Spektralgeometrie

Bernd Ammann, Andreas Hermann

Inhaltsverzeichnis

Quellenangaben

Das vorliegende Skript beruht auf einer Vorlesung von Bernd Ammann im Sommersemester 2008 an der Universität Regensburg zum Thema Spektralgeometrie. Andreas Hermann hat große Teile der Vorlesung getext und redigiert, wofür ihm herzlich gedankt sei. Die Vorlesung selber beruht auf den

Mitschrieben von Bernd Ammann einer sehr ähnlichen Vorlesung von Christian Bär an der Universität Freiburg.

1 Vorbemerkungen

2 Die Saite

Wir betrachten eine schwingende Saite der Länge $L > 0$, die an beiden Enden fest eingespannt ist. Ihre Auslenkung wird durch eine glatte Funktion $u \in C^\infty([0, L] \times \mathbb{R})$ beschrieben, welche die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

mit Dirichlet-Randbedingungen $u(0, t) = u(L, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ löst. Wir benutzen die Methode der Separation der Variablen und schreiben

$$u(x, t) = v(x)\varphi(t)$$

mit $v \in C^\infty([0, L])$ und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir erhalten

$$v''(x)\varphi(t) = v(x)\varphi''(t) \text{ und daher } \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}$$

für alle x, t. Da die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von t abhängt, sind beide Seiten gleich einer Konstanten $-\lambda$. Wir müssen daher lösen

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0.$$

1. Fall: $\lambda < 0$: Die allgemeine Lšoung ist dann gegeben durch

$$v(x) = a\cosh(\sqrt{|\lambda|}x) + b\sinh(\sqrt{|\lambda|}x)$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Aus den Randbedingungen $v(0) = v(L) = 0$ erhalten wir $a = b = 0$ und daher die uninteressante Lösung $u \equiv 0$.

2. Fall: $\lambda = 0$: Die allgemeine Lösung ist dann

$$v(x) = ax + b$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Aus den Randbedingungen $v(0) = v(L) = 0$ erhalten wir wieder $a = b = 0$ und daher wieder $u \equiv 0$.

3. Fall: $\lambda > 0$: Die allgemeine Lösung ist dann

$$v(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen $v(0) = 0$ erhalten wir $a = 0$. Aus $v(L) = 0$ ergibt sich $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ und daher $L = \frac{\pi k}{\sqrt{\lambda}}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten jetzt die zweite Differentialgleichung

$$\varphi''(t) + \lambda\varphi(t) = 0$$

im interessanten Fall $\lambda > 0$. Die allgemeine Lösung ist dann

$$\varphi(t) = r\cos(\sqrt{\lambda}t) + s\sin(\sqrt{\lambda}t)$$

mit Konstanten $r, s \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir daher

$$u(x,t) = (r\cos(\sqrt{\lambda}t) + s\sin(\sqrt{\lambda}t))\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

mit $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi k}{L}$, $k \in \mathbb{N}$. Allgemeiner ist eine Reihe der Form

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(r_k\cos\left(\frac{\pi kt}{L}\right) + s_k\sin\left(\frac{\pi kt}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)$$

eine Lösung, falls die Koeffizienten r_k, s_k für $k \to \infty$ schnell genug gegen 0 konvergieren. Diese Koeffizienten hänge können aus Anfangsdaten bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right), \\ u_1(x) &:= \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi k s_k}{L}\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen an diesem Beispiel, dass die Menge der möglichen Werte λ gleich der Menge der Eigenwerte von $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ist. Physikalisch ausgedrückt ist jedes solche λ ein Quadrat einer Schwingungsfrequenz.

Wir können die Gleichung (1) auch mit anderen Randbedingungen betrachten. Beispielsweise wird durch eine Lösung u mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die Schwingung der Luftsäule in einer Klarinette beschrieben. Wenn wir wie oben vorgehen, erhalten wir u wie oben mit $L = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Die möglichen Frequenzen sind somit von der Form $\frac{(2k+1)\pi}{2L}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir wollen die Gleichung (1) noch mit den periodischen Randbedingungen $u(0,t) = u(L,t)$ und $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ betrachten. Wir benutzen Separation der Variablen und erhalten eine Konstante λ wie oben.

1. Fall: $\lambda < 0$: Wir erhalten wieder $u \equiv 0$.

2. Fall: $\lambda = 0$: Dann ist $v''(x) = 0$ und $\varphi''(t) = 0$ für alle x, t. Daher ist u konstant, kann aber von null verschieden sein.

