d = \dim A$ ). Dann gilt  $d = 0$  genau dann, wenn  $A$  endlich-dimensional ist.

(ii): Es gilt  $\dim V = 0$  genau dann, wenn alle irreduziblen Komponenten von  $V$  die Dimension null haben (Corollar 4.9). Da  $V$  nur endlich viele irreduzible Komponenten besitzt (Corollar 4.17), genügt es also, den Fall einer irreduziblen  $k$ -Varietät zu betrachten. Weiter ist jede  $k$ -Varietät endliche Vereinigung von affinen  $k$ -Varietäten. Also ist  $V$  ohne Einschränkung affin. Die Behauptung folgt dann mit Übungsaufgabe 2, Blatt 5.

**Corollar 7.7** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein polynomiales Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(X_1, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned}$$

hat genau dann endlich viele Lösungen in  $k$ , wenn die Dimension des Rings

$$A = k[X_1, \dots, X_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

gleich null ist, also wenn diese  $k$ -Algebra endliche  $k$ -Dimension hat.

**Beweis** Die Lösungsmenge ist eine affine  $k$ -Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ . Diese ist nach Corollar 7.6 genau dann endlich, wenn  $V$  (bezüglich der Zariski-Topologie) die Dimension 0 hat, d.h., nach Lemma 4.4, wenn der Koordinatenring  $\mathcal{O}(V)$  die (Krull-)Dimension 0 hat. Es ist aber  $\mathcal{O}(V) = A_{red} = A/\text{nil}(A)$  nach Hilberts Nullstellensatz (siehe Satz 1.21), und  $\dim A = \dim A_{red}$ , weil  $\text{nil}(A)$  in allen Primidealen enthalten ist.

**Beispiel 7.8** (a) Sei  $k$  ein Körper. Dann hat

$$A = k[x, y, z] / \langle x^2 + y^3, y^4 + z^5 \rangle$$

die Dimension 1, denn

$$\begin{array}{ccc} S = k[y] & \hookrightarrow & A = S[x, z] \\ y & \mapsto & y \end{array}$$

ist offenbar eine Noether-Normalisierung.

(b) Die  $k$ -Algebra

$$B = k[x, y, z] / \langle x^2 + y^3, y^4 + z^5, z^6 + x^7 \rangle$$

hat die Dimension 0, denn in  $B$  gilt

$$x^2 = -y^3 \quad , \quad z^5 = -y^4 \quad , \quad z^6 = -x^7 \quad ,$$

also

$$y^{48} = z^{60} = x^{70} = -y^{105} \quad ,$$

d.h.,

$$y^{48}(1 + y^{57}) = 0 \quad ,$$

Dies liefert endliche Ringhomomorphismen

$$k \hookrightarrow k[y]/\langle y^{48}(1+y^{57}) \rangle \rightarrow B,$$

wobei wir einen nicht notwendigerweise injektiven Ringhomomorphismus

$$\varphi : A \rightarrow B$$

auch endlich (bzw. ganz) nennen, wenn  $B$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul ist (bzw. jedes Element  $b \in B$  ganz über  $A$  ist in dem Sinne, dass es ein normiertes Polynom  $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in A[X]$  gibt mit  $f(b) = 0$  in  $B$ ). D.h.,  $B$  heißt endlich (bzw. ganz) über  $A$ , wenn  $\varphi(A) \hookrightarrow B$  eine endliche (bzw. ganze) Ringerweiterung ist.

Also ist  $B$  endlich erzeugter  $k$ -Modul, d.h.,  $\dim_k B < \infty$ , d.h.,  $\dim B = 0$ . Tatsächlich erhalten wir z.B. für  $k = \mathbb{C}$  die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 &= 0 \\ y^4 + z^5 &= 0 \\ z^6 + x^7 &= 0 \end{aligned}$$

dadurch, dass  $y^{48}(1+y^{57}) = 0$  gelten muss. Es ist also  $y = 0$  oder  $y = \zeta$  mit  $\zeta^{57} = -1$  (eine 114te Einheitswurzel), und dann  $x = z = 0$  (im ersten Fall), oder  $x^2 = -\zeta^3$  und  $z^5 = -\zeta^4$ . Das Gleichungssystem hat also nur endlich viele Lösungen.

**Erinnerung 7.9** (siehe Algebra II, §9) Sei  $K/k$  eine Körpererweiterung.

(a) Es gibt eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen in  $K$  so, dass die  $x_i$  algebraisch unabhängig über  $k$  sind und  $K/k(x_i \mid i \in I)$  algebraisch ist. Eine solche Familie heißt Transzendenzbasis von  $K/k$ .

(b) Die Mächtigkeit von  $I$  ist unabhängig von der Wahl der Transzendenzbasis und heißt der Transzendenzgrad von  $K$  über  $k$ . (Bez.  $\text{tr. deg}_k K$ ).

**Proposition 7.10** Ist  $A$  eine integrale endlich erzeugte  $k$ -Algebra mit Quotientenkörper  $K$ , so ist

$$\dim A = \text{tr. deg}_k K.$$

**Beweis** Sei  $k[y_1, \dots, y_n] \hookrightarrow A$  eine Noether-Normalisierung. Diese induziert (als injektiver Homomorphismus von Integritätsringen) einen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} k(x_1, \dots, x_n) & \hookrightarrow & K \\ \parallel & & \\ \text{Quot}(k[x_1, \dots, x_n]) & & \end{array}$$

der Quotientenkörper, und  $K/k(x_1, \dots, x_n)$  ist endlich (da von endlich vielen algebraischen =ganzen Elementen erzeugt). Es folgt

$$\dim A = n = \text{tr. deg}_k K.$$

Wir haben nun eine bemerkenswerte Eigenschaft von endlich erzeugten  $k$ -Algebren:

**Satz 7.11** Sei  $A$  eine integrale endlich erzeugte  $k$ -Algebra der Dimension  $n$ . Dann hat jede maximale Primidealkette in  $A$  die Länge  $n$ .

**Beweis** Sei

$$\langle 0 \rangle = \mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_r$$

eine Primidealkette in  $A$ , die sich nicht mehr verfeinern lässt. Wähle (induktiv) eine Noether-Normalisierung

$$k[y_1, \dots, y_n] \hookrightarrow A$$

mit  $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap k[y_1, \dots, y_n] = \langle y_{\nu(i)}, \dots, y_n \rangle$ , wobei  $(\nu(i+1) < \nu(i))$ . Ist  $r < n$ , so gibt es ein  $i$  so, dass  $\nu(i+1) + 1 < \nu(i)$  ist. Dann lässt sich noch das Primideal  $\mathfrak{p}' = \langle y_{\nu(i+1)+1}, \dots, y_n \rangle$  echt zwischen  $\mathfrak{p}_i$  und  $\mathfrak{p}_{i+1}$  einschieben. Betrachten wir die endliche Ringerweiterung

$$\begin{array}{ccc} k[y_1, \dots, y_{\nu(i)-1}] & \hookrightarrow & A/\mathfrak{P}_i, \\ \parallel & & \\ k[y_1, \dots, y_n]/\mathfrak{p}_i & & \end{array}$$

so folgt aus Satz 6.12 (going-down), dass in  $A/\mathfrak{P}_i$  ein Primideal  $\mathfrak{P}'$  über  $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}_i$  existiert mit  $\mathfrak{P}' \subsetneq \mathfrak{P}_{i+1}/\mathfrak{P}_i$ . Das Urbild in  $A$  liegt dann echt zwischen  $\mathfrak{P}_i$  und  $\mathfrak{P}_{i+1}$ : Widerspruch!

## 7.A Der Transzedenzgrad

Erinnerung: Eine Körpererweiterung  $L/K$  heißt transzendent, wenn sie nicht algebraisch ist.

**Definition 7.A.1** Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung.

(a) Eine Familie  $(x_1, \dots, x_n)$  von Elementen aus  $L$  heißt **algebraisch unabhängig** (oder **transzendent**) über  $K$ , wenn für jedes Polynom  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  notwendigerweise  $f = 0$  ist, d.h., wenn der Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} K[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow & L \\ f(X_1, \dots, X_n) = \sum c_{\nu_1, \dots, \nu_n} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n} & \mapsto & f(x_1, \dots, x_n) = \sum c_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} \end{array}$$

injektiv ist (Hier ist  $K[X_1, \dots, X_n]$  der Polynomring in den  $n$  Variablen  $X_1, \dots, X_n$ ).

(b) Eine beliebige Familie  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen  $x_i \in L$  heißt algebraisch unabhängig (oder transzendent) über  $K$ , wenn dies für jede endliche Teilfamilie  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  gilt.

**Bemerkungen 7.A.2** (a) Für  $n = 1$  wird 7.A.1(a) schon in der Algebra definiert, und  $L/K$  ist genau dann transzendent, wenn es ein transzendentes Element  $x \in K$  gibt.

(b) 7.A.1(b) bedeutet ebenfalls, dass der Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} K[X_i \mid i \in I] & \rightarrow & L \\ f & \mapsto & f(x_i) \end{array}$$

injektiv ist. Insbesondere erhalten wir dann eine Isomorphie

$$K(X_i \mid i \in I) \xrightarrow{\sim} K(x_i \mid i \in I),$$

wobei  $K(X_i \mid i \in I) = \text{Quot}(K[X_i \mid i \in I])$  der sogenannte (rationale) **Funktionskörper in den Variablen**  $X_i$  ist und  $K(x_i \mid i \in I) \subseteq L$  der von den  $x_i$  ( $i \in I$ ) erzeugte Teilkörper von  $L$ .

**Definition 7.A.3** Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung. Eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen  $x_i \in L$  heißt **Transzendenzbasis von  $L$  über  $K$** , wenn sie algebraisch unabhängig über  $K$  ist und  $L$  algebraisch über  $K(x_i \mid i \in I)$  ist.

Genauso können wir auch für Teilmengen  $\mathcal{X} \subseteq L$  definieren, wann sie algebraisch unabhängig über  $K$  sind oder eine Transzendenzbasis von  $L/K$  (durch Betrachtung der Familie  $(x)_{x \in \mathcal{X}}$ ).

Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung.

**Lemma 7.A.4** Sei  $\mathcal{X} \subseteq L$  algebraisch unabhängig über  $K$ , und sei  $x \in L \setminus \mathcal{X}$ . Dann ist  $x$  genau dann transzendent über  $K(\mathcal{X}) := K(x \mid x \in \mathcal{X})$ , wenn  $\mathcal{X} \cup \{x\}$  algebraisch unabhängig über  $K$  ist.

**Beweis** (1) Sei  $x$  transzendent über  $K(\mathcal{X})$ . Angenommen  $\mathcal{X} \cup \{x\}$  ist nicht algebraisch unabhängig über  $K$ . Dann gibt es  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  und ein nicht-triviales Polynom  $f \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$  mit  $f(x_1, \dots, x_n, x) = 0$ . Da  $(x_1, \dots, x_n)$  algebraisch unabhängig über  $K$  sind, kommt  $X_{n+1}$  in  $f$  in nicht-trivialer Potenz vor, und es folgt, dass  $x$  algebraisch über  $k(x_1, \dots, x_n)$ , also auch über  $k(\mathcal{X})$  ist – Widerspruch!

(2) Sei  $\mathcal{X} \cup \{x\}$  algebraisch unabhängig über  $K$ . Angenommen,  $x$  ist algebraisch über  $K(\mathcal{X})$ . Dann gibt es ein nicht-triviales Polynom  $f \in K(\mathcal{X})[X]$  mit  $f(x) = 0$ . Ist

$$f(x) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

mit  $a_i \in K(\mathcal{X})$ , so gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ , so dass  $a_0, \dots, a_m \in K(x_1, \dots, x_n)$ . Schreiben wir die  $a_i$  als Brüche

$$a_i = \frac{p_i(x_1, \dots, x_n)}{q_i(x_1, \dots, x_n)}$$

mit Polynomen  $p_i, q_i \in K[X_1, \dots, X_n], q_i \neq 0$ , so erhalten wir durch Multiplikation mit  $\prod_i q_i(x_1, \dots, x_n)$  eine Gleichung

$$b_m(x_1, \dots, x_n)x^m + \dots + b_1(x_1, \dots, x_n)x + b_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

mit Polynomen  $b_i(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ , nicht alle gleich null. Dann ist

$$g(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = \sum_{i=0}^m b_i(X_1, \dots, X_n)X_{n+1}^i$$

ein nicht-triviales Polynom in  $K[X_1, \dots, X_{n+1}]$  mit  $g(x_1, \dots, x_n, x) = 0$  – Widerspruch zur algebraischen Unabhängigkeit von  $\mathcal{X} \cup \{x\}$ .

**Corollar 7.A.5** Eine Teilmenge  $\mathcal{X} \subseteq L$  ist genau dann eine Transzendenzbasis von  $L/K$ , wenn sie eine maximale über  $K$  algebraisch unabhängige Teilmenge ist.

**Beweis** Gilt die letztere Bedingung, so ist nach 7.A.4 jedes  $x \in L$  algebraisch über  $k(\mathcal{X})$ . Ist umgekehrt  $\mathcal{X}$  eine Transzendenzbasis von  $L/K$ , so gibt es nach 7.A.4 keine echt größere Teilmenge, die algebraisch unabhängig über  $K$  ist.

**Corollar 7.A.6** Jede Körpererweiterung  $L/K$  besitzt eine (möglicherweise leere) Transzendenzbasis.

**Beweis** Ist  $L/K$  algebraisch, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist die Menge  $\mathcal{M}$  der über  $K$  algebraisch unabhängigen Teilmengen  $\mathcal{X} \subseteq L$  nicht leer und induktiv geordnet: Für eine Kette (total geordnete Teilmenge)  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$  ist  $\bigcup_{\mathcal{X} \in \mathcal{N}} \mathcal{X}$  algebraisch unabhängig über  $K$ , also eine obere Schranke von  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{M}$ .

Nach dem Zornschen Lemma besitzt  $\mathcal{M}$  also mindestens ein maximales Element; dies ist nach 7.A.5 eine Transzendenzbasis von  $L/K$ .

Sei weiter  $L/K$  eine Körpererweiterung.

**Proposition 7.A.7** (Ergänzungssatz) Seien  $\mathcal{X}', \mathcal{Y} \subseteq L$  Teilmengen. Ist  $\mathcal{X}'$  algebraisch unabhängig über  $K$  und  $L$  algebraisch über  $K(\mathcal{Y})$ , so lässt sich  $\mathcal{X}'$  durch Hinzunahme von Elementen aus  $\mathcal{Y}$  zu einer Transzendenzbasis  $\mathcal{X}$  von  $L/K$  vergrößern.

**Beweis:** Wieder mit dem Zornschen Lemma sieht man, dass es eine maximale Teilmenge  $\mathcal{X}'' \subseteq \mathcal{Y}$  gibt, für die  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$  algebraisch unabhängig über  $K$  ist. Nach Lemma 7.A.4 ist dann jedes Element  $y \in \mathcal{Y}$  algebraisch über  $K(\mathcal{X}' \cup \mathcal{X}'')$ . Dann ist  $K(\mathcal{Y})$  algebraisch über  $K(\mathcal{X}' \cup \mathcal{X}'')$ . Nach Voraussetzung gilt dies dann auch für  $L$ , und damit ist  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$  eine Transzendenzbasis von  $L/K$ .

**Bemerkungen 7.A.8** (a) Insbesondere enthält  $\mathcal{Y}$  eine Transzendenzbasis für  $L/K$  (Fall  $\mathcal{X} = \emptyset$ ).

(b) In 7.A.7 können wir für  $\mathcal{Y}$  ein Erzeugendensystem von  $L$  über  $K$  nehmen (Fall  $K(\mathcal{Y}) = L$ ).

**Beispiel 7.A.9** Sei  $L = \mathbb{R}(x, y \mid x^2 + y^2 = 0)$  der Funktionenkörper der Quadrik  $x^2 + y^2 = 0$ . Dies ist so zu verstehen: Das Polynom  $X^2 + Y^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$  ist irreduzibel, denn sonst könnten wir es in zwei Linearfaktoren  $(X - \alpha) \cdot (X - \beta)$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[Y]$  aufspalten. (Fasse  $\mathbb{R}[X, Y]$  als Polynomring  $\mathbb{R}[Y][X]$  auf), was auf  $\alpha^2 = -Y^2$  führen würde – Widerspruch. Daher ist

$$A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$$

integer, und wir setzen  $L = \text{Quot}(A)$  (Quotientenkörper von  $A$ ), wobei wir mit  $x$  und  $y$  die Bilder von  $X$  und  $Y$  in  $A$  (und  $L$ ) bezeichnen. Dann ist  $\{x, y\}$  ein Erzeugendensystem von  $L$  über  $\mathbb{R}$  (klar) und sowohl  $x$  als auch  $y$  liefert eine Transzendenzbasis von  $L/\mathbb{R}$ : Die Inklusion  $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X, Y]$  induziert einen injektiven Ringhomomorphismus von integren Ringen

$$\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2) = A,$$

da offenbar  $\mathbb{R}[X] \cap (X^2 + Y^2) = 0$ . Dieser induziert wiederum eine Einbettung

$$\mathbb{R}(X) \hookrightarrow L$$

der Quotientenkörper mit Bild  $\mathbb{R}(x)$ . Also ist  $x$  transzendent über  $\mathbb{R}$ ; andererseits ist  $y$  wegen der Gleichung  $y^2 + x^2 = 0$  algebraisch über  $\mathbb{R}(x)$ , also auch  $L$ . Der Fall von  $y$  ist symmetrisch.

**Satz 7.A.10** Zwei Transzendenzbasen  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  einer Körpererweiterung  $L/K$  haben dieselbe Mächtigkeit.

**Definition 7.A.11** Der **Transzendenzgrad** einer Körpererweiterung  $L/K$  wird definiert als

$$\text{tr. deg}(L/K) = |\mathcal{X}|,$$

wobei  $\mathcal{X}$  eine Transzendenzbasis von  $L/K$  ist.

Nach Satz 7.A.10 hängt diese Mächtigkeit nur von  $L/K$  ab.

**Beispiel 7.A.12** Für den Körper  $L = \mathbb{R}(x, y \mid x^2 + y^2 = 0)$  aus Beispiel 7.A.9 gilt  $\text{tr. deg}(L/\mathbb{R}) = 1$ .

**Beweis von Satz 7.A.10 für den Fall, dass  $\mathcal{X}$  endlich ist:** Sei etwa  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Wir zeigen durch Induktion über  $n$ , dass  $|\mathcal{Y}| \leq n = |\mathcal{X}|$ . Durch Symmetrie folgt dann auch  $|\mathcal{X}| \leq |\mathcal{Y}|$ , also  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$ . Für  $n = 0$  ist  $L/K$  algebraisch, also auch  $\mathcal{Y} = \emptyset$ . Sei also  $n > 0$ . Dann ist  $L/K$  nicht algebraisch, also  $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ , etwa  $y \in \mathcal{Y}$ . Nach Proposition 7.A.7 können wir  $y$  durch eine Teilmenge aus  $\mathcal{X}$  zu einer Transzendenzbasis  $\mathcal{Z}$  von  $L/K$  ergänzen. Dann gilt  $|\mathcal{Z}| \leq n$ , denn sonst wäre  $\mathcal{Z} = \{y\} \cup \mathcal{X}$ , aber  $\mathcal{X}$  ist maximal algebraisch unabhängig. Man sieht leicht, dass  $\mathcal{Y} \setminus \{y\}$  und  $\mathcal{Z} \setminus \{y\}$  beides Transzendenzbasen von  $L/K(y)$  sind (ähnliche Schlüsse wie für Lemma 7.A.4 – Übungsaufgabe!), wobei  $|\mathcal{Z} \setminus \{y\}| < n$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist dann  $|\mathcal{Y} \setminus \{y\}| \leq |\mathcal{Z} \setminus \{y\}|$ , also  $|\mathcal{Y}| \leq |\mathcal{Z}| \leq n$ .

Für den Fall, wo  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  beide unendlich sind, sei auf die Literatur verwiesen (siehe z.B. Algebra II §9).

