Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen
Franziska Schneider

WS 11\12
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabe: Do, 12.01.2012 bis 10.00 Uhr

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Gruppen $SO(2)$ und $U(1)$ isomorph sind.
(Hinwei: Identifizieren Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\mathbb{R}^2$.)

Aufgabe 2. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zu $a \in V, a \neq 0$ definiere $s_a\colon V \longrightarrow V$ durch

$$s_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}a \quad (x \in V).$$

Zeigen Sie:

(i) s_a ist orthogonal

(ii) $s_a^2 = \mathrm{id}_V$

(iii) s_a ist selbstadjungiert

(iv) $s_a(a) = -a,\ s_a|_{(\mathbb{R}a)^\perp} = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}a)^\perp}$. Wir nennen s_a eine Spiegelung.

(v) Was lässt sich über die Eigenräume und Eigenwerte von s_a sagen?

Aufgabe 3. Sei $V = M_2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(A) \cdot \mathrm{Sp}(B)$$

eine symmetrische Bilinearform ist. Bestimmen Sie ihre darstellende Matrix bezüglich der Basis $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ von V.

Aufgabe 4. Eine symmetrische Bilinearform $\psi\colon V \times V \longrightarrow K$ auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum heißt *anisotrop*, falls für alle $v \in V$ gilt: $\psi(v, v) = 0 \ \Rightarrow\ v = 0$. Zeigen Sie:

(i) ψ ist anisotrop $\Longleftrightarrow$ Für alle Unterräume $W \subset V$ ist $\psi|_{W\times W}$ nicht-ausgeartet.

(ii) Sei ψ anisotrop und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Dann gilt:
$v_1, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\det\big(\psi(v_i, v_j)\big)_{i,j} \neq 0$.

Frohe Weihnachten!