3. Fall: $\lambda > 0$: Wir schreiben die allgemeine Lösung jetzt als

$$v(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x) + b \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Randbedingung $u(0,t) = u(L,t)$ für alle t ergibt

$$v(0) = b, \quad v(L) = a \sin(\sqrt{\lambda} L) + b \cos(\sqrt{\lambda} L) = b.$$

Die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$ für alle t ergibt

$$v'(0) = a\sqrt{\lambda}, \quad v'(L) = a\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} L) - b\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} L) = a\sqrt{\lambda}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} L) & -\sin(\sqrt{\lambda} L) \\ \sin(\sqrt{\lambda} L) & \cos(\sqrt{\lambda} L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite beschreibt eine Drehung um den Winkel $\sqrt{\lambda} L$. Falls eine nichttriviale Lösung (a, b) existiert, so folgt $\sqrt{\lambda} L \in 2\pi\mathbb{Z}$ und daher $\lambda = \frac{4\pi^2 k^2}{L^2}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

In all diesen Beispielen kann man die Länge L “heraushören”, d.h. L kann aus dem Spektrum von $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ bestimmt werden.

3 Die schwingende Membran

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt und sei der Rand $\partial\Omega$ stückweise glatt. Eine am Rand von Ω fest eingespannte Membran wird durch eine Funktion u: $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben, welche die Wellengleichung

$$\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ löst. Hier ist Δ der Laplace-Operator

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Wenn wir wieder die Methode der Separation der Variablen benutzen, reduziert sich die Wellengleichung zu

$$\Delta v = \lambda v$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die explizite Berechnung der Eigenwerte von Δ auf einer beliebigen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie oben ist im allgemeinen schwierig. Wir werden uns in dieser Vorlesung unter anderem mit Abschätzungen dieser Eigenwerte beschäftigen.

Ein Beispiel, in dem man die Eigenwerte explizit bestimmen kann, ist das Rechteck $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$. Wir benutzen jetzt den Separationsansatz

$$v(x_1, x_2) = w_1(x_1)w_2(x_2)$$

und erhalten

$$\frac{w_1''(x_1)}{w_1(x_1)} + \frac{w_2''(x_2)}{w_2(x_2)} = -\lambda$$

und daher

$$\frac{w_1''(x_1)}{w_1(x_1)} = -\lambda - \frac{w_2''(x_2)}{w_2(x_2)}.$$

Da die linke Seite nur von x_1 und die rechte Seite nur von x_2 abhängt, sind beide Seiten gleich einer Konstanten $-\mu$. Die Gleichung

$$w_1''(x_1) + \mu w_1(x_1) = 0$$

mit den Randbedingungen $w_1(0) = 0 = w_1(L_1)$ liefert nur im Fall $\mu > 0$ eine nichttriviale Lösung. Daher sei ab jetzt $\mu > 0$. Es folgt $\sqrt{\mu} = \frac{\pi k}{L_1}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Ebenso liefert die Gleichung

$$w_2''(x_2) + (\lambda - \mu)w_2(x_2) = 0$$

mit den Randbedingungen $w_2(0) = 0 = w_2(L_2)$ nur im Fall $\lambda - \mu > 0$ eine interessante Lösung. Daher sei ab jetzt $\lambda > \mu$. Es folgt $\sqrt{\lambda - \mu} = \frac{\pi \ell}{L_2}$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ und daher

$$\lambda = \frac{\pi^2 \ell^2}{L_2^2} + \frac{\pi^2 k^2}{L_1^2}$$

mit $k, \ell \in \mathbb{N}$. Sei $L_1 \leq L_2$. Dann sind der kleinste Eigenwert λ_1 und der zweitkleinste Eigenwert λ_2 von Δ gleich

$$\lambda_1 = \pi^2 \Big(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \Big), \quad \lambda_2 = \pi^2 \Big(\frac{1}{L_1^2} + \frac{4}{L_2^2} \Big).$$

Wir erhalten daraus

$$L_1 = \sqrt{\frac{3\pi^2}{4\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad L_2 = \sqrt{\frac{3\pi^2}{\lambda_2 - \lambda_1}}.$$

Die Längen des Rechtecks sind daher durch das Spektrum von Δ bestimmt. Daher kann man fragen, ob das Spektrum von Δ bereits die Form von Ω bestimmt. Dies wollen wir im Folgenden näher untersuchen.