Der Transzendenzgrad ist additiv in Erweiterungen:

**Satz 7.A.13** Für eine Kette  $K \subseteq L \subseteq M$  von Körpererweiterungen gilt

$$\text{tr. deg}(M/K) = \text{tr. deg}(L/K) + \text{tr. deg}(M/L).$$

**Beweis** Dies folgt leicht mit den obigen Techniken – Übungsaufgabe!

## 8 Krulls Hauptidealsatz und lokale Dimensionstheorie

**Lemma 8.1** (Krull-Nakayama-Lemma) Sei  $R$  ein Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal, welches in allen maximalen Idealen von  $R$  enthalten ist.

(a) Ist  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul und  $IM = M$ , so ist  $M = 0$ .

(b) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N \subseteq M$  ein Untermodul derart, dass  $M/N$  endlich erzeugt ist. Ist  $M = N + IM$ , so ist  $M = N$ .

**Beweis** (a):  $M$  besitzt ein minimales Erzeugendensystem  $\{m_1, \dots, m_t\}$ . Angenommen,  $t > 0$ . Wegen  $M = IM$  gibt es eine Gleichung

$$m_t = \sum_{j=1}^t a_j m_j \quad (a_j \in I, j = 1, \dots, t).$$

Es folgt

$$(1 - a_t) m_t = \sum_{j=1}^{t-1} a_j m_j.$$

Aber  $1 - a_t$  ist eine Einheit, da  $a_t$  in allen maximalen Idealen liegt (sonst wäre das Hauptideal  $\langle 1 - a_t \rangle \subsetneq R$ , also  $1 - a_t \in \mathfrak{m}$  für ein maximales Ideal, also  $1 \in \mathfrak{m}$  - Widerspruch!). Daher wird  $M$  schon von  $m_1, \dots, m_{t-1}$  erzeugt - Widerspruch!

(b): Sei  $\bar{M} = M/N$ . Dann ist  $I\bar{M} = (IM + N)/N$ . Nach Voraussetzung ist also  $I\bar{M} = \bar{M}$ , also  $\bar{M} = 0$  nach (a), also  $M = N$ .

**Corollar 8.2** Sei  $R$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Sind  $m_1, \dots, m_t \in M$  Elemente, deren Restklassen  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_t$  den Modul  $M/\mathfrak{m}M$  (= endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Restklassenkörper  $R/\mathfrak{m}$ !) erzeugen, so wird  $M$  von  $m_1, \dots, m_t$  erzeugt.

Dies folgt durch Anwendung von 8.1 (b) auf  $M$  und  $N = Rm_1 + \dots + Rm_t \subseteq M$ .

Sei  $R$  ein Ring.

**Definition 8.3** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Die Länge von  $M$  (Bez.  $\ell_R(M)$ ) ist das Supremum aller Längen  $\ell$  von Ketten von Untermoduln

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_\ell = M.$$

(Es ist also  $\ell_R(M) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ).

**Lemma 8.4** (Additivität in exakten Sequenzen) (a) Ist

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} M'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln, so gilt

$$\ell_R(M) = \ell_R(M') + \ell_R(M'').$$

Insbesondere hat  $M$  genau dann endliche Länge, wenn dies für  $M'$  und  $M''$  gilt.

(b) Für  $R$ -Moduln  $M_1, M_2$  gilt  $\ell_R(M_1 \oplus M_2) = \ell_R(M_1) + \ell_R(M_2)$ .

**Beweis** (a): (Wir fassen  $i$  als Inklusion auf) Hat man Ketten von Untermoduln

$$\begin{array}{ccc} 0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \dots & \subsetneq M'_r = M' \\ 0 \subsetneq M''_1 \subsetneq \dots & \subsetneq M''_s = M'', \end{array}$$

so ist mit  $M_i = \varphi^{-1}(M''_i)$

$$0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \dots \subsetneq M'_r \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_s = M$$

eine Kette der Länge  $r + s$ . Dies zeigt

$$\ell_R(M) \geq \ell_R(M') + \ell_R(M'').$$

Sei umgekehrt

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_\ell = M$$

eine Kette von Untermoduln in  $M$ . Wir erhalten kommutative Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M_{i+1} \cap M' & \rightarrow & M_{i+1} & \rightarrow & \varphi(M_{i+1}) & \rightarrow & 0 \\ & & \cup \downarrow & & \cup \downarrow & & \cup \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & M_1 \cap M' & \rightarrow & M_i & \rightarrow & \varphi(M_i) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Ist  $\varphi(M_i) = \varphi(M_{i+1})$ , so muss  $M_i \cap M' \subsetneq M_{i+1} \cap M'$  sein, wie man zum Beispiel mit dem Schlangenlemma (4.16) sieht. Es gilt also  $\varphi(M_i) \subsetneq \varphi(M_{i+1})$  oder  $M_i \cap M' \subsetneq M_{i+1} \cap M'$ , für jedes  $0 \leq i \leq \ell - 1$ . Hieraus folgt

$$\ell \leq \ell_R(M') + \ell_R(M'')$$

und damit die Gleichheit in. Der Zusatz folgt ebenfalls aus den obigen Überlegungen.

(b) folgt aus (a) und der exakten Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & M_1 \oplus M_2 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & 0 \\ & & x & \mapsto & (x, 0), (x, y) & \mapsto & y & & \end{array}$$

**Definition 8.5** Ein Ring heißt **artinsch**, wenn er die **absteigende Kettenbedingung** für Ideale erfüllt, d.h., wenn jede absteigende Kette

$$\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \mathfrak{a}_3 \supseteq \dots$$

von Idealen stationär wird.

**Beispiel 8.6** Sei  $k$  ein Körper. Ein  $k$ -Vektorraum  $V$  hat genau dann endliche Länge, wenn er endlich-dimensional ist, und es ist dann  $\dim_k V = l_k(V)$  ( $V$  ist irreduzibel und  $\neq 0$  genau dann, wenn  $V$  eindimensional ist). Offenbar ist  $k$  ein artinscher Ring.

**Satz 8.7** Für einen Ring  $R$  sind äquivalent:

- (a)  $R$  ist von endlicher Länge (als Modul über sich selbst).
- (b)  $R$  ist noethersch und artinsch.

(c)  $R$  ist noethersch, und  $\dim(R) = 0$ .

**Beweis** (a)  $\Leftrightarrow$  (b) ist klar, da die Untermoduln von  $R$  die Ideale sind.

(b)  $\Rightarrow$  (c): Es gelte (b), und  $\mathfrak{p} \subseteq R$  sei ein Primideal. Für  $a \in R \setminus \mathfrak{p}$  wird die Idealkette

$$\langle a \rangle \supset \langle a^2 \rangle \supset \langle a^3 \rangle \dots$$

stationär; es gibt also ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a^n = b a^{n+1}$  für ein  $b \in R$ , d.h.,

$$a^n(1 - ba) = 0.$$

Da  $R/\mathfrak{p}$  ein Integritätsring ist, folgt, dass das Bild  $\bar{a}$  von  $a$  in  $R/\mathfrak{p}$  eine Einheit ist. Also ist  $R/\mathfrak{p}$  ein Körper, d.h., jedes Primideal ist maximal.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Da  $R$  noethersch ist, gibt es nur endlich viele minimale Primideale  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ . Wegen  $\dim R = 0$  sind dies auch die maximalen Ideale von  $R$ . Es ist  $I = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_r$  das Nilradikal von  $R$ , und da dies endlich erzeugt ist, ist  $I$  sogar ein nilpotentes Ideal: es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $I^N = 0$ . Für (a) brauchen wir daher nur zu zeigen, dass  $R/I$  endliche Länge hat, da die Quotienten  $I^n/I^{n+1}$  endlich erzeugte  $R/I$ -Moduln sind. Nach dem chinesischen Restsatz ist aber

$$R/I \cong R/\mathfrak{m}_1 \times \dots \times R/\mathfrak{m}_r$$

ein Produkt von Körpern.

**Proposition 8.8** Sei  $R$  ein Ring mit nur endlich vielen minimalen Primidealen (z.B.  $R$  noethersch), etwa  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ . Dann ist das Nilradikal  $\text{nil}(R) = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$ , und  $\bigcup_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$  besteht aus lauter Nullteilern. Ist  $R$  reduziert, so ist  $\bigcup_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$  gleich der Menge aller Nullteiler.

**Beweis:** Die erste Aussage ist der abstrakte Nullsatz.

Die zweite Aussage ist daher klar für  $s = 1$ . Sei  $s > 1$  und  $r \in \mathfrak{q}_j$  für ein  $j, 1 \leq j \leq s$ . Dann wähle ein  $t \in \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i$  mit  $t \notin \mathfrak{q}_j$  (dies existiert, da sonst  $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{q}_j$ , also  $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{q}_j$  für ein

$i \neq j$  im Widerspruch dazu, dass die  $\mathfrak{q}_i$  minimal und verschieden sind). Wegen  $rt \in \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$  ist  $(rt)^N = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $t \notin \mathfrak{q}_j$  ist  $t^N \neq 0$ , aber es gibt ein  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $r^m t^N \neq 0$  und  $r^{m+1} t^N = 0$ , d.h.,  $r$  ist Nullteiler.

Ist  $R$  reduziert, so ist  $\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i = 0$ . Ist  $r$  ein Nullteiler, so existiert ein  $t \in R \setminus \{0\}$  mit  $r \cdot t = 0$ . Sei  $j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $t \notin \mathfrak{q}_j$ . Aus  $r \cdot t = 0 \in \mathfrak{q}_j$  folgt dann  $r \in \mathfrak{q}_j$ .

**Lemma/Definition 8.9** Sei  $R$  ein Ring und  $\mathfrak{p} \subseteq R$  ein Primideal. Dann heißt

$$\dim(R_{\mathfrak{p}}) = \text{Supremum der Länge } r \text{ von Primidealketten} \\ \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p} \text{ unterhalb } \mathfrak{p}$$

die Höhe von  $\mathfrak{p}$  (Bezeichnung:  $ht(\mathfrak{p})$ ).

Die behauptete Gleichheit folgt aus der inklusions-erhaltenden Bijektion

$$\text{Spec } R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } R \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

**Satz 8.10** (Krulls Hauptidealsatz) Sei  $R$  ein noetherscher Ring und  $a \in R$ . Sei  $\mathfrak{p}$  ein minimales Element in der Menge  $\{\mathfrak{p}' \in \text{Spec } R \mid \langle a \rangle \subseteq \mathfrak{p}'\}$  der Primteiler von  $\langle a \rangle$ . Dann ist  $ht(\mathfrak{p}) \leq 1$ , und  $ht(\mathfrak{p}) = 1$ , falls  $a$  kein Nullteiler ist.

**Beweis:** Wegen 8.8 folgt die zweite Aussage aus der ersten: Ist  $ht(\mathfrak{p}) = 0$ , so ist  $\mathfrak{p}$  minimal in  $R$ , d.h.,  $\mathfrak{p}$  besteht aus Nullteilern.

Wegen  $ht(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}}$  ist o.E.  $R$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ , welches minimal über  $\langle a \rangle$  liegt. Für jedes Primideal  $\mathfrak{q}$  mit  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$  ist dann zu zeigen, dass  $\mathfrak{q}$  minimal in  $R$  ist. Sei  $\mathfrak{q}^{(i)}$  das Urbild von  $\mathfrak{q}^i R_{\mathfrak{q}}$  in  $R$  (die “ $i$ -te symbolische Potenz von  $\mathfrak{q}$ ”) und betrachte die Idealkette

$$\langle a \rangle + \mathfrak{q}^{(1)} \supseteq \langle a \rangle + \mathfrak{q}^{(2)} \supseteq \dots$$

Da  $\text{Spec}(R/\langle a \rangle)$  nur ein Element besitzt, nämlich  $\mathfrak{m}/\langle a \rangle$ , hat  $R/\langle a \rangle$  endliche Länge (8.7). Es gibt also ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\langle a \rangle + \mathfrak{q}^{(n)} = \langle a \rangle + \mathfrak{q}^{(n+1)}.$$

Sei  $b \in \mathfrak{q}^{(n)}$ . Dann ist also  $b = ra + b'$  mit  $r \in R$  und  $b' \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ , und wegen  $ra \in \mathfrak{q}^{(n)}$ ,  $a \notin \mathfrak{q}$  (also Einheit in  $R_{\mathfrak{q}}$ ), ist schon  $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$ . Es folgt  $\mathfrak{q}^{(n)} = a\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$ , und mit dem Nakayama-Lemma ( $a \in \mathfrak{m}$ ) folgt  $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ . Daher ist  $\mathfrak{q}^n R_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{n+1} R_{\mathfrak{q}}$  und wiederum mit dem Nakayama-Lemma folgt  $\mathfrak{q}^n R_{\mathfrak{q}} = 0$ . Mit 8.7 schließen wir  $0 = \dim R_{\mathfrak{q}} = ht(\mathfrak{q})$ , also die Minimalität von  $\mathfrak{q}$ .

**Corollar 8.11** Sei  $k$  ein Körper,  $A$  eine integrale endlich erzeugte  $k$ -Algebra der Dimension  $d$  und  $f \in A$  keine Einheit und nicht null. Dann haben alle irreduziblen Komponenten von  $\text{Spec}(A/\langle f \rangle)$  die Dimension  $d - 1$ . Insbesondere ist  $\dim(A/\langle f \rangle) = d - 1$ .

**Beweis** Die irreduziblen Komponenten von  $\text{Spec}(A/\langle f \rangle)$  entsprechen den minimalen Primidealen von  $A/\langle f \rangle$ , also (Satz 5.12) den minimalen Primteilern  $\mathfrak{p}$  von  $\langle f \rangle$  in  $A$ . Da  $f$  keine Einheit ist, gibt es solche. Weiter ist nach Krulls Hauptidealsatz  $ht(\mathfrak{p}) = 1$ , nach Satz 7.11 also

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A) - ht(\mathfrak{p}) = d - 1.$$

**Beispiele 8.12** (a) Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen und  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  nicht konstant. Dann hat die Hyperfläche  $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  die Dimension  $n - 1$ .

(b) Sei  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom Grad  $> 0$ . Dann hat die projektive Hyperfläche  $V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  die Dimension  $n - 1$ . Dies folgt aus (a) unter Benutzung der Standard-offnen Überdeckung durch die offenen affinen Varietäten  $D_+(X_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung auf beliebige Ideale. Dazu benötigen wir zwei Lemmas.

**Lemma 8.13** Sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal eines Ringes  $R$ , und seien  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  Primideale in  $R$ . Ist  $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , so folgt  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$  für ein  $i$  (es genügt, dass  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  Primideale sind).

**Beweis:** Die Aussage ist trivial für  $n = 1$ . Sei also  $n > 1$  und  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  für alle  $i$ , aber  $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ . Wegen  $\mathfrak{a} = \bigcup_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i)$  dürfen wir durch Induktion über  $n$  annehmen, dass  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j \not\subseteq \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$  für

alle  $j$  (sonst wäre  $\mathfrak{a} = \bigcup_{i \neq j} (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i)$  und damit  $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ , nach Induktion also  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$  für ein  $i \neq j$ ). Für jedes  $j$  wähle ein  $x_j \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j$  mit  $x_j \notin \mathfrak{p}_i$  für alle  $i \neq j$ . Dann ist  $y = x_n + \prod_{j \neq n} x_j \in \mathfrak{a}$ , aber  $y \notin \mathfrak{p}_i$  für alle  $i$  (dies ist klar für  $i \neq n$ , und für  $i = n$  ist  $x_n \in \mathfrak{p}_n$ , aber  $\prod_{j \neq n} x_j \notin \mathfrak{p}_n$ , denn für  $n = 2$  ist  $x_1 \notin \mathfrak{p}_2$  und für  $n > 2$  ist  $\mathfrak{p}_n$  ein Primideal). Widerspruch!

**Lemma 8.14** Sei  $R$  ein noetherscher Ring und seien  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  Primideale in  $R$  mit  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann gibt es auch ein Primideal  $\mathfrak{q}$  mit  $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

**Beweis** Nach 8.13 gibt es ein  $x \in \mathfrak{p}$  mit  $x \notin \mathfrak{p}_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $x \notin \mathfrak{p}'$ . Ein minimaler Primteiler von  $xR_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{p}'R_{\mathfrak{p}}$  in  $R_{\mathfrak{p}}$  ist von der Form  $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$  mit  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } R$  und  $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ . Da  $ht_{R/\mathfrak{p}'}(\mathfrak{q}) \leq 1$  nach dem Hauptidealsatz und  $\dim R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'R_{\mathfrak{p}} \geq 2$  nach Voraussetzung, ist  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ . Schließlich ist  $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  für alle  $i$  und  $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{q}$  da  $x \in \mathfrak{q}$ ,  $x \notin \mathfrak{p}_i$  für alle  $i$  und  $x \notin \mathfrak{p}'$ .

**Satz 8.15** (Verallgemeinerter Hauptidealsatz) Sei  $R$  ein noetherscher Ring, und seien  $a_1, \dots, a_n \in R$ . Sei  $\mathfrak{p}$  ein minimaler Primteiler von  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , d.h., sei  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathfrak{p}$ , und  $\mathfrak{p}$  minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt  $ht(\mathfrak{p}) \leq n$ .

**Beweis:** Induktion über  $n$ . Der Fall  $n = 1$  ist der Hauptidealsatz. Sei  $n > 1$  und der Satz für  $n - 1$  bewiesen. Seien  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$  die minimalen Primteiler von  $\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $ht(\mathfrak{q}_i) \leq n - 1$  für alle  $i$ . Sei  $\mathfrak{p}$  minimaler Primteiler von  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  und sei

$$\mathfrak{p}_l \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$$

eine Primidealkette der Länge  $l$ . Wir haben zu zeigen, dass  $l \leq n$  ist. Sei  $l \geq 2$  (sonst sind wir fertig) und sei o.E.  $\mathfrak{p} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$ , denn sonst ist nach 8.13.  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, s\}$  und damit  $l \leq ht(\mathfrak{q}_i) \leq n - 1$  und wir wären fertig. Durch wiederholte Anwendung von 8.14. können wir auch annehmen, dass  $\mathfrak{p}_{l-1} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$  für alle  $i = 1, \dots, s$ . Sei  $\overline{R} = R / \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ , und  $\bar{\phantom{x}}$  bezeichne das Bild in  $\overline{R}$ . Dann ist  $\overline{\mathfrak{p}}$  minimal über  $\langle \overline{a}_n \rangle$ , also  $ht_{\overline{R}}(\overline{\mathfrak{p}}) \leq 1$  nach dem Hauptidealsatz. Es ist  $\overline{\mathfrak{p}}_{l-1} \not\subseteq \overline{\mathfrak{q}}_i$  für alle  $i$ , da  $\mathfrak{p}_{l-1} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$  und  $\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle \subseteq \mathfrak{q}_i$ .

Es folgt, dass  $\overline{\mathfrak{p}}$  minimaler Primteiler von  $\overline{\mathfrak{p}}_{l-1}$  ist (wegen  $ht_{\overline{R}} \overline{\mathfrak{p}} \leq 1$  wäre sonst  $\overline{\mathfrak{p}}_{l-1}$  in einem der  $\overline{\mathfrak{q}}_i$  enthalten). Also ist  $\mathfrak{p}$  minimaler Primteiler von  $\mathfrak{p}_{l-1} + \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  in  $R$ , und damit  $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}$  minimaler Primteiler des von  $a_1, \dots, a_{n-1}$  erzeugten Ideals in  $R/\mathfrak{p}_{l-1}$ . Aus der Induktionsvoraussetzung folgt  $l - 1 \leq ht_{R/\mathfrak{p}_{l-1}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}) \leq n - 1$ , also  $l \leq n$ .

**Definition 8.16** (a) Ein topologischer Raum  $X$  heißt äquidimensional (oder rein-dimensional), wenn alle irreduziblen Komponenten von  $X$  dieselbe Dimension haben.

(b) Ein Ring  $R$  heißt äquidimensional oder rein-dimensional, wenn  $\text{Spec}(R)$  dies ist.

**Beispiel 8.17**  $V(x, y) \cup V(z) \subseteq \text{Spec}(k[x, y, z])$  (die Vereinigung von  $z$ -Achse und  $x - y$ -Ebene) ist nicht äquidimensional. Jeder Integritätsring ist äquidimensional.

