Universität Regensburg
NWF I - Mathematik

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Patrick Forré

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 9

9. Dezember 2008

Aufgabe 1. Sei A ein Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathrm{Spec}(A)$ ist unzusammenhängend.

(ii) Es existieren nicht-triviale *orthogonale Idempotente*, d.h. nicht-triviale Elemente $e_1, e_2 \in A$ mit $e_1 \cdot e_2 = 0$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ und $e_1 + e_2 = 1$.

(iii) A ist isomorph zu $A_1 \times A_2$ mit nicht-trivialen Ringen A_1, A_2.

Hinweis: Setzen Sie für "'(ii) $\Rightarrow$ (iii)"': $A_i = A \cdot e_i$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. a) Sei k ein Körper und seien $f_1(T), \ldots, f_r(T) \in k[T]$ nicht-konstante Polynome. Zeigen Sie, dass der ganze Abschluss von $k[f_1(T), \ldots, f_r(T)]$ in $k(T)$ gleich $k[T]$ ist.

b) Für ganze Zahlen $p, q > 0$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ bestimme man die Normalisierung von $R = k[X, Y]/ < Y^p - X^q >$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \subseteq \mathbb{C}$. Zeige Sie, dass B über $\mathbb{Z}$ eine endliche Ringerweiterung ist und bestimmen Sie zu jedem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{Z}$ alle Primideale $\mathfrak{P} \subseteq B$ mit $\mathfrak{P} \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{p}$.
Hinweis: Schreiben Sie B als $\mathbb{Z}[X]/ < X^2 - 3 >$ und nutzen Sie den Satz über die Fasern.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Eine *abstrakte Varietät* ist ein topologischer Raum V zusammen mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von V und Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to V_i$ (genannt "Karten"), wobei V_i quasi-affine Varietäten sind. Dabei muss gelten, dass die "Kartenwechsel":

$$\varphi_{ij} := \varphi_{j|U_i \cap U_j} \circ \left(\varphi_{i|U_i \cap U_j}\right)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

Isomorphismen von quasi-affinen Varietäten sind. Zeigen Sie nun durch natürliche Wahl von Karten:

a) Ist X eine abstrakte Varietät, so auch alle abgeschlossenen und alle offenen Untervarietäten.

b) $\mathbb{P}^n(k)$ ist eine abstrakte Varietät und damit sind alle Varietäten abstrakt.

c) Sind X und Y abstrakte Varietäten, so ist auch $X \times Y$ eine abstrakte Varietät.

(4 Punkte)