4 Der Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit und sei $i\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ die Inklusion. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt glatt, wenn es eine glatte Funktion $F\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $F \circ i = f$. Den Raum aller glatten Funktionen auf M bezeichnen wir mit $C^\infty(M)$. Weiter sei $\mathfrak{X}(M)$ der Raum aller glatten Vektorfelder auf M.

Sei $f \in C^\infty(M)$ und sei $p \in M$. Sei $F\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $F \circ i = f$ und sei $\operatorname{grad} F|_p \in \mathbb{R}^{n+k}$ der Gradient von F in p. Wir definieren den Gradienten von f in p durch

$$\operatorname{grad} f|_p := \operatorname{proj}_{T_pM}(\operatorname{grad} F|_p) \in T_pM,$$

wobei $\operatorname{proj}_{T_pM}\colon \mathbb{R}^{n+k} \to T_pM$ die orthogonale Projektion sei. Dies ist unabhängig von der Wahl von F, denn: Wähle $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v \in T_pM$. Dann gilt

$$\langle \operatorname{proj}_{T_pM}(\operatorname{grad} F|_p), v\rangle = \langle \operatorname{grad} F|_p, v\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(c(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t)).$$

Da $v \in T_pM$ beliebig ist und die rechte Seite nicht von der Wahl von F abhängt, folgt die Behauptung.

Wir erhalten daher einen Operator

$$\operatorname{grad}: \quad C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad f \mapsto \operatorname{grad} f$$

Sei M kompakt. Für $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ sei

$$(f_1, f_2)_{L^2(M)} := \int_M f_1(x) f_2(x)\, d\mu^M(x).$$

Dies definiert ein Skalarprodukt auf $C^\infty(M)$. Für $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ sei

$$(X_1, X_2)_{L^2(M)} := \int_M \langle X_1(x), X_2(x)\rangle\, d\mu^M(x).$$

Dies definiert ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{X}(M)$. Weiter sind durch

$$\|f\|_{L^2(M)} := \sqrt{(f,f)_{L^2(M)}}, \quad \|X\|_{L^2(M)} := \sqrt{(X,X)_{L^2(M)}}$$

Normen auf $C^\infty(M)$ und $\mathfrak{X}(M)$ definiert.

Der Operator grad: $C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ besitzt einen (formal) adjungierten Operator

$$\operatorname{div}: \quad \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

der wie folgt definiert ist: Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$. Definiere

$$(\operatorname{div} X)(p) := -\operatorname{Spur}(\underbrace{Y \mapsto (\nabla_Y X)_p}_{\in \operatorname{End}(T_pM)}).$$

Ist $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM, so gilt

$$(\operatorname{div} X)(p) := -\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} X\rangle_p.$$

Lemma 4.1. *Der Operator* div*:* $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ *ist (formal) adjungiert zu* grad*:* $C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$*, d.h. für alle* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *und für alle* $f \in C^\infty(M)$ *mit kompaktem Träger gilt*

$$(\operatorname{div} X, f)_{L^2(M)} = (X, \operatorname{grad} f)_{L^2(M)}.$$

Beweis. in Kapitel 5. □

Es gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$:

1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y)$
2. $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(X) - \langle \operatorname{grad} f, X\rangle$, denn sei $p \in M$ und $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= -\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i}(fX)\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, f\nabla_{e_i} X - (\partial_{e_i} f)X\rangle \\
&= f\operatorname{div}(X) - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, X\rangle \langle e_i, \operatorname{grad} f\rangle \\
&= f\operatorname{div}(X) - \langle \operatorname{grad} f, X\rangle.
\end{aligned}$$

Wir definieren den Laplace-Beltrami-Operator als

$$\Delta := \Delta^M := \operatorname{div}\operatorname{grad}.$$

Wichtige Eigenschaften: Seien $f, h \in C^\infty(M)$. Dann gilt

a) $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$

b) $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) = f\Delta h - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle$

c) $\Delta(fh) = (\Delta f)h + (\Delta h)f - 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle$

Beweis. a) und b) sind klar. c) folgt aus

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f)\\ &= f\Delta h - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle + h\Delta f - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle.\end{aligned}$$