**Corollar 8.18** Sei  $A$  eine äquidimensionale, endlich erzeugte  $k$ -Algebra und seien  $f_1, \dots, f_m \in A$ . Ist  $V = V(f_1, \dots, f_m) \subseteq \text{Spec}(A)$  nicht leer, so gilt für jede irreduzible Komponente  $Z$

von  $V$

$$\dim Z \geq \dim A - m.$$

**Beweis** Durch die Betrachtung der irreduziblen Komponenten von  $\text{Spec}(A)$  (die von der Form  $\text{Spec}(A/\mathfrak{p})$  für ein minimales Primideal sind), genügt es, eine integrale endlich erzeugte  $k$ -Algebra  $A$  zu betrachten.

Beachte:  $V(f_1, \dots, f_m) \cap \text{Spec}(A/\mathfrak{p}) = V(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$ , wobei  $\bar{f}_i$  das Bild von  $f_i$  in  $A/\mathfrak{p}$  ist; jede irreduzible Komponente  $Z$  von  $V(f_1, \dots, f_m)$  ist in einer irreduziblen Komponente von  $\text{Spec}(A)$  enthalten.

Sei also  $A$  integer und  $\mathfrak{q}$  ein minimaler Primteiler von  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . Nach Satz 8.15 ist dann  $ht(\mathfrak{q}) \leq m$ , also mit 7.11

$$\dim(A/\mathfrak{q}) = \dim(A) - ht(\mathfrak{q}) \geq \dim(A) - m.$$

**Bemerkung 8.19** Dies folgt auch durch Induktion über  $m$  aus 8.11.

**Beispiel 8.20** Wir beweisen noch einmal, dass

$$\dim(k[x, y, z]/\langle x^2 + y^3, y^4 + z^5 \rangle) = 1$$

(vergleiche Beispiel 7.8 (a)). Wir hatten einen endlichen Ringhomomorphismus

$$\varphi : k[y] \rightarrow A = k[x, y, z]/\langle x^2 + y^3, y^4 + z^5 \rangle.$$

Hieraus folgt, ohne die Injektivität von  $\varphi$  zu prüfen

$$\dim A \leq \dim k[y] = 1$$

(Lemma 8.21 unten). Andererseits folgt aus 8.18

$$\dim A \geq 3 - 2 = 1,$$

zusammen also  $\dim A = 1$ .

**Lemma 8.21** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist  $\dim(B) \leq \dim(A)$ .

**Beweis** Sei  $A' = \text{im}(\varphi)$ . Dann ist  $A' \hookrightarrow B$  eine ganze Ringerweiterung, also  $\dim B = \dim A'$ . Andererseits ist  $A \twoheadrightarrow A'$  surjektiv, also  $A' \cong A/\mathfrak{a}$  für  $\mathfrak{a} = \ker(\varphi)$ . Dann ist

$$\text{Spec}(A') \cong \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \cong V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec}(A),$$

also  $\dim A' = \dim V(\mathfrak{a}) \leq \dim \text{Spec}(A) = \dim A$ .

Wir kommen nun zur Dimensionstheorie von noetherschen lokalen Ringen.

**Definition 8.22** Für einen noetherschen Ring  $R$  und einen endlich erzeugten  $R$ -Modul  $M$  sei  $\mu(M)$  die minimale Anzahl von Erzeugenden von  $M$ . Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ist  $\mu(\mathfrak{a})$  also die minimale Anzahl von Erzeugenden von  $\mathfrak{a}$  als Ideal.

**Satz 8.23** Sei  $A$  ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ , und sei  $\mathfrak{q} \subseteq A$  ein  $\mathfrak{m}$ -primäres Ideal, d.h. (da  $A$  noethersch ist), dass es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ . Dann ist  $\mu(\mathfrak{q}) \geq \dim A$ . Für  $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$  folgt mit  $k = A/\mathfrak{m}$

$$\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A.$$

Insbesondere ist  $\dim A$  endlich.

**Beweis:** Da  $\mathfrak{m}$  der einzige minimale Primteiler von  $\mathfrak{q}$  ist ( $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$  ist nilpotent in  $R/\mathfrak{q}$ ) gilt nach 8.15.

$$\mu(\mathfrak{q}) \geq ht(\mathfrak{m}) = \dim A$$

Die letzte Gleichheit gilt, da  $A$  lokaler Ring ist. Die Gleichheit  $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  folgt aus dem Nakayama-Lemma.

**Satz 8.24** Sei  $A$  ein noetherscher lokaler Ring der Dimension  $d$  mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ . Dann gibt es ein  $\mathfrak{m}$ -primäres Ideal in  $A$ , welches von  $d$  Elementen erzeugt wird.

**Beweis:** Wir konstruieren induktiv  $x_1, \dots, x_d$  so, dass  $ht(\mathfrak{q}) \geq i$  für das Primideal  $\mathfrak{q}$  welches  $\langle x_1, \dots, x_i \rangle$  enthält ( $1 \leq i \leq d$ ). Sei  $i > 0$  und seien  $x_1, \dots, x_{i-1}$  bereits konstruiert. Seien  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  diejenigen minimalen Primteiler von  $\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$  die *exakte* Höhe  $i-1$  haben. Wegen  $i-1 < d = \dim A = ht(\mathfrak{m})$  ist  $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_j$  für alle  $j = 1, \dots, s$ , also  $\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$  nach 8.13.

Sei  $x_i \in \mathfrak{m}$ ,  $x_i \notin \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}_j$ , und sei  $\mathfrak{q}$  ein Primideal, welches  $\langle x_1, \dots, x_i \rangle$  enthält. Dann enthält  $\mathfrak{q}$  einen minimalen Primteiler  $\mathfrak{p}$  von  $\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ .

1) Ist  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, s\}$ , so folgt  $ht(\mathfrak{q}) \geq ht(\mathfrak{p}_j) + 1 = i - 1 + 1 = i$ .

2) Ist  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$  für alle  $j = 1, \dots, s$ , so folgt  $ht(\mathfrak{p}) \geq i$ , also ebenfalls  $ht(\mathfrak{q}) \geq i$ .

Ist nun  $\langle x_1, \dots, x_d \rangle \subseteq \mathfrak{p}$  minimaler Primteiler, so erhalten wir  $ht(\mathfrak{p}) \geq d = ht(\mathfrak{m})$ , also  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ . Damit ist  $\mathfrak{m}/\langle x_1, \dots, x_d \rangle$  nilpotent im lokalen Ring  $R/\langle x_1, \dots, x_d \rangle$ , d.h.,  $\langle x_1, \dots, x_d \rangle$  ist  $\mathfrak{m}$ -primär.

**Corollar 8.25** Sei  $A$  ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $\delta(A) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Elemente } a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{m}, \text{ so dass } A/\langle a_1, \dots, a_n \rangle \text{ endliche Länge hat.}\}$ . Dann ist

$$\delta(A) = \dim A.$$

**Beweis** Nach 8.23 gilt  $\delta(A) \geq \dim(A)$  und die Gleichheit folgt aus 8.24.

**Bemerkung 8.26:** Ist  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ein Ideal, so gilt

$$\mathfrak{a} \text{ ist } \mathfrak{m} \text{ primär} \iff A/\mathfrak{a} \text{ hat endliche Länge} \iff A/\mathfrak{a} \text{ ist artinsch.}$$

**Corollar 8.27** Sei  $A$  ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und sei  $x \in \mathfrak{m}$  kein Nullteiler. Dann ist

$$\dim A/\langle x \rangle = \dim A - 1$$

**Beweis:** Offenbar ist  $\delta(A) \leq \delta(A/x) + 1$ . Andererseits sei  $\mathfrak{p}$  ein minimaler Primteiler von  $\langle x \rangle$ . Aus dem Hauptidealsatz folgt dann  $ht_A(\mathfrak{p}) = 1$ , also

$$\dim(A) \geq \dim A/\langle x \rangle + 1$$

Wegen 8.25 folgt die Behauptung.

## 9 Schemata

Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  liefert Hilberts Nullstellensatz eine enge Beziehung zwischen affinen  $k$ -Varietäten und endlich erzeugten  $k$ -Algebren. Genauer gibt es eine Kategorien-Antiäquivalenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{affine } k\text{-Varietäten} \\ \text{mit regulären Abbildungen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{reduzierte endlich erzeugte } k\text{-Algebren} \\ \text{mit } k\text{-Algebren-Homomorphismen} \end{array} \right\}$$

$$V = Z(f_1, \dots, f_m) \subseteq k^n \quad \longmapsto \quad \mathcal{O}(V) = k[X_1, \dots, X_n] / \sqrt{\langle f_1, \dots, f_m \rangle}$$

Auf beiden Seiten gibt es Dimensionstheorien, die sich unter der Äquivalenz entsprechen.

Die rechte Seite lässt sich auf beliebige Ringe erweitern, zum Beispiel nicht notwendig reduzierte  $k$ -Algebren, wobei  $k$  auch nicht algebraisch abgeschlossen sein muss, oder auf Ringe wie  $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ .

Die linke Seite lässt sich dagegen (für algebraisch abgeschlossenes  $k$ ) auf quasi-affine Varietäten oder (quasi-)projektive Varietäten wie  $\mathbb{P}^n(k)$  erweitern.

Alexander Grothendieck, der Begründer der modernen Algebraischen Geometrie, entwickelte die Theorie der Schemata, die alle diese Verallgemeinerungen einschließt! Dies geschieht durch die Betrachtung von topologischen Räumen und Garben von Ringen auf ihnen.

Wir benötigen einige neue Begriffe.

**Definition 9.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $F$  eine Prägarbe oder Garbe auf  $X$ , sowie  $x \in X$ .

- (a) Ein lokaler Schnitt von  $F$  bei  $x$  ist ein Element  $s \in F(U)$ , wobei  $U \subseteq X$  eine offene Umgebung von  $x$  ist.
- (b) Zwei lokale Schnitte  $s \in F(U)$  und  $t \in F(V)$  von  $F$  bei  $x$  heißen äquivalent (Bez.:  $s \sim_x t$ ), wenn es eine offene Umgebung  $W \subset U \cap V$  von  $x$  gibt mit  $s|_W = t|_W$ .
- (c) Für einen lokalen Schnitt  $s$  von  $F$  bei  $x$  heißt die Äquivalenzklasse von  $s$  bezüglich  $\sim_x$  der Keim von  $s$  bei  $x$  und wird mit  $s_x$  bezeichnet (Es gilt also  $s \sim_x t \Leftrightarrow s_x = t_x$ ).
- (d) Die Menge aller Äquivalenzklassen von lokalen Schnitten von  $F$  bei  $x$  heißt der Halm von  $F$  bei  $x$  (Bez.:  $F_x$ ).

Es ist also

$$F_x = \left( \coprod_{U \in \mathfrak{U}(x)} F(U) \right) / \sim_x,$$

wobei  $\mathfrak{U}(x)$  die Menge der offenen Umgebungen von  $x$  in  $X$  bezeichnet und  $\coprod$  die disjunkte Vereinigung.

Wir können diese Konstruktion noch etwas konzeptioneller deuten, durch sogenannte induktive Limiten (siehe Algebra II bzw. den Anhang 9.A).

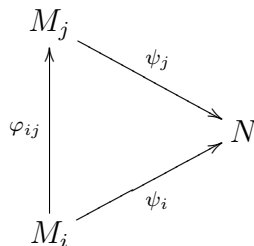
**Definition 9.2** (a) Eine (teil-)geordnete Menge  $I$  heißt gerichtet, wenn es zu je zwei Elementen  $i, j \in I$  ein  $k \in I$  gibt mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

(b) Ein induktives System von Mengen mit Indexmenge  $I$  ist eine Familie  $(M_i)_{i \in I}$  von Mengen zusammen mit einer Abbildung  $\varphi_{ij} : M_i \rightarrow M_j$  (genannt Übergangsabbildung) für jedes Paar  $(i, j)$  mit  $i \leq j$ , so dass  $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$  für  $i \leq j \leq k$ , und  $\varphi_{ii} = id_{M_i}$ .

(c) Eine Menge  $M$  zusammen mit Abbildungen  $\varphi_i^{univ} : M_i \rightarrow M$  mit  $\varphi_i^{univ} \circ \varphi_{ij} = \varphi_j^{univ}$  heißt induktiver (oder direkter) Limes des induktiven Systems  $(M_i, \varphi_{ij})$ , Bezeichnung

$$M = \lim_{\rightarrow i} M_i = \lim_{\rightarrow i, \varphi_i} M_i$$

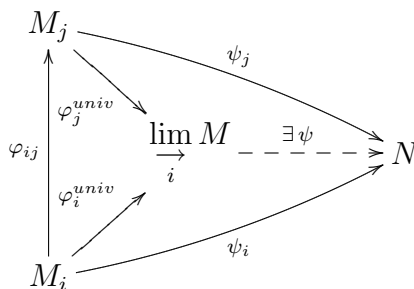
wenn die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist  $N$  eine Menge mit Abbildungen  $\psi_i : M_i \rightarrow N$ , die verträglich mit den Übergangsabbildungen  $\varphi_{ij}$  sind, so dass für alle  $i \leq j$  das Diagramm



kommutiert, so existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi : M \rightarrow N$$

mit  $\psi_i = \psi \circ \varphi_i^{univ}$  für alle  $i \in I$ , d.h., das folgende Diagramm kommutiert:



( $M$  ist “universell für kompatible Abbildungen aus dem induktiven System heraus”).

**Lemma 9.3** Der induktive Limes existiert und ist bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig.

**Beweis** Setze

$$M = \left( \coprod_{i \in I} M_i \right) / \sim$$

wobei für  $m_i \in M_i$  und  $m_j \in M_j$  gilt

$$m_i \sim m_j \Leftrightarrow \text{es existiert ein } k \in I \text{ mit } i, j \leq k \text{ und } \varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j) \text{ in } M_k.$$

Weiter definiere

$$\begin{aligned} \varphi_i^{univ} : M_i &\rightarrow M \\ m_i &\mapsto \text{Klasse von } m_i. \end{aligned}$$

Dann erfüllt  $M$  offenbar die gewünschten Eigenschaften. Wir bemerken noch, dass jedes Element in  $\lim_{\rightarrow i} M_i$  durch ein Element  $m \in M_i$  für ein  $i$  repräsentiert wird.

Ebenso definiert man induktive Systeme und Limiten von Gruppen, Ringen, Vektorräumen..., wobei alle Abbildungen nun Homomorphismen von Gruppen, Ringen, Vektorräumen... sein sollen. Satz 9.4 gilt dann entsprechend, mit derselben Konstruktion. Ist nämlich ein induktives System  $(G_i, \varphi_{ij})$  von Gruppen gegeben, so wird die im Beweis von 9.4 konstruierte Menge in natürlicher Weise eine Gruppe: Sind  $g, h \in \varinjlim G_i$ , repräsentiert durch  $g_i \in G_i$  und  $h_j \in G_j$ , so gibt es ein  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$  und wir definieren  $g \cdot h$  als das durch  $\varphi_{ik}(g_i) \cdot \varphi_{jk}(h_j) \in G_k$  repräsentierte Element. Man zeigt leicht, dass dies wohldefiniert ist. Der Fall von Ringen, Vektorräumen... ist analog.

Damit sehen wir:

**Corollar 9.4** Für eine (Prä-)Garbe  $P$  auf  $X$  und  $x \in X$  ist der Halm

$$P_x = \varinjlim_{x \in U} P(U).$$

Hierbei durchläuft  $U$  die Menge  $\mathfrak{U}(x)$  aller offenen Umgebungen von  $x$ , und wir führen auf diesen die folgende (Teil-)Ordnung ein:

$$U \leq V \quad \Leftrightarrow \quad U \supseteq V.$$

Weiter sind die Übergangsabbildung die Restriktionen  $P(U) \rightarrow P(V)$  für  $V \subseteq U$ .

**Lemma 9.5** Sind  $s, t \in \mathcal{F}(U)$ , so gilt  $s = t$  genau dann, wenn  $s_x = t_x$  für alle  $x \in U$ .

**Beweis** Übungsaufgabe!

**Definition 9.6** Ein geringter Raum ist ein Paar  $(X, \mathcal{O}_X)$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{O}_X$  eine Garbe von Ringen auf  $X$  ist.  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt lokal geringter Raum, wenn die Halme  $\mathcal{O}_{X,x}$  für alle  $x \in X$  lokale Ringe sind.

**Beispiele 9.7** (a) Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $V$  eine quasi-projektive Varietät über  $k$ . Sei  $\mathcal{O}$  die Garbe der regulären Funktionen auf  $V$  ( $\mathcal{O}(U) =$  Ring der regulären Funktionen auf  $U$  für  $U \subseteq V$  offen). Dann ist  $(V, \mathcal{O})$  ein lokal geringter Raum (Beweis: selbst).

(b) Sei  $\mathcal{O}^{hol}$  die Garbe der holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$  ( $\mathcal{O}^{hol}(U) =$  Ring der holomorphen Funktionen auf  $U$  für  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen). Dann ist  $(\mathbb{C}, \mathcal{O}^{hol})$  ein lokal geringter Raum: Sei  $x \in \mathbb{C}$  und  $\mathcal{O}_x^{hol}$  der Halm von  $\mathcal{O}^{hol}$  bei  $x$ . Für einen lokalen Schnitt  $s$  von  $\mathcal{O}^{hol}$  bei  $x$  (also eine holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $x$ ) hängt  $s(x) \in \mathbb{C}$  offenbar nur vom Keim  $s_x$  von  $s$  ab (für  $t \sim_x s$  ist insbesondere  $t(x) = s(x)$ ). Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathcal{O}_x^{hol} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s_x &\mapsto s_x(x) := s(x) \text{ für } s \in s_x \end{aligned}$$

ist also wohldefiniert. Weiter ist  $\varphi_x$  offenbar ein Ringhomomorphismus. Wir behaupten, dass  $\mathcal{O}_x^{hol}$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_x = \ker(\varphi_x)$  ist. Hierzu ist zu zeigen, dass  $\mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x$  die Menge der Einheiten von  $\mathcal{O}_{X,x}$  ist. Ist  $s_x$  eine Einheit, so muss offenbar  $s_x(x) \neq 0$  sein. Sei umgekehrt  $s_x(x) \neq 0$  und  $s \in s_x$ . Dann ist also  $s$  eine holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $x$ , mit  $s(x) \neq 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $s$

gibt es eine offene Umgebung  $V \subseteq U$  von  $x$  mit  $s(y) \neq 0$  für alle  $y \in V$ . Dann ist  $t = \frac{1}{s}$  eine holomorphe Funktion auf  $V$ , also ein lokaler Schnitt von  $\mathcal{O}^{hol}$  bei  $x$ , und es gilt  $t \cdot s = 1$ , also  $t_x \cdot s_x = 1$ , d.h.,  $s_x$  ist eine Einheit.

**Lemma 9.8** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $P$  ein Prägarbe von abelschen Gruppen auf  $X$ . Dann ist  $P$  genau dann eine Garbe, wenn für alle offenen Mengen  $U \subseteq X$  und alle offenen Überdeckungen  $(U_i)_{i \in I}$  von  $U$  die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P(U) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{i \in I} P(U_i) & \xrightarrow{\beta} & \prod_{(i,j) \in I^2} P(U_i \cap U_j) \\ & & s & \mapsto & (s|_{U_i})_{i \in I} & & \\ & & & & (s_i)_i & \mapsto & (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \end{array}$$

exakt ist.

**Beweis** Die Injektivität von  $\alpha$  ist gerade die Garbenbedingung (i), und die Garbenbedingung (ii) ist gerade die Exaktheit  $im(\alpha) = \ker(\beta)$ .

