Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen
Franziska Schneider

WS 11/12
Blatt 14

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabe: Do, 09.02.2012 bis 10.00 Uhr

Aufgabe 1. Die Menge $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \mathbb{Z} + i \cdot \sqrt{5} \subset \mathbb{C}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nicht faktoriell ist, indem Sie die Faktorisierung

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + i \cdot \sqrt{5}) \cdot (1 - i \cdot \sqrt{5})$$

betrachten:

(i) Zeigen Sie, dass die Elemente $2, 3, 1 + i \cdot \sqrt{5}, 1 - i \cdot \sqrt{5}$ irreduzibel und paarweise nichtassoziiert sind.

(ii) Welche dieser Elemente sind prim in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$?

Aufgabe 2. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Die Menge

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \;\mid\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ und p teilt nicht b} \right\}$$

bildet einen Unterring von $\mathbb{Q}$.

(i) Bestimmen Sie alle Ideale von $\mathbb{Z}_{(p)}$ und zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein Hauptidealring ist.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{(p)}$ bzgl der Abbildung

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{Z}_{(p)} \backslash \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ \frac{a}{b} &\mapsto \nu_p(a) \end{aligned}$$

ein euklidischer Ring ist, hierbei ist $\nu_p(x)$ für $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ die Potenz, in der p in der Primfaktorzerlegung von x auftritt.)

(ii) Bestimmen Sie (bis auf Assoziiertheit) alle Primelemente von $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Aufgabe 3. (i) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad höchstens 3 im Polynomring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

(ii) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms $X^4 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 4. Sei $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $U = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von M. Berechnen Sie die Elementarteiler a_1 und a_2 von U in M und geben Sie eine Basis $\{x_1, x_2\}$ von M an, so dass $U =< a_1x_1, a_2x_2 >_{\mathbb{Z}}$.