□

Ausdruck von Δ in lokalen Koordinaten

Sei $p \in M$ und sei $\psi\colon V \to U := B_\varepsilon(p) \cap M$ eine lokale Parametrisierung von M um p mit einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren die Koordinatenvektorfelder $\partial_i \in \mathfrak{X}(U)$, $i \in \{1, ..., n\}$ durch

$$\partial_i|_q := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(\psi^{-1}(q) + tE_i).$$

Für $i, j \in \{1, ..., n\}$ definieren wir die Koeffizienten der Metrik durch

$$g_{ij}: \quad U \to \mathbb{R}, \quad g_{ij}(q) := \langle \partial_i|_q, \partial_j|_q\rangle.$$

Die Einträge der inversen Matrix $(g_{ij})^{-1}_{ij}$ bezeichnen wir mit g^{ij}. Für $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ definieren wir die Christoffel-Symbole $\Gamma^k_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

Es folgt für alle i, j, k:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^n g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) = \Gamma^k_{ji}.$$

Seien $\xi^1, ..., \xi^n\colon U \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^n \xi^j \partial_j$ auf U. Dann gilt

$$\partial_i f = \langle \operatorname{grad} f, \partial_i\rangle = \sum_{j=1}^n \xi^j \langle \partial_j, \partial_i\rangle = \sum_{j=1}^n \xi^j g_{ij}$$

Es folgt für alle j: $\xi^j = \sum_{i=1}^n g^{ij}\partial_i f$ und daher

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^n (g^{ij}\partial_i f)\partial_j.$$

Sei nun $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis von T_qM. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so dass für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt

$$\partial_i|_q = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k.$$

Es folgt für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$g_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{ik} a_{j\ell} \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = (AA^T)_{ij}.$$

Wir schreiben $A^{-1} = (b_{ij})_{ij}$. Es folgt für alle k: $e_k = \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} \partial_\ell|_q$. Sei nun $C \in \mathrm{End}(T_qM)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(C) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, Ce_i \rangle \\
&= \sum_{i,k,\ell=1}^{n} b_{ik} b_{i\ell} \langle \partial_k|_q, C\partial_\ell|_q \rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} (A^{-T} A^{-1})_{k\ell} \langle \partial_k|_q, C\partial_\ell|_q \rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} g^{k\ell} \langle \partial_k|_q, C\partial_\ell|_q \rangle.
\end{aligned}$$

Beispielsweise folgt daraus für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf U:

$$\mathrm{div}(X) = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \langle \partial_i, \nabla_{\partial_j} X \rangle.$$

Seien nun $\xi_1, ..., \xi_n \colon U \to \mathbb{R}$, so dass $X = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \partial_j$ auf U. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X) &= -\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} \langle \partial_i, \nabla_{\partial_j} (\xi^k \partial_k) \rangle \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} \langle \partial_i, (\partial_j \xi^k) \partial_k + \xi^k \nabla_{\partial_j} \partial_k \rangle \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} g_{ik} \partial_j \xi^k - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} g^{ij} \xi^k \Gamma_{jk}^{\ell} g_{i\ell} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \partial_i \xi^i - \sum_{i,k=1}^{n} \Gamma_{ik}^{i} \xi^k.
\end{aligned}$$

Insbesondere für $X = \operatorname{grad} f$ und $\xi^j = \sum_{i=1}^n g^{ij}\partial_i f$ erhalten wir mit

$$0 = \partial_k \sum_{\ell=1}^n g^{i\ell} g_{\ell r} = \sum_{\ell=1}^n (\partial_k g^{i\ell}) g_{\ell r} + \sum_{\ell=1}^n g^{i\ell}\partial_k g_{\ell r}$$

zunächst

$$\partial_k g^{ij} = -\sum_{r,s=1}^n g^{i\ell} g^{jr} \partial_k g_{\ell r}$$

und daraus (summiere über alle doppelten Indizes)

$$\begin{aligned}
\partial_i \xi^i &= (\partial_i g^{ki})\partial_k f + g^{ki}\partial_i\partial_k f \\
&= -g^{kr} g^{is}(\partial_i g_{rs})\partial_k f + g^{ki}\partial_i\partial_k f \\
&= -g^{kr} g^{is}(\langle \nabla_{\partial_i}\partial_r, \partial_s\rangle + \langle \partial_r, \nabla_{\partial_i}\partial_s\rangle)\partial_k f + g^{ki}\partial_i\partial_k f \\
&= -g^{kr} g^{is}\Gamma_{ir}^{\ell} g_{\ell s}\partial_k f - g^{kr} g^{is}\Gamma_{is}^{\ell} g_{\ell r}\partial_k f + g^{ki}\partial_i\partial_k f \\
&= -g^{kr}\Gamma_{ir}^{i}\partial_k f - g^{is}\Gamma_{is}^{k}\partial_k f + g^{ki}\partial_i\partial_k f.
\end{aligned}$$