**Lemma 9.9** Sei  $A$  ein Ring und  $f \in A$ . Dann ist  $D(f)$  quasi-kompakt.

**Beweis** Wegen der Homöomorphie  $D(f) \cong \text{Spec}(A_f)$  genügt es, den Fall  $\text{Spec}(A) = D(1)$  zu betrachten. Sei also  $(U_i)_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $\text{Spec}(A)$ . Da die Standard-offenen Mengen  $D(f)$  eine Basis der Topologie bilden, können wir (durch Verfeinerung) annehmen, dass  $U_i = D(f_i)$  für ein  $i \in I$ . Wegen

$$\text{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

gilt dann (durch Komplementbildung)

$$\emptyset = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V(\langle f_i \mid i \in I \rangle).$$

Dies bedeutet nach Corollar 5.22  $1 \in \sqrt{\langle f_i \mid i \in I \rangle}$  und damit

$$1 \in \langle f_i \mid i \in I \rangle.$$

Es gilt also

$$1 = \sum_{\nu=1}^n r_\nu f_{i_\nu}$$

mit  $r_\nu \in R$  und  $i_\nu \in I$ . Hieraus folgt umgekehrt

$$\text{Spec}(A) = \bigcup_{\nu=1}^n D(f_{i_\nu}).$$

**Lemma 9.10** Seien  $f, g \in A$  mit  $D(g) \subseteq D(f)$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus  $A_f \rightarrow A_g$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \swarrow & \searrow \\ A_f & \longrightarrow & A_g \end{array}$$

kommutativ macht.

**Beweis:** Wir haben nur zu zeigen, dass  $f$  in  $A_g$  invertierbar ist; dann folgt die Behauptung aus der universellen Eigenschaft der Lokalisierung  $A_f$ . Es gilt aber

$$\begin{aligned} D(g) &\subseteq D(f) \\ \Leftrightarrow V(f) &\subseteq V(g) \quad (\text{Komplementbildung}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{\langle g \rangle} &\subseteq \sqrt{\langle f \rangle} \quad (\text{Corollar 5.22 (a)}) \\ \Leftrightarrow g^n &\in \langle f \rangle \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow g^n &= rf \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } r \in A \\ \Leftrightarrow f &\text{ invertierbar in } A_g \end{aligned}$$

(wobei die letzten drei Äquivalenzen elementar sind).

**Satz 9.11** Sei  $A$  ein Ring (kommutativ, mit Eins) und  $X = \text{Spec}(A)$  mit der Zariski-Topologie. Dann gibt es eine kanonische Garbe von Ringen  $\mathcal{O}_X$  auf  $X$  mit den folgenden Eigenschaften:

(a): Es gibt einen kanonischen Ringisomorphismus

$$\psi : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X).$$

(b) Für jedes  $f \in A$  wird  $\psi(f) \in \mathcal{O}_X(X)$  unter der Restriktion

$$\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$$

auf eine Einheit in  $\mathcal{O}_X(D(f))$  abgebildet, und der induzierte Ringhomomorphismus

$$A_f \rightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$$

ist ein Isomorphismus.

(c) Für jedes  $\mathfrak{p} \in X = \text{Spec}(A)$  induziert  $\psi$  ein kommutatives Diagramm von Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\sim]{\psi} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow[\sim]{\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{array},$$

wobei die vertikalen Abbildungen die kanonischen Homomorphismen sind und  $\psi_{\mathfrak{p}}$  ein Isomorphismus.

**Beweis:** Für diesen wichtigen Satz gibt es (mindestens) 2 Beweise.

**1. Beweis:** Die Standard-offenen Mengen  $D(f)$  bilden eine Basis  $\mathcal{B}$  der Topologie von  $X = \text{Spec}(A)$ ; dabei ist  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$  wieder in  $\mathcal{B}$ . Man zeigt nun

(i) Definiere  $\mathcal{O}(D(f)) := A_f$  und  $res_{D(f),D(g)} : \mathcal{O}(D(f)) \rightarrow \mathcal{O}(D(g))$  als die kanonische Abbildung  $A_f \rightarrow A_g$  für  $D(g) \subseteq D(f)$  (Lemma 9.10). Dann ist  $\mathcal{O}$  ein  $\mathcal{B}$ -Garbe, d.h., erfüllt die Garbenbedingungen, wobei man nur die offenen Mengen aus  $\mathcal{B}$  betrachtet.

(ii) Jede  $\mathcal{B}$ -Garbe lässt sich in eindeutiger Weise zu einer Garbe  $\tilde{\mathcal{O}}$  auf  $X$  fortsetzen. Diese Garbe  $\tilde{\mathcal{O}}$  ist bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig, und man setzt  $\mathcal{O}_X = \tilde{\mathcal{O}}$ .

**2. Beweis:** Definiere die Garbe  $\mathcal{O}_X$  explizit wie folgt: Für  $U \subseteq X = \text{Spec}(A)$  offen setze

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ a : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in A} A_{\mathfrak{p}} \mid \text{für alle } \mathfrak{q} \in U \text{ gilt: } a(\mathfrak{q}) \in A_{\mathfrak{q}} \text{ und es existiert eine offene Umgebung } D(f) \subseteq U \text{ von } \mathfrak{q} \text{ und ein } \frac{b}{f^n} \in A_f \text{ mit } a(\mathfrak{p}) = \frac{b}{f^n} \in A_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in D(f) \right\}.$$

Dies ist wohldefiniert, weil man für  $\mathfrak{p} \in D(f)$ , also  $f \notin \mathfrak{p}$  einen wohldefinierten Ringhomomorphismus wie folgt hat:

$$\begin{aligned} A_f &\rightarrow A_{\mathfrak{p}} \\ \frac{b}{f^n} &\mapsto \frac{b}{f^n}. \end{aligned}$$

Für  $V \subseteq U$  offen definiere die Restriktion

$$\text{res}_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V) \text{ durch } a \mapsto a|_V.$$

Man sieht nun sofort an der "lokalen" Definition von  $\mathcal{O}_X(U)$ , dass man eine Ringgarbe auf  $X$  erhält.

Es bleibt, die Eigenschaften (a), (b), (c) aus Satz 9.11 zu zeigen. Nach Definition hat man kanonische Ringhomomorphismen

$$\begin{aligned} \psi_f : A_f &\rightarrow \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \frac{b}{f^n} &\mapsto a \text{ mit } a(\mathfrak{p}) = \frac{b}{f^n} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in D(f). \end{aligned}$$

Dabei ist für  $D(g) \subseteq D(f)$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_f & \xrightarrow{\psi_f} & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \text{9.11} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{D(f),D(g)} \\ A_g & \xrightarrow{\psi_g} & \mathcal{O}_X(D(g)) \end{array}$$

kommutativ. Insbesondere erhält man

$$\psi = \psi_1 : A \rightarrow \mathcal{O}_X(X).$$

Für (a) und (b) ist also nur noch zu zeigen, dass alle  $\psi_f$  Isomorphismen sind.

**Injektivität** von  $\psi_f$ : Wir haben Ringhomomorphismen

$$\begin{aligned} A_f &\xrightarrow{\psi_f} \mathcal{O}_X(D(f)) \xrightarrow{\rho_f} \prod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}}, \\ a &\longmapsto (a(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in D(f)} \end{aligned}$$

wobei die Abbildung  $\rho_f$  nach Definition injektiv ist. Die Komposition ist die Abbildung

$$\begin{aligned} A_f &\rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}} \\ \frac{a}{f^n} &\mapsto \left( \frac{a}{f^n} \right)_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Wegen der Isomorphie  $A_{\mathfrak{p}} \cong (A_f)_{\mathfrak{p}_f}$  für  $\mathfrak{p} \in D(f)$  und der Homöomorphie  $D(f) \cong \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$  genügt es, das folgende Lemma auf den Ring  $A_f$  anzuwenden.

**Lemma 9.12** Sei  $M$  ein  $A$ -Modul und  $m \in M$  ein Element mit Bild 0 in allen  $M_{\mathfrak{p}}$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ . Dann ist  $m = 0$ .

**Beweis:** Sei  $\mathfrak{a} := \{a \in A \mid a \cdot m = 0\}$  der Annihilator von  $m$  in  $A$ ; dies ist ein Ideal. Angenommen,  $\mathfrak{a} \neq A$ . Dann gibt es ein Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $A$  mit  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ . Andererseits ist  $\frac{m}{1} = 0$  in  $M_{\mathfrak{p}}$ ; es gibt also ein  $f \notin \mathfrak{p}$  mit  $fm = 0$ . Also  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$  -Widerspruch. Also ist  $\mathfrak{a} = A$ , d.h.,  $m = 0$  ( $1 \in \mathfrak{a}$ ).

**Surjektivität** von  $\psi_f$ . Sei  $s \in \mathcal{O}(D(f))$ . Nach Definition gibt es eine Überdeckung  $(D(f_i))$  von  $D(f)$  durch offene Standardmengen und Elemente.  $\frac{b_i}{f_i^{m_i}} \in A_{f_i}$  mit

$$s(\mathfrak{p}) = \frac{b_i}{f_i^{m_i}} \in A_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p} \in D(f_i)$$

für alle  $i$ . Wegen der Quasikompaktheit von  $D(f) \cong \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$  (Lemma 9.9) ist ohne Einschränkung die Überdeckung endlich, etwa  $D(f_1), \dots, D(f_n)$ . O.E. sind dann alle  $m_i$  gleich, gleich  $m$  (Erweitern), und  $f_i$  Vielfaches von  $f$  ( $D(f_i) = D(f_i) \cap D(f) = D(f_i f)$ ). Nach dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \frac{b_i f_j^m}{(f_i f_j)^m} & A_{f_i f_j} \hookrightarrow & \mathcal{O}(D(f_i f_j)) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \text{res} \\ \frac{b_i}{f_i^m} & A_{f_i} \hookrightarrow & \mathcal{O}(D(f_i)) \end{array}$$

gilt

$$\frac{b_i f_j^m}{(f_i f_j)^m} = \frac{b_j f_i^m}{(f_i f_j)^m} \quad \text{in } A_{f_i f_j} \quad \text{für alle } i, j$$

Es folgt

$$(9.1) \quad (f_i f_j)^N (b_i f_j^m - b_j f_i^m) = 0 \quad \text{in } A$$

für ein  $N \gg 0$  und alle  $i, j$ .

Wegen  $(D(f) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i^{N+m}))$  gilt  $V(f) = \bigcap_{i=1}^n V(f_i^{N+m}) = V(f_1^{N+m}, \dots, f_n^{N+m})$ , also  $f \in \sqrt{(f_1^{N+m}, \dots, f_n^{N+m})}$ . Es gibt also  $l \in \mathbb{N}$  und  $c_i \in A$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit

$$f^l = \sum_{i=1}^n c_i f_i^{N+m}.$$

Setze  $b = \sum_{i=1}^n c_i b_i f_i^N$ . Dann ist

$$f_j^{N+m} b = \sum_{i=1}^n f_j^{N+m} c_i b_i f_i^N \stackrel{(9.1)}{=} \sum_{i=1}^n f_i^{N+m} c_i b_j f_j^N = f^l b_j f_j^N$$

für alle  $j$ , d.h.,

$$\frac{b}{f^\ell} = \frac{b_j}{f_j^m} \quad \text{in } A_{f_j} \quad \text{für alle } j$$

(Beachte: Wegen  $D(f_j) \subseteq D(f)$  ist  $D(f_j) = D(ff_j)$  und damit  $f$  invertierbar in  $A_{f_j}$ ). Es ist also

$$\frac{b}{f^\ell} = s(\mathfrak{p}) \quad \text{in } A_{\mathfrak{p}}$$

für alle  $\mathfrak{p} \in D(f)$ . Dies zeigt die Surjektivität.

(c): Wir definieren zunächst eine Abbildung

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} & \rightarrow & A_{\mathfrak{p}} \\ s_{\mathfrak{p}} & \mapsto & s(\mathfrak{p}), \end{array}$$

wobei  $s$  ein lokaler Schnitt von  $\mathcal{O}_X$  bei  $\mathfrak{p}$  ist. Die Abbildung ist offenbar wohldefiniert und ein Ringhomomorphismus. Wir zeigen die Bijektivität.

*Surjektivität:* Sei  $\alpha = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$ , mit  $a \in A$  und  $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ . Dann ist  $\mathfrak{p} \in D(f)$ ,  $\frac{a}{f} \in A_f$ , und der zugehörige Schnitt  $s$  in  $\mathcal{O}_X(D(f))$  ein lokaler Schnitt bei  $\mathfrak{p}$  mit  $s(\mathfrak{p}) = \alpha$ .

*Injektivität:* Sei  $s \in \mathcal{O}_X(U)$  ein lokaler Schnitt von  $\mathcal{O}_X$  bei  $\mathfrak{p}$  mit  $s(\mathfrak{p}) = 0$  in  $A_{\mathfrak{p}}$ . Dann existiert eine offene Standardumgebung  $D(f) \subseteq U$  von  $\mathfrak{p}$  und ein Element  $\frac{b}{f^n} \in A_f$  mit

$$\frac{b}{f^n} = s(\mathfrak{q}) \in A_{\mathfrak{q}} \quad \text{für alle } \mathfrak{q} \in D(f).$$

Für  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$  ist  $\frac{b}{f^n} = 0$  in  $A_{\mathfrak{p}}$ ; es existiert also ein  $g \in A \setminus \mathfrak{p}$  mit  $gb = 0$  in  $A$ . Dann ist  $D(g)$  eine offene Umgebung von  $\mathfrak{p}$  und

$$\frac{b}{f^n} = \frac{g^n b}{(gf)^n} = 0 \quad \text{in } A_{\mathfrak{q}}$$

für alle  $\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(g) = D(fg)$ . Also ist  $s|_{D(fg)} = 0$  und damit  $s_{\mathfrak{p}} = 0$ .

Daher ist  $\varphi_{\mathfrak{p}}$  ein Isomorphismus, und nach dem Beweis der Surjektivität ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$\psi_{\mathfrak{p}} : \begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \\ \frac{a}{f} & \mapsto & s_{\mathfrak{p}}, \end{array}$$

wobei  $s = \psi_f\left(\frac{a}{f}\right) \in \mathcal{O}_X(D(f))$  der durch  $\frac{a}{f} \in A_f$  gegebene Schnitt von  $\mathcal{O}_X$  bei  $\mathfrak{p}$  ist. Es ist klar, dass  $\psi_{\mathfrak{p}}$  das in (c) behauptete Diagramm kommutativ macht, und (c) ist bewiesen.

Wir definieren nun Morphismen von (lokal) geringten Räumen. Zunächst einige Vorbereitungen.

**Definition 9.13** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $F$  und  $G$  Prägarben von Mengen (bzw. abelschen Gruppen, bzw. Ringen, ...) auf  $X$ .

(a) Ein Morphismus von Prägarben von Mengen (bzw. abelschen Gruppen, bzw. Ringen, ...) ist eine Familie  $(\varphi_U)$  von Abbildungen (bzw. Homomorphismen, von Gruppen, bzw. von Ringen,...)

$$\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$$

für alle offenen Teilmengen  $U \subseteq X$  derart, dass für  $V \subseteq U$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & G(U) \\ \text{res}_{U,V} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{U,V} \\ F(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & G(V) \end{array}$$

kommutativ ist. Sei  $\text{Hom}_X(F, G)$  die Menge der Morphismen  $\varphi : F \rightarrow G$  von Prägarben.

(b) Ist  $\varphi' : G \rightarrow H$  ein weiterer Morphismus von Garben von Mengen (bzw. abelschen Gruppen, bzw. ...), so wird die Verknüpfung  $\varphi' \circ \varphi : F \rightarrow H$  definiert durch

$$(\varphi' \circ \varphi)_U = \varphi'_U \circ \varphi_U : F(U) \rightarrow G(U) \rightarrow H(U).$$

(c) Für Garben werden Morphismen von Garben und Verknüpfungen derselben genauso definiert.

**Bemerkung 9.14** Es ist klar, dass  $\varphi' \circ \varphi$  wieder ein Morphismus von Prägarben bzw. Garben ist. Damit bilden die Prägarben von Mengen auf  $X$  eine Kategorie; für jede Prägarbe  $F$  auf  $X$  ist die Injektivität gegeben durch die Familie  $(id_{F(U)})$  der Identitäten. Die Garben von Mengen bilden eine volle Unterkategorie (jede Garbe ist eine Prägarbe; die Morphismen sind dieselben). Entsprechendes gilt für Prägarben/Garben von abelschen Gruppen, Ringen, ... usw.

**Definition 9.15** Isomorphismen, Monomorphismen und Epimorphismen von Prägarben bzw. Garben werden im Sinne der Kategorientheorie definiert (siehe 9.A.3). Insbesondere ist ein Morphismus von Prägarben von Mengen auf  $X$ ,  $\varphi : F \rightarrow G$ , ein Isomorphismus, wenn es einen Prägarben-Morphismus  $\psi : G \rightarrow F$  gibt mit  $\psi \circ \varphi = id_F$  und  $\varphi \circ \psi = id_G$ . Das Gleiche gilt für Garben von (abelschen) Gruppen, Moduln, Ringen, usw.

Wir wollen nun Morphismen zwischen (lokal) geringten Räumen  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  definieren. Da  $\mathcal{O}_X$  und  $\mathcal{O}_Y$  Garben auf verschiedenen Räumen sind, sind die obigen Begriffe nicht unmittelbar anwendbar; wir müssen noch eine Verbindung herstellen.

**Lemma/Definition 9.16** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von topologischen Räumen und  $F$  eine Prägarbe von Mengen (oder abelschen Gruppen, oder Ringen, ...) auf  $X$ .

(a) Definiere die Prägarbe  $f_*F$  auf  $Y$  durch

$$(f_*F)(V) = F(f^{-1}(V)) \quad \text{für alle } V \subseteq Y \text{ offen}$$

und die Restriktionen

$$F(f^{-1}(V)) \rightarrow F(f^{-1}(V')) \quad \text{für } V' \subseteq V,$$

die zur Inklusion  $f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V)$  gehörige Restriktion für  $F$ . Dann heißt  $f_*F$  das direkte Bild von  $F$  unter  $f$ .

(b) Ist  $F$  eine Garbe, so auch  $f_*F$ .

(c) Ist  $\varphi : F \rightarrow G$  ein Morphismus von Prägarben (bzw. Garben) auf  $X$ , so erhält man einen Morphismus von Prägarben (bzw. Garben) auf  $Y$

$$f_*(\varphi) : f_*F \rightarrow f_*G$$

durch

$$f_*(\varphi)_V = \varphi_{f^{-1}(V)} : (f_*F)(V) = F(f^{-1}(V)) \rightarrow G(f^{-1}(V)) = (f_*G)(V).$$

Ist  $\psi : G \rightarrow H$  ein weiterer Morphismus von Prägarben (bzw. Garben), so gilt

$$f_*(\psi \circ \varphi) = f_*(\psi) \circ f_*(\varphi) : f_*(F) \rightarrow f_*(H).$$

Weiter gilt

$$f_*(id_F) = id_{f_*F}.$$

**Beweis** der Behauptungen: (a) Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist  $f^{-1}(V)$  offen für offenes  $V \subseteq Y$ . Also ist  $F(f^{-1}(V))$  definiert, und damit auch die Restriktion für  $V' \subset V$  offen. Die Prägarben-Eigenschaften sind klar.

(b), (c): Übungsaufgabe!

**Bemerkung 9.17** Die Aussagen in 9.16 (c) bedeuten, dass wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} f_* : \left( \begin{array}{c} \text{Prägarben von} \\ \text{Mengen auf } X \end{array} \right) & \rightarrow & \left( \begin{array}{c} \text{Prägarben von} \\ \text{Mengen auf } Y \end{array} \right) \\ F & \mapsto & f_*F \\ \varphi : F \rightarrow G & \mapsto & f_*(\varphi) : f_*F \rightarrow f_*G \end{array}$$

erhalten. Dies gilt entsprechend, wenn man Prägarben durch Garben ersetzt, oder Mengen durch abelsche Gruppen,  $R$ -Moduln, Ringe, usw.

**Lemma/Definition 9.18** (a) Ein **Morphismus**  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  **von geringten Räumen** ist ein Paar  $(f, f^\#)$  bestehend aus einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und einer Abbildung von Ringgarben  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ .

