Universität Regensburg
NWF I - Mathematik

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Patrick Forré

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 14

27. Januar 2009

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume.

a) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeigen Sie, dass $f_*\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y ist.

b) Ist $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusion. Zeigen Sie für die Halme:

$$(i_*\mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{für} \quad x \in Z, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin Z. \end{cases}$$

Vorsicht: Die letzte Gleichung gilt nicht für beliebige stetige Abbildungen, im Allgemeinen nicht einmal für Inklusionen von offenen Mengen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *reduziert*, falls für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist, d.h. keine echten nilpotenten Elemente enthält. Zeigen Sie:

a) Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $x \in X$ reduziert sind.

b) Ein affines Schema $\operatorname{Spec}(A)$ ist genau dann reduziert, wenn A reduziert ist.

c) Ein Schema X ist genau dann irreduzibel und reduziert, wenn $\mathcal{O}_X(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ein Integritätsring ist. In diesem Fall nennt man X *integer*.
Hinweis: Benutzen Sie die Mengen $U_f = \{x \in U \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. a) Jedes Schema X hat die T_0-Tennungseigenschaft und für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq X$ existiert ein eindeutig bestimmter generischer Punkt.

b) Sei X ein integres Schema und $\eta \in X$ der generische Punkt. Zeigen Sie, dass der Halm $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Körper ist. Dieser heißt *Funktionenkörper* von X.

c) Identifizieren Sie den Funktionenkörper $K(\operatorname{Spec}(A))$ eines affines Schemas $\operatorname{Spec}(A)$ mit dem Quotientenkörper $\operatorname{Quot}(A)$ von A.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Seien S und T graduierte Ringe und $\phi : S \to T$ ein graduierter Ringhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass $U := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(T) \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \phi(S_+)\}$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Proj}(T)$ ist und es einen kanonischen Morphismus von Schemata $\phi^* : U \to \operatorname{Proj}(S)$ gibt.

b) Sei $\phi_d : S_d \to T_d$ ein Isomorphismus für $d \geq d_0$ mit $d_0 \in \mathbb{Z}$ groß genug. Zeigen Sie, dass dann $U = \operatorname{Proj}(T)$ und $\phi^* : \operatorname{Proj}(T) \to \operatorname{Proj}(S)$ ein Isomorphismus von Schemata ist.

(4 Punkte)