Auf $U \subset M$ gilt daher

$$\Delta f = -\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i\partial_j f + \sum_{i,j,k=1}^n g^{ij}\Gamma_{ij}^k \partial_k f. \tag{2}$$

In der Literatur findet man auch folgenden Ausdruck von Δ auf U:

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i(\sqrt{\det(g)} g^{ij}\partial_j f).$$

Mit Hilfe der Produktregel rechnet man nach, dass dieser Ausdruck mit (2) übereinstimmt. Für die Ableitung der Determinante verwendet man dabei die folgende Aussage:

Lemma 4.2 ([3]). *Sei $t \mapsto g(t)$ eine differenzierbare Kurve von invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}\det(g) = \det(g)\mathrm{Spur}\Big(g^{-1}\frac{d}{dt}g\Big).$$

Beispiel 4.3. *Sei $M = \mathbb{R}^n$. Als lokale Parametrisierung können wir dann $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ wählen. Weiter gilt in jedem Punkt von $\mathbb{R}^n$, dass $g_{ij} = \delta_{ij}$ für alle i, j. Daher gilt $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ für alle i, j, k. Es folgt*

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Ausdruck von Δ in lokalen Orthonormalrahmen

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U von p in M, so dass auf U ein lokaler Orthononormalrahmen existiert. Ein solcher besteht aus Vektorfeldern $e_1, ..., e_n$, so dass in jedem $x \in U$ die Vektoren $e_1|_x, ..., e_n|_x$ eine Orthonormalbasis von T_xM bilden, d. h. in jedem $x \in U$ gilt

$$g(e_i|_x, e_j|_x) = \delta_{ij}.$$

Ist $f \in C^\infty(M)$, so folgt für alle $x \in U$

$$\operatorname{grad} f|_x = \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} f|_x, e_i|_x \rangle e_i|_x = \sum_{i=1}^n (\partial_{e_i} f)|_x e_i|_x.$$

Nach Definition der Divergenz folgt

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -\sum_{i,k=1}^n \langle e_i, \nabla_{e_i}((\partial_{e_k} f) e_k) \rangle \\
&= -\sum_{i,k=1}^n (\partial_{e_i} \partial_{e_k} f) \langle e_i, e_k \rangle - \sum_{i,k=1}^n (\partial_{e_k} f) \langle e_i, \nabla_{e_i} e_k \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} \partial_{e_i} f + \sum_{i,k=1}^n (\partial_{e_k} f) \langle \nabla_{e_i} e_i, e_k \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} \partial_{e_i} f + \sum_{i,k=1}^n \langle \nabla_{e_i} e_i, \operatorname{grad} f \rangle. \qquad (3)
\end{aligned}$$

5 Integralformeln

Satz 5.1 (Stokes). *Sei $\overline{M}$ orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form auf $\overline{M}$ mit kompaktem Träger und sei i $\partial M \hookrightarrow \overline{M}$ die Inklusion. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

Beweis. siehe z.B. [9], [8]. □

Satz 5.2 (Divergenzsatz von Gauß). *Sei $\overline{M}$ wie oben, nicht notwendig orientiert, sei ν das äußere Einheits-Normalenfeld des Randes. Dann gilt für alle $X \in \mathfrak{X}(\overline{M}) = \Gamma(T\overline{M})$ mit kompaktem Träger*

$$-\int_M \operatorname{div}(X)\, d\mu^M = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d\mu^{\partial M},$$

wobei $M := \overline{M} \setminus \partial M$.

Beweis mit Hilfe von 5.1. Sei $\overline{M}$ orientiert. Sei $p \in \partial M$. Sei $e_1, ..., e_n$ ein positiv orientierter Orthonormalrahmen von TM definiert auf einer offenen Umgebung $U \subset \overline{M}$ von p, so dass $e_1 = \nu$ auf U gelte. Das Volumenmaß der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \langle ., . \rangle)$ ist auf U gegeben durch die n-Form

$$d\mu^M = \mathrm{vol} = e_1^* \wedge ... \wedge e_n^*.$$

Das Volumenmaß der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\partial M, \langle ., . \rangle)$ ist auf U gegeben durch die $(n-1)$-Form

$$d\mu^{\partial M} = \mathrm{area} = \mathrm{vol}(\nu, .) = e_2^* \wedge ... \wedge e_n^*.$$

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben und seien $X_1, ..., X_{n-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Setze

$$\omega(X_1, ..., X_{n-1}) := \mathrm{vol}(X, X_1, ..., X_{n-1}).$$

Dann ist ω eine $(n-1)$-Form auf M.