(b) Für einen weiteren Morphismus  $(g, g^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  wird die Komposition  $(g, g^\#) \circ (f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$  definiert durch die stetige Abbildung

$$h = g \circ f : X \rightarrow Z$$

und den Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^\#)} g_*f_*\mathcal{O}_X = h_*\mathcal{O}_X$$

d.h., durch die Kompositionen

$$\mathcal{O}_Z(W) \xrightarrow{g^\#} \mathcal{O}_Y(g^{-1}(W)) \xrightarrow{f^\#} \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(W)) = \mathcal{O}_X(h^{-1}(W))$$

für  $W \subseteq Z$  offen.

(c) Für  $x \in X$  und  $y = f(x) \in Y$  induziert  $(f, f^\#)$  einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

vermöge

$$s_y \mapsto (f^\#(s))_x$$

für einen lokalen Schnitt  $s$  von  $\mathcal{O}_Y$  bei  $y$ .

(d) Sind  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokal geringte Räume, so heißt  $(f, f^\#)$  ein **Morphismus lokal geringter** Räume, wenn für alle  $x \in X$  und  $y = f(x) \in Y$  der Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

ein Homomorphismus von lokalen Ringen ist:

Dazu definieren wir

**Definition 9.19** Seien  $A, B$  lokale Ringe mit maximalen Idealen  $\mathfrak{m}_A \subseteq A$  und  $\mathfrak{m}_B \subseteq B$ . Ein Ringhomomorphismus

$$\varphi : A \rightarrow B$$

heißt Homomorphismus von lokalen Ringen, wenn

$$\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B .$$

$$(\Leftrightarrow \mathfrak{m}_A = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B)).$$

**Beispiel 9.20** Sei  $p$  eine Primzahl und  $\mathbb{Z}_{(p)}$  die Lokalisierung von  $\mathbb{Z}$  nach dem Primideal  $(p)$  (dies ist ein lokaler Ring, siehe Satz 5.18). Dann ist die Inklusion

$$\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q}$$

kein Homomorphismus lokaler Ringe.

**Beweis** der Behauptung in 9.18 (c): Es ist nur die Wohldefiniertheit zu zeigen: Ist  $t$  ein anderer lokaler Schnitt von  $\mathcal{O}_Y$  bei  $y$  und  $U_0$  offene Umgebung von  $y$  in  $Y$  mit  $s|_{U_0} = t|_{U_0}$ , so sind die Schnitte  $f^\#(s|_{U_0}), f^\#(t|_{U_0}) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_0))$  ebenfalls gleich, und haben daher dieselben Keime bei  $x$ .

Wir definieren nun die Kategorie der Schemata.

**Definition 9.21** (a) Ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt affines Schema, wenn es einen Ring  $A$  gibt mit einem Isomorphismus  $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$  von lokal geringten Räumen.

(b) Ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt Schema, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  gibt, so dass alle  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  affine Schemata sind (Hierbei ist  $\mathcal{O}_X|_{U_i}$  die Einschränkung von  $\mathcal{O}_X$  auf  $U_i$ ; dies ist offenbar wieder eine Ringgarbe, mit  $(\mathcal{O}_X|_{U_i})_x = \mathcal{O}_{X,x}$  für alle  $x \in U_i$ ).

(c) Morphismen von Schemata sind Morphismen von lokal geringten Räumen.

(d) Für ein Schema  $X$  und ein  $x \in X$  heißt  $\mathcal{O}_{X,x}$  der lokale Ring bei  $x$ , das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$  das maximale Ideal bei  $x$  und  $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  der Restklassenkörper von  $x$ .

Wir unterdrücken oft die Strukturgarben in den Bezeichnungen, schreiben also  $X$  für ein Schema und  $f : X \rightarrow Y$  für einen Morphismus von Schemata.

**Bemerkung 9.22** Für das affine Schema  $X = \text{Spec } A$  und  $X \ni x \leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq A$  gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{X,x} &= A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{m}_x &= \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \\ k(x) &= A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \text{Quot}(A/\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

## 9.A Kategorien, Limiten und Funktoren

Die Sprache der Kategorien und Funktoren ist unabdingbar für viele Aussagen in der heutigen Mathematik. Sie ist formal und weniger als Selbstzweck anzusehen, sondern eher als ein nützliches Mittel zum Formulieren und Einordnen von mathematischen Resultaten.

Wir diskutieren im Folgenden keine mengentheoretischen Fragen wie das Problem der ‘Menge aller Mengen’. Wir sprechen von Klassen, wenn wir ‘Mengen höherer Stufe’ behandeln; ein formaler Rahmen wurde durch die sogenannten ‘Universen’ nach Bourbaki geliefert. Bei der Bildung der ‘Klasse aller Mengen’, die selbst keine Menge (derselben Stufe) ist, wird also die obige Russell’sche Antinomie vermieden.

**Definition 9.A.1** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  besteht aus

- (i) einer Klasse  $ob(\mathcal{C})$  von Objekten,
- (ii) einer Menge  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  für je zwei Objekte  $A, B$ , deren Elemente **Pfeile** oder **Morphismen** von  $A$  nach  $B$  genannt werden,
- (iii) sowie einer Verknüpfung für alle Objekte  $A, B, C$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) &\rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \quad (\text{oder } gf). \end{aligned}$$

Dabei soll gelten

- (a) Zu jedem  $A \in ob(\mathcal{C})$  gibt es ein Element  $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$  (genannt **Identität** von  $A$ ) mit

$$f1_A = f = 1_B f$$

für  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

- (b) (Assoziativität) Für  $f, g$  wie oben und  $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$  gilt

$$h(gf) = (hg)f$$

in  $Hom_{\mathcal{C}}(A, D)$ .

Dies ist der üblichen Situation von Hom-Mengen nachempfunden. Tatsächlich bekommen wir so die meisten Beispiele:

**Beispiele 9.A.2** (a) Die Kategorie Sets aller Mengen wird definiert durch

$$\begin{aligned} ob(\underline{Sets}) &= \text{Klasse aller Mengen} \\ Hom_{\underline{Sets}}(A, B) &= \text{Menge aller Abbildungen } f : A \rightarrow B. \end{aligned}$$

Die Verknüpfung ist die übliche Komposition von Abbildungen, und  $1_A \in Hom_{\underline{Sets}}(A, A)$  ist die Identität  $id_A : A \rightarrow A$ .

(b) Entsprechend werden viele Kategorien gebildet, indem man Mengen mit einer Zusatzstruktur betrachtet, und Abbildungen, die mit diesen Zusatzstrukturen verträglich sind:

(1) Kategorie Gr der Gruppen: Objekte: Gruppen,  $Hom_{\underline{Gr}}(G, H) =$  Menge der Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $H$ , Verknüpfung: Komposition.

(2) Kategorie Mod<sub>R</sub> der Moduln über einem Ring: Morphismen= $R$ -Modulhomomorphismen, Verknüpfung=Komposition.

(3) Kategorie Top der topologischen Räume, Morphismen =stetige Abbildungen, mit der Komposition als Verknüpfung.

(4) Kategorie der topologischen Gruppen: Morphismen=stetige Gruppenhomomorphismen, mit der Komposition als Verknüpfung.

(c) Es gibt aber auch andere Kategorien. Sei  $(I, \leq)$  eine geordnete Menge. Definiere die Kategorie  $\underline{I}$  durch  $ob(\underline{I}) = I$  (die Objekte sind also die *Elemente* von  $I$ !),

$$Hom_{\underline{I}}(i, j) = \begin{cases} \{*\} & , \quad i \leq j, \\ \emptyset & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(Im ersten Fall besteht die Morphismenmenge also aus genau einem Element, das wir mit  $*$  bezeichnen). Die Verknüpfung ist die einzig mögliche: der einzige Fall, wo beide Mengen nicht leer sind, ist

$$\text{Hom}_{\underline{I}}(j, k) \times \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{I}}(i, k)$$

für  $i \leq j \leq k$ , wo  $(*, *)$  auf  $*$  abgebildet wird.

(d) Die kleinste Kategorie der Welt:  $\mathcal{C}_0 : \mathcal{C}_0$  hat nur ein Objekt  $*$  und es ist  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_0}(*, *) = \{id_*\}$ .

(e) Sei  $G$  eine Gruppe. Definiere die Kategorie  $\underline{G}$  wie folgt:  $\underline{G}$  hat nur ein Objekt  $*$  und es ist  $\text{Hom}_{\underline{G}}(*, *) = G$  mit der Verknüpfung  $G \times G \rightarrow G$ , die durch das Gruppengesetz gegeben ist.

Einen Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  schreibt man auch als Pfeil  $f : A \rightarrow B$ ; weiter heißt  $A$  die Quelle und  $B$  das Ziel von  $f$ .

**Definition 9.A.3** Ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt

(a) **Monomorphismus**, wenn für alle Objekte  $X$  in  $\mathcal{C}$  und alle Morphismen  $g_1, g_2 : X \rightarrow A$  gilt

$$fg_1 = fg_2 \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2$$

(d.h.,  $f$  ist links kürzbar),

(b) **Epimorphismus**, wenn für alle Objekte  $X$  in  $\mathcal{C}$  und alle Morphismen  $h_1, h_2 : B \rightarrow X$  gilt

$$h_1f = h_2f \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_2$$

(d.h.,  $f$  ist rechts kürzbar), und

(c) **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus  $g : B \rightarrow A$  in  $\mathcal{C}$  gibt mit

$$gf = 1_A \quad \text{und} \quad fg = 1_B$$

(Das  $g$  ist dann eindeutig bestimmt und heißt das Inverse von  $f$ ).

**Bemerkungen 9.A.4** (a) Sei  $f : A \rightarrow B$  ein Morphismus in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Für alle Objekte  $X$  in  $\mathcal{C}$  induziert  $f$  eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \\ g & \mapsto & fg \end{array}$$

und eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ h & \mapsto & hf. \end{array}$$

(b) Offenbar ist  $f$  genau dann Monomorphismus, wenn  $f_*$  injektiv ist für alle  $X$ , und Epimorphismus, wenn  $f^*$  injektiv (!) für alle  $X$  ist.

**Beispiele 9.A.5** (a) In den Kategorien  $\underline{Sets}$ ,  $\underline{Gr}$ ,  $\underline{Mod}_R$  sind Morphismen genau dann Monomorphismen (bzw. Epimorphismen), wenn sie injektiv (bzw. surjektiv) sind, und genau dann Isomorphismen, wenn sie Monomorphismen und Epimorphismen sind.

(b) In  $\underline{Top}$  ist eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann Monomorphismus, wenn sie injektiv ist und genau dann Epimorphismus, wenn sie dichtes Bild hat. Eine bijektive stetige Abbildung ist kein Isomorphismus; Isomorphismen sind per Definition die Homöomorphismen.

(c) Für eine geordnete Menge  $(I, \leq)$  ist in der Kategorie  $\underline{I}$  aus Beispiel 9.A.2 (c) jeder Morphismus Monomorphismus und Epimorphismus, aber die einzigen Isomorphismen sind die Identitäten.

**Definition 9.A.6** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Dann ist die **duale Kategorie**  $\mathcal{C}^{op}$  durch ‘Umdrehen der Pfeile’ definiert:  $ob(\mathcal{C}^{op}) = ob(\mathcal{C})$  und  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  mit den von  $\mathcal{C}$  induzierten Kompositionen.

**Bemerkungen 9.A.7** Ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$  ist genau dann ein Monomorphismus (Epimorphismus, Isomorphismus), wenn er ein Epimorphismus (Monomorphismus, Isomorphismus) in  $\mathcal{C}^{op}$  ist.

Wir diskutieren noch einige kategorielle Begriffe – zuerst die sogenannten Limiten.

**Definition 9.A.8** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Ein Objekt  $M$  in  $\mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $\pi_i : M \rightarrow M_i$  für alle  $i \in I$  heißt **Produkt** der  $M_i$  (Bez.:  $M = \prod_{i \in I} M_i$ ), wenn es folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Ist  $N$  ein Objekt in  $\mathcal{C}$  und sind  $f_i : N \rightarrow M_i$  Morphismen für alle  $i \in I$ , so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus  $f : N \rightarrow M$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M = \prod_{i \in I} M_i & \xrightarrow{\pi_i} & M_i \\ & \swarrow \exists! f & \nearrow f_i \\ & N & \end{array}$$

kommutativ macht.  $(M = \prod_{i \in I} M_i, \pi_i)$  ist also universelle Quelle für Morphismen in die  $M_i$ , für alle  $i \in I$ .

**Definition 9.A.9** Die **Summe** einer Familie  $(M_i)_{i \in I}$  von Objekten in  $\mathcal{C}$  wird dual erklärt, also (vergleiche 9.A.6) durch Umdrehen der Pfeile: Ein Objekt  $\coprod_{i \in I} M_i$  in  $\mathcal{C}$  mit Morphismen  $\iota_i : M_i \rightarrow \coprod_{i \in I} M_i$  für alle  $i \in I$  heißt Summe der  $M_i$ , wenn es für jedes weitere Objekt  $N$  und Morphismen  $g_i : M_i \rightarrow N$  einen eindeutig bestimmten Morphismus  $g : \coprod_{i \in I} M_i \rightarrow N$  gibt, der

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\iota_i} & \coprod_{i \in I} M_i \\ & \searrow g_i & \swarrow \exists! g \\ & N & \end{array}$$

kommutativ macht.  $(\coprod_{i \in I} M_i, \iota_i)$  ist also universelles Ziel für Morphismen von allen  $M_i$ .

**Bemerkungen 9.A.10** Produkte und Summen müssen nicht existieren, aber wenn sie existieren, sind sie bis auf kanonische Isomorphie eindeutig (dies folgt leicht aus den universellen Eigenschaften).

**Beispiele 9.A.11** (a) In Sets, Gr, Ab (=Kategorie der abelschen Gruppen) und Top existieren beliebige Produkte, gegeben jeweils durch das kartesische Produkt der unterliegenden Mengen (vergleiche 1.7 für Top).

(b) In Sets existieren auch beliebige Summen; die Summe der Familie  $(M_i)_{i \in I}$  ist dabei gegeben durch die disjunkte Vereinigung  $\coprod_{i \in I} M_i (= \bigcup_{i \in I} M_i)$ .

(c) In Ab und Mod<sub>R</sub> existieren ebenfalls beliebige Summen, sie sind gegeben durch die bereits früher eingeführten direkten Summen

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

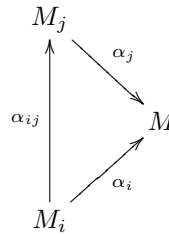
(d) In Gr existieren ebenfalls beliebige Summen (im Sinne von Kategorien); für eine Familie  $(G_i)_{i \in I}$  von Gruppen ist dies gegeben durch das sogenannte ‘freie Produkt’  $\ast_{i \in I} G_i$ , das sogar bei abelschen  $G_i$  im Allgemeinen nicht-kommutativ ist (man betrachtet beliebige ‘Worte’  $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$  mit Elementen  $g_{i_\nu} \in G_{i_\nu}$ , die nur vereinfacht werden können, wenn zwei benachbarte  $g_i$  aus derselben Gruppe  $G_i$  sind, so dass man sie multiplizieren kann).

**Definition 9.A.12** Sei  $(I, \leq)$  eine induktiv geordnete Menge, d.h., eine (teil-)geordnete Menge, so dass es für alle  $i, j \in I$  (mindestens) ein  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$  gibt, und sei  $(M_i, \alpha_{ij})$  ein induktives System

über  $I$  in  $\mathcal{C}$ , d.h., man hat Objekte  $M_i \in \mathcal{C}$  (d.h.,  $\in \text{ob}(\mathcal{C})$ ) für alle  $i \in I$  und Morphismen  $\alpha_{ij} : M_i \rightarrow M_j$  (genannt bergangsmorphismen) für alle  $i, j \in I$  mit  $i \leq j$ , so dass gilt

$$\alpha_{ii} = \text{id}_{M_i}, \quad \alpha_{jk}\alpha_{ij} = \alpha_{ik} \quad \text{für } i \leq j \leq k.$$

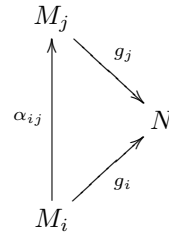
Ein Objekt  $M$  in  $\mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $\alpha_i : M_i \rightarrow M$  für alle  $i \in I$ , so dass das Diagramm



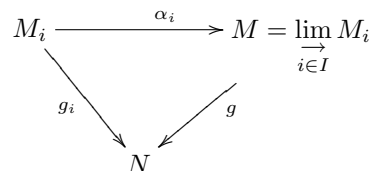
für alle  $i \leq j$  kommutiert, heißt **induktiver Limes** der  $M_i$  (genauer: von  $(M_i, \alpha_{ij})$ ) Bezeichnung

$$M = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I, \alpha_{ji}}} M_i \quad (\text{oder einfach } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} M_i \text{ oder nur } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} M_i),$$

wenn folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist  $N$  ein Objekt in  $\mathcal{C}$  und sind Morphismen  $g_i : M_i \rightarrow N$  für alle  $i \in I$  gegeben, so dass



für alle  $i \leq j$  kommutiert, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus  $g : M = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} M_i \rightarrow N$ , so dass



für alle  $i \in I$  kommutiert.  $(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} M_i, \alpha_i)$  ist also universell für "Morphismen aus dem universellen System heraus".

**Definition 9.A.13 Projektive Systeme**  $(M_i, \beta_{ji})_{\substack{i \in I \\ j \geq i}}$  über einer induktiv geordneten Menge  $(I, \leq)$  und der **projektive Limes**, Bezeichnung

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in I, \beta_{ji}}} M_i \quad (\text{oder einfach } \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in I}} M_i \text{ oder nur } \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} M_i),$$

eines solchen werden dual definiert, also wieder durch Umdrehen der Pfeile: Es existieren

$$\beta_{ji} : M_j \rightarrow M_i \quad \text{für } j \geq i$$

mit  $\beta_{ji}\beta_{kj} = \beta_{ki}$  für  $k \geq j \geq i$ ,  $\beta_{ii} = \text{id}_{M_i}$ , weiter existieren Morphismen  $\beta_j : \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} M_i \rightarrow M_j$  für alle  $j \in I$ ,

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & M_j \\
 & \nearrow \beta_j & \downarrow \beta_{ji} \\
 \varprojlim_i M_i & & \\
 & \searrow \beta_i & \\
 & & M_i
 \end{array}$$

für alle  $i \leq j$  kommutiert, und für ein Objekt  $N$  und Morphismen  $h_i : N \rightarrow M_i$  für alle  $i \in I$  gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & & M_j \\
 & \nearrow h_j & \downarrow \beta_{ji} \\
 N & & \\
 & \searrow h_i & \\
 & & M_i
 \end{array}
 & \text{kommutativ } \forall j \geq i & \implies \\
 & & \begin{array}{ccc}
 \varprojlim_{i \in I} M_i & \longrightarrow & M_i \\
 & \nwarrow \exists! h & \nearrow h_i \\
 & & N
 \end{array}
 \end{array}$$

Wieder müssen induktive oder projektive Limiten nicht existieren, sind aber eindeutig bis auf kanonische Isomorphie, wenn sie existieren.

**Beispiele 9.A.14** In Sets, Gr, Ab und Mod<sub>R</sub> existieren beliebige induktive und projektive Limiten und zwar ist

$$\varprojlim_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid \beta_{ji}(x_j) = x_i \text{ für alle } j \geq i\}$$

mit den Projektionen

$$\varprojlim_i M_i \rightarrow M_j, \quad (x_i) \mapsto x_j \in M_j,$$

sowie

$$\varinjlim_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i / \sim,$$

mit den Abbildungen

$$\alpha_i : M_i \rightarrow \varinjlim_i M_i, \quad m_i \mapsto \text{Klasse von } m_i.$$

Hierbei wird die Äquivalenzrelation  $\sim$  wie folgt definiert: für  $x_i \in M_i$  und  $x_j \in M_j$  gilt:

$$x_i \sim x_j \Leftrightarrow \text{es existiert ein } k \in I \text{ mit } k \geq i, j \text{ und } \alpha_{ik}(x_i) = \alpha_{jk}(x_j).$$

Die universelle Eigenschaft ergibt sich leicht aus den universellen Eigenschaften von Produkt und Summe: Sei zum Beispiel im Fall des induktiven Limes eine Menge  $N$  mit kompatiblen Abbildungen  $g_i : M_i \rightarrow N$  wie in Definition 9.A.12 gegeben. Nach der universellen Eigenschaft der Summe (hier die disjunkte Vereinigung) gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$g' : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow N,$$

mit  $g' \alpha'_i = g_i$  für alle  $i$ , wobei  $\alpha'_i : M_i \hookrightarrow \prod_{i \in I} M_i$  die kanonische Abbildung ist – konkret ist das hier die Abbildung, die  $m_i \in M_i \subset \prod_{i \in I} M_i$  auf  $g_i(m_i)$  abbildet! Weiter folgt aus der Kompatibilität der  $g_i$  sofort, dass  $g'$  eine wohldefinierte Abbildung

$$g : \prod_{i \in I} M_i / \sim \rightarrow N$$

induziert, denn gilt  $m_i \sim m_j$  für  $m_i \in M_i$  und  $m_j \in M_j$ , so gibt es ein  $k \geq i, j$  mit  $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$  in  $M_k$ , und es folgt  $g(m_i) = g_i(m_i) = g_k(\varphi_{ik}(m_i)) = g_k(\varphi_{jk}(m_j)) = g_j(m_j) = g(m_j)$ , so dass  $g'(m)$  nur von der Äquivalenzklasse von  $m$  abhängt. Weiter gilt offenbar  $g \alpha_i = g_i$ .

