Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Uwe Jannsen
Franziska Schneider

WS 11\12
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabe: Do, 06.12.2011 bis 10.00 Uhr

Aufgabe 1. (i) Sei X eine Menge, $M := \mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge, geordnet mit " $\subseteq$ ", und sei $U \subseteq M$ eine nicht-leere Teilmenge. Bestimmen Sie Supremum und Infimum von U in M, falls diese existieren.

(ii) Sei $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Bestimmen Sie bezüglich der natürlichen Ordnung $\leq$ das Infimum und Supremum von M (falls diese existieren) sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass zu jedem Homomorphismus von Vektorräumen $f\colon V \longrightarrow W$ ein Paar (U, i) bestehend aus einem Vektorraum U und einem Homomorphismus $i\colon U \longrightarrow V$ mit $f \circ i = 0$ existiert, das folgender universellen Eigenschaft genügt:
Zu jedem Vektorraum T und jedem Homomorphismus $j\colon T \longrightarrow V$ mit $f \circ j = 0$ existiert genau ein Homomorphismus $k\colon T \longrightarrow U$ mit $j = i \circ k$.

Aufgabe 3. Prüfen Sie, ob es eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

(i) $\varphi(v \otimes w) = v + w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$,

(ii) $\varphi(v \otimes w) = (v_1 w_1 + v_1 w_2, -2 v_2 w_2)$ für alle $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$,

(iii) $\varphi(e_1 \otimes e_2) = \varphi(e_2 \otimes e_1) = \varphi(e_1 \otimes e_1) = e_1$ wobei (e_1, e_2) die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ ist. Ist die Abbildung φ eindeutig?

Aufgabe 4. Konstruieren Sie Beispiele für

(i) einen K-Vektorraum V, einen Unterraum $U \neq \{0\}$ von V und einen Isomorphismus $f\colon V \longrightarrow V/U$. Warum muss in diesem Beispiel V notwendigerweise unendlich-dimensional sein?

(ii) für jede ganze Zahl $n \geq 0$: einen unendlich-dimensionalen K-Vektorraum V und einen Unterraum U von V mit $\dim(V/U) = n$.
Kann man in jedem unendlich-dimensionalen K-Vektorraum V einen Unterraum U mit $\dim(V/U) = n$ finden?