Behauptung: $d\omega = -\mathrm{div}(X)\mathrm{vol}$.

Beweis: Es reicht, wenn wir überprüfen: Für alle $p \in M$ und für alle Vektorfelder $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{X}(M)$ mit

1. $X_1(p), ..., X_n(p)$ positiv orientierte Orthonormalbasis von T_pM
2. $\nabla_X X_i|_p = 0$ für $i = 1, ..., n$

gilt $d\omega(X_1, ..., X_n)|_p = -\mathrm{div}(X)\mathrm{vol}(X_1, ..., X_n)|_p$. Wegen

$$[X_i, X_j]|_p = \nabla_{X_i} X_j|_p - \nabla_{X_j} X_i|_p = 0$$

und nach Definition von d gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, ..., X_n)|_p &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \partial_{X_i} \omega(X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., X_n)|_p \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_n)|_p \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \partial_{X_i} \mathrm{vol}(X, X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., X_n)|_p. \end{aligned}$$

Für alle $Y, Y_1, ..., Y_n \in \mathfrak{X}(M)$ gilt nun

$$\nabla_Y \mathrm{vol}(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(Y_1, ..., Y_{i-1}, \nabla_Y Y_i, Y_{i+1}, ..., Y_n).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1,...,X_n)|_p &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{vol}(\nabla_{X_i}X, X_1,...,\widehat{X}_i,...,X_n)|_p \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}(-1)^{i+1}\langle\nabla_{X_i}X, X_k\rangle\mathrm{vol}(X_k, X_1,...,\widehat{X}_i,...,X_n)|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\langle\nabla_{X_i}X, X_i\rangle(-1)^{i+1}\mathrm{vol}(X_1,...,X_n)|_p \\
&= -\mathrm{div}(X)\mathrm{vol}(X_1,...,X_n)|_p.
\end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass

$$d\omega = -\mathrm{div}(X)\mathrm{vol} = -\mathrm{div}(X)\, d\mu^M.$$

Die Differentialform $i^*\omega$ ist eine $(n-1)$-Form auf ∂M. Seien nun $X_1,...,X_{n-1} \in \mathfrak{X}(\partial M)$

$$\begin{aligned}
i^*\omega(X_1,...,X_{n-1}) &= \omega(X_1,...,X_{n-1}) \\
&= \mathrm{vol}(X, X_1,...,X_{n-1}) \\
&= \mathrm{vol}(\langle X,\nu\rangle\nu, X_1,...,X_{n-1}) \\
&= \langle X,\nu\rangle\, d\mu^{\partial M}(X_1,...,X_{n-1}).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt für den Fall, dass $\overline{M}$ orientiert ist. Falls $\overline{M}$ nicht orientiert ist, sei $\widetilde{M}$ die orientierte Überlagerungsmannigfaltigkeit. Dann gilt

$$\begin{aligned}
-\int_M \mathrm{div}(X)\, d\mu^M &= -\frac{1}{2}\int_{\widetilde{M}} \mathrm{div}(\widetilde{X})\, d\mu^{\widetilde{M}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\widetilde{M}} \langle\widetilde{X},\widetilde{\nu}\rangle\, d\mu^{\partial\widetilde{M}} \\
&= \int_{\partial M} \langle X,\nu\rangle\, d\mu^{\partial M}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 5.3. *Ist M kompakt ohne Rand, so gilt für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\int_M \mathrm{div}(X)\, d\mu^M = 0.$$

Zum Beweis von Lemma 4.1 zeigen wir nun folgendes Lemma.