In den Kategorien von Gruppen, Moduln, Ringen,... kann man dieselben Konstruktionen nehmen, die angegebenen Objekte sind wieder in kanonischer Weise Gruppen, Moduln, Ringe, ... und die universellen Abbildungen sind Morphismen von Gruppen, Ringen, Moduln usw. Betrachten wir zum Beispiel den Fall der Gruppen. Dann ist klar, dass der projektive Limes  $\lim_{\rightarrow i} M_i$  eine Untergruppe des Produkts  $\prod_i M_i$  ist, und die Behauptungen folgen. Für den induktiven Limes hat die konstruierte Menge

$$\lim_{\rightarrow i} M_i = \left( \prod_{i \in I} M_i \right) / \sim$$

ebenfalls eine kanonische Gruppenstruktur: Sind  $m, n$  Elemente, repräsentiert durch  $m_i \in M_i$  und  $n_j \in N_j$ , so gibt es ein  $k \in I$  mit  $i, j \leq k$  und wir definieren  $m \cdot n$  als das Element was durch  $\varphi_{ik}(m_i) \cdot \varphi_{jk}(n_j) \in M_k$  repräsentiert wird. Man sieht leicht, dass die universellen Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind.

**Bemerkung 9.A.15** Mit der expliziten Beschreibung von *Produkten* und *projektiven Limiten* in *Sets* lassen sich die universellen (und damit charakterisierenden!) Eigenschaften von Produkt, Summe, induktiver und projektiver Limes ganz kurz hinschreiben (Bezeichnungen wie in 9.A.8, 9.A.9, 9.A.12, 9.A.13)

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \prod_{i \in I} M_i) \\ (f_i) & \mapsto & f \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\prod_{i \in I} M_i, N) \\ (g_i) & \mapsto & g \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \lim_{\leftarrow i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M_i) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \lim_{\leftarrow i \in I} M_i) \\ (h_i) & \mapsto & h \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \lim_{\leftarrow i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, M) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim_{\leftarrow i \in I} M_i, M) \\ (g_i) & \mapsto & g \end{array}$$

Wir kommen nun zu "Abbildungen zwischen Kategorien":

**Definition 9.A.16** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  zwei Kategorien. Ein **kovarianter Funktor**  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  ist eine Zuordnung, die

- (i) jeden Objekt  $A$  in  $\mathcal{A}$  ein Objekt  $F(A)$  in  $\mathcal{B}$  zuordnet, und
- (ii) jeden Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{A}$  einen Morphismus  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  in  $\mathcal{B}$  zuordnet.

Dabei muss gelten

- (a)  $F(1_A) = 1_{F(A)}$  für alle  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ .
- (b) Für Morphismen  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow V$  in  $\mathcal{A}$  gilt  $F(gf) = F(g)F(f) : F(A) \rightarrow F(C)$ ,

**Definition 9.A.17** Ein **kontravarianter Funktor**  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  wird als ein kovarianter Funktor  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$  (oder, äquivalent:  $\mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}$ ) definiert, d.h.,  $G$  "dreht Pfeile um": Für  $f : A \rightarrow B$  haben wir also (i) und (a), sowie

$$(ii') \quad G(f) : G(B) \rightarrow G(A),$$

und entsprechend

$$(b') \quad G(gf) = G(f)G(g) \text{ für } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

**Beispiele 9.A.18** (a) Wir haben den **Vergissfunktor**

$$V : \begin{array}{ccc} \underline{Gr} & \rightarrow & \underline{Sets} \\ G & \mapsto & G \\ f & \mapsto & f, \end{array}$$

der nur die Gruppenstruktur vergisst.

(b) Entsprechend haben wir einen Vergissfunktork

$$V : \underline{Ringe} \rightarrow \underline{Ab}$$

auf der Kategorie der Ringe (mit Ringhomomorphismen), der einen Ring  $R$  auf die abelsche Gruppe  $(R, +)$  abbildet, sowie weitere Vergissfunktoren

$$\underline{Mod}_R \rightarrow \underline{Ab} \quad , \quad \underline{Top} \rightarrow \underline{Sets}.$$

(c) Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Dann haben wir einen Restriktionsfunktork

$$\begin{aligned} \text{Res}_{B/A} : \underline{Mod}_B &\rightarrow \underline{Mod}_A \\ M &\mapsto M \quad \text{mit Operation von } A \text{ via } \varphi \\ f &\mapsto f. \end{aligned}$$

Weiter ist die Skalarerweiterung ein Funktork

$$\begin{aligned} B \otimes_A : \underline{Mod}_A &\rightarrow \underline{Mod}_B \\ M &\mapsto B \otimes_A M \\ f : M_1 \rightarrow M_2 &\mapsto f_* : B \otimes_A M_1 \rightarrow B \otimes_A M_2, \end{aligned}$$

siehe 12.9.

(d) Sei  $R$  ein Ring. Die Bildung des freien Moduls gibt einen Funktork

$$\begin{aligned} F_R : \underline{Sets} &\rightarrow \underline{Mod}_R \\ I &\mapsto F_R(I) \\ (f : I \rightarrow J) &\mapsto (f_* : F_R(I) \rightarrow F_R(J)). \end{aligned}$$

Hierbei ist  $f_*$  der  $R$ -Modul-Homomorphismus, der das kanonische Basiselement  $e_i$  ( $i \in I$ ) von  $F_R(I)$  auf das Basiselement  $e_{f(i)} \in F_R(J)$  abbildet – aufgrund der universellen Eigenschaft des freien Moduls gibt es genau einen  $R$ -Modul-Homomorphismus  $f_*$  mit dieser Eigenschaft. Man rechnet leicht nach, dass  $F_R$  ein Funktork ist, d.h., dass

$$\begin{aligned} (gf)_* &= g_* f_* \quad \text{für } I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K \\ \text{und } (id_I)_* &= id_{F_R(I)} \quad \text{für alle } I. \end{aligned}$$

**Definition 9.A.19** Ein kovarianter Funktork  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt

(a) *treu*, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} F_{A,A'} : \text{Hom}(A, A') &\rightarrow \text{Hom}(F(A), F(A')) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

für alle  $A, A' \in \text{ob}(\mathcal{A})$  injektiv ist,

(b) *voll*, wenn  $F_{A,A'}$  für alle  $A, A'$  surjektiv ist,

(c) *volltreu*, wenn er voll und *treu* ist.

**Beispiel 9.A.20** Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie. Eine *volle Unterkategorie* von  $\mathcal{A}$  ist eine Kategorie  $\mathcal{B}$  mit  $\text{ob}(\mathcal{B}) \subseteq \text{ob}(\mathcal{A})$  und  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B') = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B')$  für alle  $B, B' \in \mathcal{B}$  sowie denselben Verknüpfungen wie in  $\mathcal{A}$ . Die Inklusion  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  gibt dann einen volltreuen Funktork.

**Definition 9.A.21** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Für jedes Objekt  $A$  in  $\mathcal{C}$  ist der **kovariante Hom-Funktork**

$$h^A = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} h^A(X) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), \quad \text{für } X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \\ h^A(f) &= f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y), \quad \text{für } f : X \rightarrow Y \text{ in } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

siehe 9.A.4. Der **kontravariante Hom-Funktor**

$$h_A = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$$

ist definiert durch

$$\begin{aligned} h_A(X) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), \text{ für } X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \\ h_A(f) &= f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), \text{ für } f : X \rightarrow Y \text{ in } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

**Definition 9.A.22** Seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Dann ist die Komposition  $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch

$$\begin{aligned} (G \circ F)(A) &= G(F(A)) \text{ für } A \in \text{ob}(\mathcal{C}), \\ (G \circ F)(f) &= G(F(f)) \text{ für } f : A \rightarrow B \text{ in } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass dies wieder ein Funktor ist. Dieser ist kovariant, wenn  $F$  und  $G$  beide kovariant oder beide kontravariant sind, und kontravariant sonst.

Wichtig sind auch “Abbildungen zwischen Funktoren”:

**Definition 9.A.23** Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Kategorien und  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwei Funktoren von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$ . Ein **Morphismus von Funktoren** (oder auch **natürliche Transformation**)  $u : F \rightarrow G$  von  $F$  nach  $G$  besteht aus Morphismen in  $\mathcal{B}$

$$u_A : F(A) \rightarrow G(A)$$

für alle Objekte  $A$  in  $\mathcal{A}$ . Dabei soll gelten, dass für alle Morphismen  $f : A \rightarrow A'$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{u_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(A') & \xrightarrow{u_{A'}} & G(A') \end{array}$$

kommutativ ist (Hierfür sagt man auch, dass die durch die  $u_A$  gegebene Zuordnung “natürlich” ist).

**Beispiel 9.A.24** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und

$$h_A = \text{Hom}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$$

der kontravariante  $\text{Hom}$ -Funktoren (siehe 9.A.21) für jedes  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Jeder Morphismus  $g : A \rightarrow A'$  in  $\mathcal{C}$  induziert dann einen Morphismus von Funktoren

$$g_* : h_A \rightarrow h_{A'}$$

wie folgt: Für  $B \in \text{ob}(\mathcal{C})$  definiere

$$(g_*)_B : \text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A') \\ f \mapsto gf$$

(Die Kommutativität des Diagramms in 9.A.23 ist erfüllt, wie man leicht sieht).

**Definition 9.A.25** Ein Morphismus von Funktoren

$$u : F \rightarrow G$$

( $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ) heißt **Isomorphismus von Funktoren** (oder **natürliche Äquivalenz**), wenn alle Morphismen

$$u_A : F(A) \xrightarrow{\sim} G(A)$$

Isomorphismen sind.

Offenbar bilden dann die Inversen  $u_A^{-1}$  einen Morphismus von Funktoren  $u^{-1} : G \rightarrow F$  und es gilt  $u^{-1} \circ u = Id_{\mathcal{A}}$  und  $u \circ u^{-1} = Id_{\mathcal{B}}$ , wobei die Komposition von Morphismen von Funktoren in offensichtlicher Weise definiert ist und  $Id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  der identische Funktor einer Kategorie  $\mathcal{A}$  ist ( $Id_{\mathcal{A}}(A) = A$ ;  $Id_{\mathcal{A}}(f) = f$ ).

Man schreibt  $F \simeq G$ , wenn es einen Isomorphismus  $u : F \rightarrow G$  von Funktoren gibt.

**Definition 9.A.26** Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  gibt mit

$$G \circ F \simeq Id_{\mathcal{A}} \quad , \quad F \circ G \simeq Id_{\mathcal{B}} .$$

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  heißen dann äquivalente Kategorien und  $G$  heißt ein Quasi-Inverses von  $F$ .

Es kommt selten vor, dass man ein echtes Inverses findet, d.h., ein  $G$  mit  $G \circ F = Id_{\mathcal{A}}$  und  $F \circ G = Id_{\mathcal{B}}$ .

## 10 Beispiele und erste Eigenschaften von Schemata

Der folgende Satz ist entscheidend für das Arbeiten mit Schemata.

**Satz 10.1** Sei  $Y$  ein lokal geringter Raum und  $A$  ein Ring. Dann hat man eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi : \operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec}(A)) &\rightarrow \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_Y(Y)) \\ (f, f^\#) &\mapsto f^\#_{\operatorname{Spec}(A)} : A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec}(A))$  die Menge der Schema-Morphismen von  $Y$  nach  $\operatorname{Spec}(A)$  und  $\operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_Y(Y))$  die Menge der Ringhomomorphismen. Beachte, dass  $f^\#$  tatsächlich einen Ringhomomorphismus

$$f^\#_{\operatorname{Spec}(A)} : A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(\operatorname{Spec}(A)) \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}(\operatorname{Spec}(A))) = \mathcal{O}_Y(Y)$$

liefert.

**Beweis:** Wir konstruieren eine Umkehrabbildung  $\Psi$ . Sei  $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$  ein Ringhomomorphismus.

1) Definiere

$$\begin{aligned} f : Y &\rightarrow \operatorname{Spec}(A) \\ y &\mapsto (\varphi^y)^{-1}(\mathfrak{m}_y), \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_y : A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}, \quad a \mapsto \varphi(a)_y$$

der kanonische Ringhomomorphismus ist. Wir behaupten, dass  $f$  stetig ist. Dazu benutzen wir:

**Lemma 10.2** Sei  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokal geringter Raum,  $U \subseteq Y$  offen und  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ . Dann ist

$$U_s := \{y \in U \mid s_y \notin \mathfrak{m}_y\}$$

offen in  $U$  und  $s|_{U_s} \in \mathcal{O}_Y(U_s)^\times$ . ( $U_s$  ist der "Ort, wo  $s \neq 0$  ist" in dem Sinne, dass das Bild von  $s$  in den Restklassenkörpern  $k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$  nicht 0 ist, für alle  $y \in U_s$ ).

**Beweis:** Sei  $y \in U_s$ . Dann ist  $s_y \notin \mathfrak{m}_y$ , also  $s_y \in \mathcal{O}_{Y,y}^\times$  (da  $\mathcal{O}_{Y,y}$  ein lokaler Ring ist). Es gibt also ein  $g \in \mathcal{O}_{Y,y}$  mit  $s_y g = 1$ . Nach Definition des Halms gibt es also eine offene Umgebung  $V \subseteq U$  von  $y$  und ein  $t \in \mathcal{O}_Y(V)$  mit  $t_y = g$  und  $s|_V t = 1$  in  $\mathcal{O}_Y(V)$ . Es folgt  $V \subseteq U_s$ . Dies zeigt, dass  $U_s$  offen ist.

$s|_{U_s} \in \mathcal{O}_Y(U_s)^\times$ : Übungsaufgabe!

Hieraus folgt nun die Stetigkeit von  $f$ : Da die Mengen  $D(a) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$  für  $a \in A$  eine Basis der Topologie von  $\operatorname{Spec}(A)$  bilden, genügt es zu zeigen, dass  $f^{-1}(D(a))$  für alle  $a \in A$  offen ist. Es gilt aber

$$\begin{aligned} f^{-1}(D(a)) &= \{y \in Y \mid f(y) \in D(a)\} \\ &= \{y \in Y \mid a \notin f(y) = (\varphi^y)^{-1}(\mathfrak{m}_y)\} \\ &= \{y \in Y \mid \varphi^y(a) \notin \mathfrak{m}_y\} \\ &= \{y \in Y \mid \varphi(a)_y \notin \mathfrak{m}_y\} \\ &= Y_{\varphi(a)}, \end{aligned}$$

und dies ist nach 10.2 offen.

2) Wir definieren nun einen Morphismus von Ringgarben

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y.$$

Für  $y \in Y$  und  $\mathfrak{p} = f(y) \in \text{Spec}(A)$  gilt  $\mathfrak{p} = (\varphi^y)^{-1}(\mathfrak{m}_y)$ , also  $\varphi^y(A \setminus \mathfrak{p}) \subseteq \mathcal{O}_{Y,y} \setminus \mathfrak{m}_y = \mathcal{O}_{Y,y}^\times$ . Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung definiert  $\varphi$  also einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus  $\varphi_y : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  von lokalen Ringen, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\exists \varphi_y} & \mathcal{O}_{Y,y} \\ \uparrow & \nearrow \varphi^y & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_Y(Y) \end{array} \quad \mathfrak{p} = f(y)$$

kommutativ macht. Für  $U \subseteq \text{Spec}(A)$  definiere nun den Ringhomomorphismus

$$f_U^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \rightarrow \prod_{y \in f^{-1}(U)} \mathcal{O}_{Y,y}$$

durch

$$s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \quad \mapsto \quad (\varphi_y(s(f(y))))_{y \in f^{-1}(U)}.$$

**Behauptung:**  $f^\sharp(s)$  liegt im Bild der kanonischen Injektion von Ringen

$$f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) \hookrightarrow \prod_{y \in f^{-1}(U)} \mathcal{O}_{Y,y}$$

(die Injektivität folgt aus Lemma 9.5).

**Beweis** Sei  $U = \bigcup_a D(a)$ , dann ist  $f^{-1}(U) = \bigcup_a Y_{\varphi(a)}$ . Für  $a \in A$  ist aber nach Lemma 10.2  $\varphi(a) \in Y_{\varphi(a)} \in \mathcal{O}_Y(Y_{\varphi(a)})^\times$ ; nach der universellen Eigenschaft von Lokalisierungen gibt es also genau einen Ringhomomorphismus  $\varphi_a : A_a \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y_{\varphi(a)})$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_a & \xrightarrow{\varphi_a} & \mathcal{O}_Y(Y_{\varphi(a)}) \\ \uparrow & & \uparrow \text{res} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_Y(Y) \end{array}$$

kommutativ macht.

Wegen

$$s|_{D(a)} \in \mathcal{O}_{\text{Spec} A}(D(a)) \xleftarrow{\sim} A_a$$

gibt es ein  $\alpha \in A_a$  mit  $s(x) = \alpha_{\mathfrak{p}} := \text{Bild von } \alpha \text{ in } A_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } x \in D(a)$ . Für  $\varphi_a(\alpha) \in \mathcal{O}_Y(Y_{\varphi(a)})$  gilt dann

$$\varphi_a(\alpha)_y = \varphi_y(\alpha_{f(y)}) = \varphi_y(s(f(y))) \quad \text{für alle } y \in Y_{\varphi(a)}.$$

Es gilt also

$$f_U^\sharp(s)|_{Y_{\varphi(a)}} := (\varphi_y(s(f(y))))_{y \in Y_{\varphi(a)}} \in \text{im}(\mathcal{O}_Y(Y_{\varphi(a)}) \rightarrow \prod_{y \in Y_{\varphi(a)}} \mathcal{O}_{Y,y}).$$

Mit den Garbenaxiomen für die Überdeckung  $(D(a))$  von  $U$  folgt nun sofort die Behauptung. Wir erhalten also einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$f_U^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)).$$

Diese Abbildungen  $f_U^\#$  kommutieren offenbar mit den Restriktionsabbildungen, liefern also einen Morphismus von Ringgarben

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec} A} \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$$

Weiter gilt für  $y \in Y$  und  $\mathfrak{p} = f(y) \in \text{Spec} A$ , dass das Diagramm

$$(10.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\text{Spec} A, x} & \xrightarrow{(f^\#)_y} & \mathcal{O}_{Y, y} \\ \downarrow \wr & \nearrow \varphi_y & \\ A_{\mathfrak{p}} & & \end{array}$$

kommutiert. Also ist  $\Psi(\varphi) := (f, f^\#)$  ein Morphismus von lokal geringten Räumen. Schließlich ist nach Konstruktion für  $a \in A$  das Diagramm

$$(10.2) \quad \begin{array}{ccc} f_{D(a)}^\# : & \mathcal{O}_{\text{Spec} A}(D(a)) & \longrightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}(D(a))) \\ & \uparrow \wr & \parallel \\ & A_a & \xrightarrow{\varphi_a} \mathcal{O}_Y(Y_{\varphi(a)}) \end{array}$$

kommutativ. Insbesondere ist  $(a = 1)$

$$f_{\text{Spec} A}^\# = \varphi.$$

Dies zeigt  $\Phi \Psi = id$ .

