Universität Regensburg
NWF I - Mathematik

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Patrick Forré

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 3

28. Oktober 2008

In allen Aufgaben sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ der affine Raum, versehen mit der Zariski-Topologie.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

a) Sind $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $Z' \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine k-Varietäten, so ist $Z \times Z' \subseteq \mathbb{A}^{m+n}(k)$ eine affine k-Varietät.

b) Die Teilraumtopologie auf $Z \times Z' \subseteq \mathbb{A}^{m+n}(k)$ ist feiner als die Produkttopologie.

c) Sind $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $U' \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ quasi-affine k-Varietäten, so ist $U \times U' \subseteq \mathbb{A}^{m+n}(k)$ eine quasi-affine k-Varietät.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

a) Eine nicht-leere Menge $U \subseteq \mathbb{A}^1(k)$ ist genau dann offen, wenn das Komplement endlich ist.

b) Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2(k) = \mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ ist echt feiner als die Produkttopologie bezüglich der beiden Faktoren.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\phi : Z \to Z'$ eine reguläre Abbildung zwischen affinen Varietäten, und sei

$$\Gamma(\phi) = \{(a,b) \in Z \times Z' \mid b = \phi(a)\}$$

der Graph von ϕ. Zeigen Sie:

a) $\Gamma(\phi)$ ist eine affine Varietät.

b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & Z & \to & \Gamma(\phi) \\ & & a & \mapsto & (a, \phi(a)) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von affinen Varietäten. Gilt dies auch für quasi-affine Varietäten?

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Neil'sche Parabel

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(k) \mid y^2 = x^3\}$$

nicht isomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie beispielsweise, dass $k[X,Y]/ < Y^2 - X^3 >$ kein Hauptidealring ist.

(4 Punkte)

Abgabe: 4. November 2008