Lemma 5.4. *Sei $\overline{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, sei $M := \overline{M} \setminus \partial M$. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ und es gelte*

1. $\operatorname{supp}(f) \subset M$ *und* $\operatorname{supp}(f)$ *kompakt oder*
2. $\operatorname{supp}(X) \subset M$ *und* $\operatorname{supp}(X)$ *kompakt.*

Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, d\mu^M = \int_M \langle X, \operatorname{grad} f\rangle\, d\mu^M.$$

Beweis. Setze $Y := fX$. Dann ist $Y|_{\partial M} \equiv 0$. Nach dem Satz von Gauß folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial M} \langle Y, \nu\rangle\, d\mu^{\partial M} \\ &= -\int_M \operatorname{div}(Y)\, d\mu^M \\ &= -\int_M \operatorname{div}(fX)\, d\mu^M \\ &= \int_M \langle \operatorname{grad} f, X\rangle\, d\mu^M - \int_M f \operatorname{div}(X)\, d\mu^M. \end{aligned}$$

□

Satz 5.5 (Greensche Formeln)**.** *Sei $\overline{M}$ kompakt mit Rand ∂M, $f \in C^2(\overline{M})$, $h \in C^1(\overline{M})$. a) Dann gilt*

$$\int_{\overline{M}} (h\Delta f - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle)\, d\mu^M = -\int_{\partial M} h\partial_\nu f\, d\mu^{\partial M}.$$

b) Falls sogar $h \in C^2(\overline{M})$ ist, gilt

$$\int_{\overline{M}} (h\Delta f - f\Delta h)\, d\mu^M = -\int_{\partial M} (h\partial_\nu f - f\partial_\nu h)\, d\mu^{\partial M}.$$

Beweis. b) folgt aus a) durch Vertauschen der Rollen von f und h. Nun zu a): Sei $X = h \operatorname{grad} f$. Dann folgt

$$\operatorname{div}(X) = -\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle + h\Delta f$$

und daher

$$-\int_{\overline{M}} \operatorname{div}(X)\, d\mu^M = \int_M (h\Delta f - \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle)\, d\mu^M.$$

Andererseits folgt mit dem Satz von Gauß

$$-\int_{\overline{M}} \operatorname{div}(X)\, d\mu^M = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\, d\mu^{\partial M} = \int_{\partial M} h\partial_\nu f\, d\mu^{\partial M}.$$

□

6 Eigenwertprobleme

Wir unterscheiden folgende Probleme:

1. Dirichlet-Eigenwertproblem: Sei $\overline{M}$ eine zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$, so dass $\varphi \not\equiv 0$ und $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ auf M und $\varphi|_{\partial M} \equiv 0$.

2. Neumann-Eigenwertproblem: Sei $\overline{M}$ wie oben. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$, so dass $\varphi \not\equiv 0$ und $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ auf M und $\partial_\nu\varphi = 0$ auf ∂M.

3. geschlossenes Eigenwertproblem: Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand (geschlossene Mannigfaltigkeit). Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C^2(M)$, so dass $\varphi \not\equiv 0$ und $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ auf M.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. In den ersten beiden Fällen schreiben wir

$$E_\lambda := \{\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M}) | \Delta\varphi = \lambda\varphi \text{ und Randbedingungen } \}$$

im dritten Fall

$$E_\lambda := \{\varphi \in C^2(M) | \Delta\varphi = \lambda\varphi\}.$$

Gilt $E_\lambda \neq \{0\}$, so heißt λ ein Eigenwert, E_λ heißt der zugehörige Eigenraum, und die Elemente von E_λ heißen Eigenfunktionen.

Lemma 6.1. *Seien φ_1, φ_2 Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt*

$$\int_M \varphi_1\varphi_2 \, d\mu^M = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\int_M \varphi_1 \Delta\varphi_2 \, d\mu^M = \lambda_2 \int_M \varphi_1\varphi_2 \, d\mu^M, \quad \int_M \varphi_2 \Delta\varphi_1 \, d\mu^M = \lambda_1 \int_M \varphi_1\varphi_2 \, d\mu^M$$

und daher mit den Greenschen Formeln

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2) \int_M \varphi_1\varphi_2 \, d\mu^M &= \int_M (\varphi_2\Delta\varphi_1 - \varphi_1\Delta\varphi_2) \, d\mu^M \\ &= \int_{\partial M} (-\varphi_2\partial_\nu\varphi_1 + \varphi_1\partial_\nu\varphi_2) \, d\mu^{\partial M} \\ &= 0\end{aligned}$$

in allen drei Problemen. □

Lemma 6.2. *Für alle Eigenwerte λ gilt*

1. $\lambda \geq 0$
2. $\lambda = 0$ *genau dann, wenn die zugehörigen Eigenfunktionen lokal konstant sind.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda \underbrace{\int_M \varphi^2 \, d\mu^M}_{>0} &= \int_M \varphi \Delta \varphi \, d\mu^M \\
&= \underbrace{\int_M \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle \, d\mu^M}_{\geq 0} - \underbrace{\int_{\partial M} \varphi \partial_\nu \varphi \, d\mu^{\partial M}}_{=0}.
\end{aligned}$$