**Behauptung** Es ist auch  $\Psi \Phi = id$ .

**Beweis** Sei  $(g, g^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (\text{Spec} A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$  ein Morphismus lokal geringter Räume, sei

$$\varphi = \Phi(g, g^\#) = g_{\text{Spec} A}^\# : A \rightarrow (g_* \mathcal{O}_Y)(\text{Spec} A) = \mathcal{O}_Y(Y),$$

und sei  $(f, f^\#) = \Psi(\varphi)$  wie oben definiert.

Wir haben zu zeigen  $(f, f^\#) = (g, g^\#)$ . Sei  $y \in Y$ ,  $\mathfrak{p} = f(y)$  und  $\mathfrak{q} = g(y)$ . Dann ist

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{p} &= (\varphi^y)^{-1}(\mathfrak{m}_y) = \{a \in A \mid \varphi(a)_y \in \mathfrak{m}_y\} \\ &= \{a \in A \mid (g^\#)_y(a_{g(y)}) \in \mathfrak{m}_y\} \\ &= \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in \mathfrak{m}_{g(y)} \subseteq A_{\mathfrak{q}}\} \quad (\text{da } (g^\#)_y \text{ lokal}) \\ &= \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Es folgt  $f = g$ .

Die Diagramme

$$(10.4) \quad \begin{array}{ccc} A = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(A)) & \xrightarrow{\varphi = g_{\text{Spec} A}^\#} & \mathcal{O}_Y(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A), g(y)} & \xrightarrow[(f^\#)_y]{(g^\#)_y} & \mathcal{O}_{Y,y} \end{array}$$

kommutieren mit  $(g^\#)_y$  (trivial) und  $(f^\#)_y$  (siehe (10.1) oben). Aus der Eindeutigkeit der Lokalisierung folgt  $(g^\#)_y = (f^\#)_y$  für alle  $y \in Y$ . Da  $\mathcal{O}_Y$  eine Garbe ist, folgt  $g^\# = f^\#$ .

**Corollar 10.3** Für Ringe  $A, A'$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Schemata}}(\text{Spec}(A'), \text{Spec}(A)) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Ringe}}(A, A') \\ (f, f^\#) &\mapsto \varphi = f_{\text{Spec} A}^\# \end{aligned}$$

bijektiv. Dies ist kompatibel mit Kompositionen. Mit anderen Worten: Die Kategorie der affinen Schemata ist äquivalent zur Kategorie der Ringe.

**Definition 10.4** Sei  $S$  ein Schema.

(a) Ein Schema über  $S$  (oder  $S$ -Schema) ist ein Schema  $X$  zusammen mit einem Morphismus  $f : X \rightarrow S$ ; dieser wird Strukturmorphismus genannt.

(b) Ein Morphismus von  $S$ -Schemata ist ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$ , der mit den Strukturmorphismen verträglich ist, d.h., für den

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

kommutativ ist.

**Beispiele 10.5** (a) Ist  $S = \text{Spec} A$  affin, so erhält ein Schema  $X$  die Struktur eines  $S$ -Schemas nach 10.1 durch einen Ringhomomorphismus  $A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ . Wir nennen  $X$  dann auch ein  $A$ -Schema.

(b) Ein affines  $A$ -Schema (etwa  $X = \text{Spec} B$ ) ist nach 10.1 “dasselbe” wie eine  $A$ -Algebra (nämlich  $B$ ).

**Definition 10.6** Sei  $X$  ein Schema und  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge (des unterliegenden topologischen Raumes  $X_{\text{top}}$ ). Dann ist  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$  wieder ein Schema: Sei  $x \in U$  und  $V = \text{Spec} A$  eine affine offene Umgebung von  $x$  in  $X$ . Dann gibt es eine offene Standardumgebung  $D(b) \subseteq U \cap V$  von  $x$  in  $V$  ( $b \in A$ ); aber  $(D(b), \mathcal{O}_{X|D(b)}) \cong (D(b), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)|D(b)})$  ist affin.  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$  heißt offenes Unterschema von  $X$ , und wir bezeichnen es meist nur mit  $U$ . Wir haben einen kanonischen Morphismus  $(j, j^\#) : U \rightarrow X$  von Schemata:  $j : U \hookrightarrow X$  ist die Inklusion, und  $j^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow j_* \mathcal{O}_U$ , mit  $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{X|U}$ , ist wie folgt definiert: Für eine offene Menge  $V \subseteq X$  sei

$$j_V^\# : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow (j_* \mathcal{O}_U)(V) = \mathcal{O}_U(j^{-1}(V)) = \mathcal{O}_U(V \cap U) = \mathcal{O}_X(V \cap U)$$

die Restriktion  $res_{V,V \cap U}$  für  $\mathcal{O}_X$ .

Sei  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus von Schemata, und seien  $V \subseteq Y$  offen und  $U \subseteq V$  offen mit  $f(V) \subseteq U$ . Dann induziert  $f$  durch Einschränkung einen Schema-Morphismus  $g = f|_V : V \rightarrow U$  wie folgt: Für  $W \subseteq U$  offen definiere  $g_W^\#$  durch die Kommutativität von

$$g_W^\# : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U(W) & \longrightarrow & (g_* \mathcal{O}_V)(W) = \mathcal{O}_V(V \cap f^{-1}(W)) = \mathcal{O}_Y(V \cap f^{-1}(W)) \\ \parallel & & \nearrow \text{res} \\ \mathcal{O}_X(W) & \longrightarrow & (f_* \mathcal{O}_Y)(W) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(W)). \end{array}$$

$f|_V$  ist der einzige Morphismus, der das Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f|_V} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kommutativ macht. Für  $Y = V$  folgt insbesondere:

**Lemma 10.7** Für Schemata  $X, Y$  und  $U \subseteq X$  offen hat man eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Y, U) & \xrightarrow{\text{bij.}} \{f : Y \rightarrow X \mid f(Y) \subseteq U\}. \\ g & \mapsto (Y \xrightarrow{g} U \hookrightarrow X) \end{aligned}$$

Wir wollen nun projektive Schemata (über einem Ring  $A$ ) definieren.

Sei  $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$  eine endlich erzeugte graduierte  $A$ -Algebra. Setze  $S_+ = \bigoplus_{n \geq 1} S_n$ ; dies ist ein (homogenes) Ideal in  $S$ .

**Definition 10.8** (vergleiche 3.21 und 3.33) Sei  $\text{Proj}(S)$  die Menge der homogenen Primideale  $\mathfrak{p} \subseteq S$ , die nicht ganz  $S_+$  enthalten.

**Definition/Lemma 10.9** (vergleiche Lemma 3.18) Für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  setze

$$V_+(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Dann gilt

- (a)  $V_+(S_+) = \emptyset, \quad V_+(\{0\}) = \text{Proj}(S)$ .
- (b)  $V_+(\mathfrak{a}) \cup V_+(\mathfrak{b}) = V_+(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V_+(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ .
- (c)  $\bigcap_{i \in I} V_+(\mathfrak{a}_i) = V_+(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$ .

Der Beweis ist derselbe wie für den nicht-homogenen Fall (Lemma 5.5), wenn man benutzt, dass ein homogenes Ideal  $\mathfrak{q}$  genau dann ein Primideal ist, wenn für alle *homogenen* Elemente  $a, b \in \mathfrak{q}$  gilt, dass aus  $ab \in \mathfrak{q}$  folgt, dass  $a \in \mathfrak{q}$  oder  $b \in \mathfrak{q}$ .

Nach 10.9 bilden die Mengen  $V_+(\mathfrak{a})$ , für alle homogenen Ideale  $\mathfrak{a} \subseteq S$ , die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\text{Proj}(S)$ .

**Definition 10.10** Diese Topologie heißt Zariski-Topologie auf  $\text{Proj}(S)$ .

**Lemma/Definition 10.11** Für jedes homogene Element  $f \in S$  ist die Menge

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

offen. Die Mengen  $D_+(f)$ , für  $f \in S$  homogen, heißen die Standard-offenen Mengen und bilden eine Basis der Topologie.

Die erste Behauptung folgt aus der Beziehung  $D_+(f) = \text{Proj}(S) \setminus V_+(f)$ , wobei wir definieren

$$V_+(f_1, \dots, f_m) = V(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$$

für homogene Elemente  $f_1, \dots, f_m \in S$ . Die zweite Behauptung folgt mit 10.9 (c).

Wir definieren nun eine Ringgarbe  $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$  auf  $\text{Proj}(S)$ .

**Lemma/Definition 10.12** Für ein homogenes Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq S$  definiere

$$S_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \in S_{\mathfrak{p}} \mid s \in S, t \in S \setminus \mathfrak{p} \text{ homogen vom gleichen Grad} \right\}.$$

Dies ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{p}{t} \mid p \in \mathfrak{p}, t \in S \setminus \mathfrak{p} \text{ beide homogen vom gleichen Grad} \right\}$$

**Beweis** der Behauptungen: Zunächst ist  $S_{(\mathfrak{p})}$  ein Unterring von  $S_{\mathfrak{p}}$ : Für homogene Elemente  $s, s' \in S, t, t' \in \mathfrak{p}$  mit  $\deg(s) = \deg(t) = m, \deg(s') = \deg(t') = n$

$$\frac{s}{t} + \frac{s'}{t'} = \frac{st' + st}{tt'},$$

wobei Zähler und Nenner homogen vom Grad  $m + n$  sind. Die Abgeschlossenheit bezüglich des Produktes ist klar. Ist weiter  $\frac{s}{t} \in S_{(\mathfrak{p})} \setminus \mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})}$ , so ist  $s \notin \mathfrak{p}$  und damit  $\frac{t}{s} \in S_{(\mathfrak{p})}$  ein Inverses von  $\frac{s}{t}$ . Also besteht  $S_{(\mathfrak{p})} \setminus \mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})}$  ganz aus Einheiten und stimmt so mit der Einheitengruppe überein (ein Element aus  $\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})}$  kann keine Einheit sein).

**Definition 10.13** Definiere die Ring-Garbe  $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$  auf  $\text{Proj}(S)$  wie folgt:

(a) Für  $U \subseteq \text{Proj}(S)$  offen, nicht-leer setze

$$\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}(U) := \left\{ s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})} \mid s \text{ erfüllt (i) und (ii)} \right\}$$

für die folgenden beiden Eigenschaften.

(i) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gilt  $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ .

(ii) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gibt es homogene Elemente  $t \in S, f \in S \setminus \mathfrak{p}$ , vom selben Grad, so dass für alle  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$  gilt:  $s(\mathfrak{p}) = \frac{t}{f} \in S_{(\mathfrak{p})}$ .

(b) Für  $V \subseteq U$  offen und  $s \in \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}(U)$  sei  $\text{res}_{U,V}(s) = s|_V$ .

Man sieht leicht, dass die Restriktionsabbildungen wohldefiniert sind: Nach Bedingung (i) ist  $s|_V$  eine Abbildung mit Werten in  $\coprod_{\mathfrak{p} \in V} S_{(\mathfrak{p})}$ . Ist weiter (ii) erfüllt, so gilt diese Bedingung auch auf  $D_+(g)$ , falls  $D_+(g) \subseteq D_+(f)$ ; durch Betrachtung von solchen  $D_+(g) \subseteq D_+(f)$  mit  $D_+(g) \subseteq V$  folgt die Bedingung (ii) auch für  $s|_V$ . Weiter folgt sofort, dass  $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$  eine Garbe (von Ringen) ist.

Der geringte Raum  $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$  heißt das projektive Spektrum von  $S$ .

**Satz 10.14** (a) Für jedes  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$  gibt es einen kanonischen Ringisomorphismus

$$\varphi_{(\mathfrak{p})} : \mathcal{O}_{\text{Proj}(S), \mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} S_{(\mathfrak{p})}.$$

Insbesondere ist  $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$  ein lokal geringter Raum.

(b) Für jedes homogene  $f \in S$  hat man einen kanonischen Isomorphismus von lokal geringten Räumen

$$(\varphi, \varphi^\#) : (D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)|_{D_+(f)}}) \xrightarrow{\sim} (\text{Spec}(S_{(f)}), \mathcal{O}_{\text{Spec}(S_{(f)})}),$$

wobei  $S_{(f)} \subseteq S_f$  wie in 3.28 definiert wird. Insbesondere ist  $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$  ein Schema.

**Beweis** (a): Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Satz 9.11 (c) (Konstruktion und Bijektivität von  $\varphi_{(\mathfrak{p})}$  wie dort für  $\varphi_{\mathfrak{p}}$ ).

(b) Für jedes homogene Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  setze

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)}.$$

Dies ist ein Ideal in  $S_{(f)}$ . Ist  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ , so ist  $\mathfrak{p}S_f$  nach 5.14 ein Primideal, und somit  $\varphi(\mathfrak{p})$  ein Primideal, also in  $\text{Spec}(S_{(f)})$ . Die so erhaltene Abbildung

$$\varphi : D_+(f) \rightarrow \text{Spec}(S_{(f)})$$

ist eine Bijektion; dies folgt leicht aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} &= \mathfrak{p}_{(f)} := \left\{ \frac{p}{f^n} \mid p \in \mathfrak{p} \text{ homogen vom Grad } n \cdot \deg(f) \right\} \\ \mathfrak{p} &= \text{Urbild von } \mathfrak{p}_{(f)} \text{ in } S \end{aligned}$$

für ein homogenes Primideal  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ , sowie daraus, dass für ein Primideal  $\mathfrak{q} \subseteq S_{(f)}$  das Urbild  $\mathfrak{q}' \subseteq S$  homogen ist, mit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'_{(f)}$ .

Weiter gilt für ein beliebiges homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  und  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \varphi(\mathfrak{p}).$$

Daher ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus. Schließlich sind für  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$  die Ringe

$$S_{(\mathfrak{p})} \quad \text{und} \quad (S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$$

isomorph. Dies liefert einen offensichtlichen Isomorphismus

$$\varphi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec}(S_{(f)})} \xrightarrow{\sim} \varphi_*(\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)|_{D_+(f)}})$$

von Ringgarben, wie behauptet.

**Bemerkung 10.15** Wie wir gesehen haben, ist für homogenes  $f \in S$  das offene Unterschema  $D_+(f)$  affin. Ist  $(f_i)_{i \in I}$  ein Erzeugendensystem von  $S_+$  durch homogene Elemente, so ist  $\text{Proj}(S) = \bigcup_{i \in I} D_+(f_i)$ , denn es ist  $\bigcap_i V_+(f_i) = V_+(\langle f_i \rangle) = V_+(S_+) = \emptyset$ .

**Definition 10.16** Der projektive Raum der (relativen) Dimension  $n$  über einem Ring  $A$  wird als das  $A$ -Schema

$$\mathbb{P}_A^n := \text{Proj}(A[X_0, \dots, X_n])$$

definiert, wobei  $S = A[X_0, \dots, X_n]$  mit der üblichen Graduierung versehen ist.

**Bemerkung 10.17**  $\mathbb{P}_A^n$  wird durch die  $n + 1$  affinen  $A$ -Schemata  $D_+(X_0), \dots, D_+(X_n)$  überdeckt, da  $A[X_0, \dots, X_n]_+$  von  $X_0, \dots, X_n$  erzeugt wird. Nach Satz 10.14 (b) ist  $D_+(X_i)$  als Schema isomorph zu  $\text{Spec}(A[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)})$ . Weiter zeigt man leicht wie in Corollar 3.29, dass  $A[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)}$  isomorph zum Polynomring  $A[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$  ist, bzw. gleich dem Polynomring  $A\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$ , wobei  $\hat{x}_i$  bzw.  $\frac{\hat{X}_i}{X_i}$  das Weglassen von  $x_i$  bzw.  $\frac{X_i}{X_i}$  bedeutet.

Es ist also

$$D_+(X_i) \cong \mathbb{A}_A^n$$

als Schema, wobei der affine Raum der (relativen) Dimension  $n$  als das  $A$ -Schema

$$\mathbb{A}_A^n := \text{Spec}(A[Y_1, \dots, Y_n])$$

definiert wird.

Dies verallgemeinert die in Kapitel 3 erhaltenen Ergebnisse.

Wir vergleichen nun Schemata und Varietäten.

**Satz 10.18** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gibt es einen kanonischen volltreuen Funktor

$$t : \text{Var}/k \rightarrow \text{Sch}/k$$

von der Kategorie der (quasi-projektiven) Varietäten über  $k$  in die Kategorie der Schemata über  $k$  (d.h., über  $\text{Spec}(k)$ , siehe 10.4 und 10.5 (a)).

Wir können also die  $k$ -Varietäten als eine Unterkategorie aller  $k$ -Schemata auffassen. Wir werden diese Unterkategorie, also das essentielle Bild von  $t$ , noch genauer charakterisieren.

**Beweis** Wir definieren zuerst den topologischen Raum  $\tilde{V}$ , den wir einer  $k$ -Varietät  $V$  zuordnen, und der dann noch eine Schema-Struktur erhält. Sei  $\tilde{V}$  die Menge aller irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von  $V$ . Ist  $W \subseteq V$  abgeschlossen, so ist  $\tilde{W} \subset \tilde{V}$ . Außerdem gilt für abgeschlossene Teilmengen  $W_1, W_2, W_i$  ( $i \in I$ ):

$$\tilde{W}_1 \cup \tilde{W}_2 = \widetilde{W_1 \cup W_2}, \quad \bigcap_{i \in I} \tilde{W}_i = \widetilde{\bigcap_{i \in I} W_i}.$$

Daher bilden die Mengen  $\tilde{W} \subset \tilde{V}$ , für  $W \subseteq V$  abgeschlossen, die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Dadurch wird  $\tilde{V}$  ein topologischer Raum. Es gibt eine Inklusion

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha^V : V &\hookrightarrow \tilde{V} \\ X &\mapsto \{x\}, \end{aligned}$$

da jeder Punkt  $x \in V$  abgeschlossen ist. Nach Konstruktion induziert  $\alpha$  eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Mengen (vermöge  $W \mapsto \widetilde{W}$  und  $\widetilde{W} \mapsto \alpha^{-1}(\widetilde{W})$ ) und daher auch zwischen den offenen Mengen (vermöge  $U \mapsto \alpha^{-1}(U)$  für  $U \subseteq \widetilde{V}$  offen).

Ist  $\varphi : V \rightarrow V'$  eine beliebige stetige Abbildung zwischen Varietäten, so induziert  $\varphi$  eine stetige Abbildung

$$(10.5) \quad \widetilde{\varphi} : \widetilde{V} \rightarrow \widetilde{V}' ,$$

indem man eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge  $Z \in \widetilde{V}$  auf dem Abschluss  $\overline{\varphi(Z)}$  von  $\varphi(Z)$  in  $\widetilde{V}$  abbildet (dieser ist irreduzibel, da  $\varphi(Z)$  irreduzibel ist). Dieses  $\widetilde{\varphi}$  ist stetig, da für  $W' \subseteq V'$  abgeschlossen gilt:  $\widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{W}') = \overline{\varphi^{-1}(W')}$  (denn für  $Z \in \widetilde{V}$ , d.h.,  $Z \subseteq V$  irreduzibel und abgeschlossen gilt genau dann  $\widetilde{\varphi}(Z) \in \widetilde{W}'$ , also  $\overline{\varphi(Z)} \subseteq W'$ , also  $\varphi(Z) \subseteq W'$ , wenn  $Z \subseteq \varphi^{-1}(W')$ , also  $Z \in \varphi^{-1}(W')$ ).

Sei  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_V$  die Garbe der regulären Funktionen auf  $V$ .

**Behauptung 1**  $(\widetilde{V}, \alpha_*\mathcal{O})$  ist ein Schema.

**Beweis** Da  $V$  eine offene Überdeckung aus affinen Varietäten besitzt, und für  $U \subseteq V$  offenbar  $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{V}$  offen ist und  $(\alpha^U)_*\mathcal{O}|_U = (\alpha_*\mathcal{O})|_{\widetilde{U}}$  ist, genügt es, die Behauptung für eine affine Varietät  $V$  zu zeigen. Sei dann  $A = \mathcal{O}(V)$  der affine Koordinatenring; dies ist eine reduzierte endlich erzeugte  $k$ -Algebra. Wir definieren einen Morphismus von lokal geringten Räumen

$$\beta : (V, \mathcal{O}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$$

wie folgt. Für  $P \in V$  sei  $\beta(P) = \mathfrak{m}_P \subseteq A$  das maximale Ideal, das durch die regulären Funktionen  $\psi$  gegeben wird, für die  $\psi(P) = 0$  ist. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt dies eine Bijektion zwischen  $V$  und der Menge  $\text{Max}(A) \subseteq \text{Spec}(A)$  aller maximalen Ideale von  $A$ . Weiter ist  $V \xrightarrow{\sim} \text{Max}(A)$  ein Homöomorphismus.

Wir definieren nun einen Morphismus von Ringgarben

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow \beta_*\mathcal{O} .$$

Dazu müssen wir für  $U \subseteq \text{Spec}(A)$  offen einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \rightarrow \mathcal{O}(\beta^{-1}(U))$$

definieren. Sei  $s \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ , also

$$s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus der Konstruktion von  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ . Für jedes  $P \in \beta^{-1}(U)$ , also mit  $\mathfrak{m}_P = \beta(P) \in U$ , ist  $\mathfrak{m}_P$  ein maximales Ideal und der Restklassenkörper  $k(\mathfrak{m}_P) = A_{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{m}_P A_{\mathfrak{m}_P}$  kanonisch isomorph zu  $k$  vermöge des Ringhomomorphismus

$$k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}_P \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{m}_P A_{\mathfrak{m}_P} .$$

Wir definieren nun

$$\psi_s : \beta^{-1}(U) \rightarrow k$$

indem wir  $P \in \beta^{-1}(U)$  auf das Bild von  $s(\mathfrak{m}_P) \in A_{\mathfrak{m}_P}$  in  $k = k(\mathfrak{m}_P)$  abbilden. Aus der Eigenschaft (ii) für  $s$  ( $s$  lokal von der Gestalt  $\frac{a}{f}$  für  $a, f \in A$ ) folgt sofort, dass  $\psi_s$  eine reguläre Funktion auf  $\beta^{-1}(U)$  ist, also in  $\mathcal{O}(\beta^{-1}(U))$ . Dies ist offenbar mit den Restriktionen verträglich, definiert also einem Morphismus von Ringgarben

$$\beta^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow \beta_* \mathcal{O}.$$

**Behauptung 2:** Dies ist ein Isomorphismus.

**Beweis** Wegen der Garbeneigenschaft genügt es, dies auf den Standard-offenen Mengen  $D(f) \subseteq \text{Spec}(A)$  (für  $f \in A$ ) nachzuweisen. Hier gibt es aber ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(A)) & \xrightarrow{=} & \mathcal{O}(V) = A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f)) & \xrightarrow{\beta^\#_{D(f)}} & \mathcal{O}(D(f)), \end{array}$$

das nach Satz 9.11 (b) und Corollar 2.13 beide Ringe in der unteren Reihe mit  $A_f$  identifiziert, so dass  $\beta^\#_{D(f)}$  ein Isomorphismus ist.

Es bleibt noch zu zeigen (für affines  $V$  wie oben):

**Behauptung 3:** Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{V} \\ & \nearrow \alpha & \uparrow \gamma \\ V & & \text{Spec}(A) \\ & \searrow \beta & \end{array}$$

mit einem Homöomorphismus  $\gamma$ .

Hieraus folgt nämlich ein Isomorphismus geringter Räume

$$(\tilde{V}, \alpha_* \mathcal{O}) = (\tilde{V}, \gamma_* \beta_* \mathcal{O}) \xrightarrow[\sim]{\gamma} (\text{Spec}(A), \beta_* \mathcal{O}) \xrightarrow[\sim]{\text{Beh. 2}} (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$$

und damit Behauptung 1.

**Beweis von Behauptung 3:** Definiere  $\gamma$  als die Bijektion, die jedem Primideal  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  die irreduzible Menge  $V(\mathfrak{p}) \subseteq V$ , also  $V(\mathfrak{p}) \in \tilde{V}$  zuordnet. Das Diagramm kommutiert, denn es ist  $\alpha(P) = \{P\}$  und  $\beta(P) = \mathfrak{m}_P$ , sowie  $V(\mathfrak{m}_P) = \{P\}$ . Weiter ist  $\gamma$  nach Definition der Topologien auf beiden Seiten offenbar ein Homöomorphismus.

Wir haben also jeder Varietät  $V$  (nicht notwendig affin) ein Schema  $(\tilde{V}, \alpha_* \mathcal{O})$  zugeordnet. Dies ist auch ein  $k$ -Schema: Nach Satz 10.1 (bzw. Beispiel 10.5(a)) genügt es dafür, einen Ringhomomorphismus

$$k \rightarrow (\alpha_* \mathcal{O})(\tilde{V})$$

anzugeben. Aber dieser ist kanonisch gegeben, da  $(\alpha_*\mathcal{O})(\tilde{V}) = \mathcal{O}(\alpha^{-1}(\tilde{V})) = \mathcal{O}(V)$  eine  $k$ -Algebra ist.

Wir betrachten nun Morphismen. Für eine reguläre Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  von Varietäten hatten wir in (10.5) eine stetige Abbildung  $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$  definiert, die nach Definition das Diagramm

$$(10.6) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{V}' \end{array}$$

kommutativ macht. Hieraus erhalten wir einen Morphismus von Ringgarben

$$(10.7) \quad \tilde{\varphi}^\# : \alpha'_*\mathcal{O}_{V'} \rightarrow \tilde{\varphi}_*(\alpha_*\mathcal{O}_V)$$

wie folgt: Für  $W' \subseteq \tilde{V}'$  offen sei  $U' = (\alpha')^{-1}(W') \subseteq V'$  und  $U = \varphi^{-1}(U') \subseteq V$ . Dann definiere

$$\tilde{\varphi}_{W'}^\# : (\alpha')_*\mathcal{O}_{V'}(W') = \mathcal{O}_{V'}(U') \rightarrow \mathcal{O}_V(U) = (\tilde{\varphi}_*\alpha_*\mathcal{O}_V)(W')$$

dadurch, dass eine reguläre Funktion  $\psi \in \mathcal{O}_{V'}(U')$ , also  $\psi : U' \rightarrow k$ , auf  $\psi \circ \varphi|_U : U \rightarrow k$  abgebildet wird. Letztere Funktion ist regulär, also in  $\mathcal{O}_V(U)$ , da  $\varphi$  regulär ist. Beachte, dass  $\varphi^{-1}(U') = \varphi^{-1}(\alpha')^{-1}(W') = \alpha^{-1}\tilde{\varphi}^{-1}(W')$ . Diese Zuordnung ist verträglich mit Restriktionen, definiert also einen Morphismus (10.7). Schließlich ist die Zuordnung  $\varphi \mapsto (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#)$  verträglich mit Kompositionen  $V \xrightarrow{\varphi} V' \xrightarrow{\varphi'} V''$  von Morphismen und mit Identitäten.

Damit haben wir insgesamt einen Funktor

$$\begin{aligned} t : (k\text{-Varietäten}) &\rightarrow (k\text{-Schemata}) \\ V &\mapsto (\tilde{V}, \alpha_*\mathcal{O}) \\ \varphi &\mapsto (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#) \end{aligned}$$

definiert (Man sieht leicht, dass  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#)$  ein Morphismus von *lokal* geringten Räumen ist). Es bleibt noch die Volltreue zu zeigen, d.h., dass für zwei Varietäten  $V, V'$  die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Var}/k}(V, V') &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Sch}/k}(t(V), t(V')) \\ \varphi &\mapsto (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#) \end{aligned}$$

bijektiv ist.

Die Injektivität ist einfach: Sind  $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow V'$ , mit  $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ , so folgt bereits aus der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_i} & V' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} & \tilde{V}' \end{array}$$

für  $i = 1, 2$ , dass auch  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Die Surjektivität ist schwerer. Sei  $x \in \tilde{V}$ .

**Behauptung 4:**  $x$  ist genau dann abgeschlossen, wenn der Restklassenkörper  $k(x)$  gleich  $k$  ist (d.h., wenn die kanonische Abbildung  $k \rightarrow k(x)$  ein Isomorphismus ist).

**Beweis** Es genügt, dies auf den Mengen einer affinen Überdeckung zu zeigen; also ist ohne Einschränkung  $V$  affine Varietät, mit Koordinatenring  $A$ . Hier identifiziert sich  $V$  mit  $Max(A) \subseteq Spec(A) = \tilde{V}$ , und die Behauptung folgt aus Hilberts Nullstellensatz und der Tatsache, dass ein Primideal  $\mathfrak{p} \in Spec(A)$  genau dann ein abgeschlossener Punkt ist, wenn es maximal ist, da  $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ .

**Behauptung 5:** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von  $k$ -Schemata, sei  $x \in X$  und  $y = f(x) \in Y$ . Ist  $k(x) = k$ , so ist auch  $k(y) = k$ .

**Beweis:** Der Morphismus induziert einen Morphismus von lokalen  $k$ -Algebren  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ , und damit ein kommutatives Diagramm von Körperhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} k(y) & \hookrightarrow & k(x) \\ & \swarrow & \searrow \\ & k & \end{array}$$

Da Körperhomomorphismen injektiv sind, folgt die Behauptung.

Aus Behauptung 4 folgt, dass sich  $V \xrightarrow{\alpha} \tilde{V}$  mit der Menge der abgeschlossenen Punkte von  $\tilde{V}$  identifiziert, und aus Behauptung 5 folgt, dass ein Morphismus  $(f, f^\#) : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$  von  $k$ -Schemata die Teilmenge  $V$  in  $V'$  abbildet, also ein kommutatives Diagramm

$$(10.8) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \tilde{V} & \xrightarrow{f} & \tilde{V}' \end{array}$$

induziert, mit einer stetigen Abbildung  $\varphi$ .

**Behauptung 6:**  $\varphi$  ist eine reguläre Abbildung.

**Beweis:** Dies ist eine lokale Frage (auf  $V$  und  $V'$ ), und so können wir annehmen, dass  $V$  und  $V'$  affine  $k$ -Varietäten sind, mit Koordinatenringen  $A$  bzw.  $A'$ . Dann ist  $\tilde{V} = Spec(A)$  und  $\tilde{V}' = Spec(A')$  (als Schemata) und nach Corollar 10.3 gibt es einen  $k$ -Algebren-Homomorphismus  $\varepsilon : A' \rightarrow A$  so dass  $(f, f^\#) = \Psi(\varepsilon)$ , wobei  $\Psi(\varepsilon)$  wie im Beweis von Satz 10.1 definiert ist. Man sieht leicht, dass die unterliegende stetige Abbildung von  $\Psi(\varepsilon)$  durch

$$\begin{aligned} Spec(\varepsilon) : Spec(A) &\rightarrow Spec(A') \\ \mathfrak{p} &\mapsto \varepsilon^{-1}(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

gegeben ist. Also ist  $f = Spec(\varepsilon)$  und die Einschränkung  $\varphi : V = Max(A) \rightarrow Max(A') = V'$  durch die Abbildung  $\mathfrak{m} \mapsto \varepsilon^{-1}(\mathfrak{m})$  gegeben. Diese Abbildung ist aber regulär, und induziert auf den regulären Funktionen die Abbildung

$$\varepsilon : \mathcal{O}(V') \rightarrow \mathcal{O}(V).$$

Es bleibt nun zu zeigen:

**Behauptung 7**  $\varphi$  ist ein Urbild von  $(f, f^\#)$  unter  $t$ .

**Beweis:** Sei  $t(\varphi) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#)$  wie oben konstruiert. Wir haben zu zeigen, dass  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\#) = (f, f^\#)$ . Nach Definition von  $\tilde{\varphi}$  ist aber das Diagramm

$$(10.9) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{V}' \end{array}$$

kommutativ. Da  $V$  dicht in  $\tilde{V}$  liegt (die offenen Mengen in  $\tilde{V}$  und  $V$  entsprechen sich vermöge  $\tilde{U} \mapsto \tilde{U} \cap V$ ) und  $f$  und  $\tilde{\varphi}$  stetig sind, folgt  $f = \tilde{\varphi}$  durch Vergleich von (10.8) und (10.9).

Wir zeigen nun noch, dass  $f^\# = \tilde{\varphi}^\#$ . Dies ist wieder eine Frage, die lokal in  $V'$  ist, und auch lokal in  $V$  (wegen der Garbeneigenschaft von  $\mathcal{O}_{\tilde{V}} = \alpha_* \mathcal{O}_V$ ). Daher können wir wie im Beweis von Behauptung 6 annehmen, dass  $V$  und  $V'$  affin sind. Mit den dortigen Bezeichnungen ist dann nach Konstruktion von  $\tilde{\varphi}^\#$  die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{V}'}^\# : \mathcal{O}_{\tilde{V}'}(\tilde{V}') = \mathcal{O}(V') \rightarrow \mathcal{O}(V) = \mathcal{O}_{\tilde{V}}(\tilde{V})$$

ebenfalls gleich  $\varepsilon$ , genauso wie die Abbildung  $f_{V'}^\#$ , nach Voraussetzung. Aus der Eindeutigkeit in Corollar 10.3 folgt also auch  $\tilde{\varphi}^\# = f^\#$ . Damit ist Satz 10.18 bewiesen.

Wir untersuchen nun das essentielle Bild des Funktors

$$t : \text{Var}/k \rightarrow \text{Sch}/k$$

**Definition 10.19** (a) Ein  $k$ -Schema  $X$  heißt projektiv, wenn es isomorph zu  $\text{Proj}(S)$  für eine endlich erzeugte graduierte  $k$ -Algebra  $S$  ist.

(b) Ein  $k$ -Schema  $W$  heißt quasi-projektiv, wenn es isomorph zu einem offenen Unterschema eines projektiven  $k$ -Schemas ist.

**Definition 10.20** Ein Schema  $X$  heißt reduziert, wenn alle lokalen Ring  $\mathcal{O}_{X,x}$  reduziert sind.

**Lemma 10.21** Ein affines Schema  $X = \text{Spec}(A)$  ist genau dann reduziert, wenn  $A$  ein reduzierter Ring ist.

**Beweis** Ist  $A$  reduziert, so folgt sofort, dass für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$  auch die Lokalisierung  $A_{\mathfrak{p}}$  reduziert ist. Also sind alle lokalen Ringe von  $\text{Spec}(A)$  reduziert. Sind umgekehrt alle  $A_{\mathfrak{p}}$  reduziert, so folgt wegen der Injektivität der Abbildung

$$A \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}},$$

dass auch  $A$  reduziert ist.

**Definition 10.22** Das essentielle Bild eines Funktors

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

ist die volle Unterkategorie derjenigen  $B \in \text{ob}(B)$ , für die es einen Isomorphismus  $B \cong F(A)$  für ein  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$  gibt.

**Satz 10.23** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper

(a) Das essentielle Bild des in Satz 10.18 konstruierten volltreuen Funktors

$$t : \text{Var}/k \rightarrow \text{Sch}/k$$

ist die volle Unterkategorie der reduzierten quasi-projektiven  $k$ -Schemata.

(b) Für eine affine  $k$ -Varietät  $V$  ist  $t(V)$  ein reduziertes affines  $k$ -Schema.

(c) Für eine projektive  $k$ -Varietät  $V$  ist  $t(V)$  ein reduziertes projektives  $k$ -Schema.

**Beweis:** 1) Die Behauptung (b) hatten wir im Beweis von 10.18 gesehen. Ist  $V$  affin und  $A = \mathcal{O}(V)$  der Koordinatenring von  $V$ , so ist  $t(V) = \text{Spec}(A)$  als Schema. Weiter ist  $A$  reduziert.

2) Weiter gilt nach dem Beweis von 10.18 für eine  $k$ -Varietät  $V$  und eine offene Teilmenge  $U \subseteq V$  (man spricht auch von einer offenen Untervarietät von  $V$ ), dass

$$t(U) \subseteq t(V)$$

ein offenes Unterschema ist. Es genügt also, (c) zu zeigen.

3) Wir zeigen nun (c): Sei  $V$  eine projektive  $k$ -Varietät und sei  $S = \mathcal{O}_*(V)$  der homogene Koordinatenring (siehe 3.23). Dies ist eine reduzierte endlich erzeugte graduierte  $k$ -Algebra. Da die nicht-leeren irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von  $V$  nach 3.21 und 3.33 den homogenen Primidealen  $\mathfrak{q} \subseteq S$  entsprechen, die nicht ganz  $S_+$  enthalten, über die Zuordnung  $\mathfrak{q} \mapsto Z_+(\mathfrak{q})$ , gibt es eine kanonische Bijektion

$$(10.10) \quad \text{Proj}(S) \xrightarrow{\sim} \tilde{V} \quad , \quad \mathfrak{q} \mapsto Z_+(\mathfrak{q}) .$$

Da die abgeschlossenen Teilmengen von  $V$  bzw.  $\text{Proj}(S)$  die Mengen  $Z_+(\mathfrak{a})$  (bzw.  $V_+(\mathfrak{a})$ ) für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq S$  sind, ist (10.10) ein Homöomorphismus. Weiter ist der lokale Ring von  $\tilde{V}$  bei einem Punkt  $x$  gleich  $S_{(\mathfrak{p})}$ , wenn  $x$  dem homogenen Primideal  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$  entspricht. Für jedes homogene  $f \in S$  induziert (10.10) nach dem Beweis von 10.18 kanonische Isomorphismen von Schemata

$$\rho_f : D_+(f) \xrightarrow{\sim} t(D_+(f)) ,$$

wobei rechts die offene Untervarietät  $D_+(f) \subseteq V$  und links das offene Unterschema  $D_+(f) \subseteq \text{Proj}(S)$  gemeint ist. Für ein weiteres homogenes  $g \in S$  stimmen  $\rho_f$  und  $\rho_g$  auf  $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$  überein. Nach dem folgenden Lemma induzieren die  $\rho_f$  also einen Isomorphismus von Schemata

$$\text{Proj}(S) \xrightarrow{\sim} t(V) .$$

**Lemma 10.24** Seien  $X$  und  $Y$  Schemata.

(a) Die Zuordnung  $U \mapsto \text{Hom}(U, Y)$  (für  $U \subseteq X$  offen) mit den Restriktionen

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(U, Y) & \rightarrow & \text{Hom}(V, Y) \\ g & \mapsto & g|_V \end{array} \quad (\text{für } V \subseteq U)$$

bildet eine Garbe von Mengen auf  $X$ .

(b) Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus. Ist  $(V_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $Y$  und ist

$$f_i := f|_{f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$$

ein Isomorphismus für alle  $i \in I$ , so ist  $f$  ein Isomorphismus.

**Beweis:** (a) Siehe Übungsaufgabe 2, Blatt 13.

(b) Definiere  $g_i : V_i \xrightarrow{f_i^{-1}} f^{-1}(V_i) \hookrightarrow X$ . Diese Morphismen verkleben sich nach (a) zu einem Morphismus  $g : Y \rightarrow X$ . Dieser ist invers zu  $f$ , da dies nach Einschränkung auf  $V_i$  und  $f^{-1}(V_i)$  gilt, für alle  $i \in I$ .

Wir können also – für algebraisch abgeschlossenen  $k$  – die Kategorie der (quasi-projektiven)  $k$ -Varietäten mit der Kategorie der reduzierten quasi-projektiven  $k$ -Schemata identifizieren.

Dies macht die folgende Definition sinnvoll.

**Definition 10.25** Sei  $k$  ein beliebiger Körper, und sei  $X$  ein reduziertes  $k$ -Schema. Ist  $X$  projektiv (bzw. quasi-projektiv), so nennen wir  $X$  auch eine projektive (bzw. quasi-projektive)  $k$ -Varietät. Ist  $X = \text{Spec}(A)$  für eine (reduzierte) endlich erzeugte  $k$ -Algebra  $A$ , so nennen wir  $X$  eine affine  $k$ -Varietät. Ein offenes Unterschema einer affinen  $k$ -Varietät nennen wir auch eine quasi-affine  $k$ -Varietät.