Es folgt $\lambda \geq 0$. Weiter sieht man: $\lambda = 0$ genau dann, wenn φ lokal konstant ist. □

Satz 6.3. *In jedem der drei Eigenwertprobleme gilt folgendes*

1. *Die Eigenwerte bilden eine diskrete abzählbare unbeschränkte Teilmenge in $\mathbb{R}$:*
$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty.$$
2. *Für jeden Eigenwert λ gilt $\dim E_\lambda < \infty$.*
3. *Für jeden Eigenwert λ gilt $E_\lambda \subset C^\infty(\overline{M})$, d.h. die Eigenfunktionen sind glatt und können auf ganz $\overline{M}$ definiert werden.*
4. *Die direkte Summe aller Eigenräume $\oplus_{j=1}^\infty E_{\lambda_j}$ ist dicht in $C^0(\overline{M})$ bezüglich der C^0-Topologie und damit insbesondere dicht in $L^2(M)$ bezüglich der L^2-Norm.*

Der Hilbert-Raum $L^2(M)$ besitzt also eine Hilbert-Raum-Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen.

Beweis. siehe z.B. [1] für Gebiete in $\mathbb{R}^n$. □

Beispiel 6.4. 1. *Sei $L > 0$ und sei $M = [0, L]$. Mit Dirichlet-Randbedingungen sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Δ gegeben durch*

$$\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_j = \sin\left(\frac{j\pi}{L}.\right), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Aus der Fourier-Analysis oder aus dem letzten Satz ist bekannt, dass $\oplus_{j=1}^{\infty}\mathbb{R}\varphi_j$ *dicht in*

$$\{f \in C^0(M) | f(0) = f(L) = 0\}$$

bezüglich der C^0*-Norm ist.*

2. *Sei* $L > 0$ *und sei* $M = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} = S^1_L$ *ein Kreis mit Umfang* L*. Der Eigenwert* $\lambda_0 = 0$ *hat die Vielfachheit* $\mathrm{mult}(0) = 1$*, die zugehörigen Eigenfunktionen sind die konstanten Funktionen. Für* $j = 1, 2, \ldots$ *erhält man*

$$\lambda_j = \left(\frac{2\pi j}{L}\right)^2, \quad \mathrm{mult}(\lambda_j) = 2$$

mit den Eigenfunktionen

$$\varphi_j(x) = \sin\left(\frac{2\pi jx}{L}\right), \quad \widetilde{\varphi}_j(x) = \cos\left(\frac{2\pi jx}{L}\right).$$

Aus dem Satz folgt, dass

$$\mathbb{R}\varphi_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}\varphi_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}\widetilde{\varphi}_j$$

dicht in $L^2(S^1_L)$ *bezüglich der* L^2*-Norm ist.*

Satz 6.5 (Stone-Weierstrass)**.** *Sei* M *ein kompakter topologischer Raum. Eine Unteralgebra* $\mathcal{A} \subset C^\infty(M, \mathbb{K})$*, wobei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *ist, ist dicht in* $C^0(M, \mathbb{K})$*, falls die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\mathcal{A}$ *enthält konstante Funktionen, d.h.* $1 \in \mathcal{A}$*,*
2. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$*, falls* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*,*
3. $\mathcal{A}$ *trennt Punkte, d.h. für alle* $x, y \in M$ *mit* $x \neq y$ *gibt es ein* $f \in \mathcal{A}$ *mit* $f(x) \neq f(y)$*.*

Beweis. siehe [6], 7.3.1. □

Beispiel 6.6. *Flache Tori: Sei* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *eine Untergruppe von* $\mathbb{R}^n$*, die diskret und isomorph zu* $\mathbb{Z}^n$ *ist, ein sogenanntes Gitter. Der Quotient* $\mathbb{R}^n/\Gamma$ *mit der Quotiententopologie ist kompakt und trägt die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Die euklidische Metrik auf* $\mathbb{R}^n$ *induziert eine riemannsche Metrik* g *auf* $\mathbb{R}^n/\Gamma$*. Das Paar* $(\mathbb{R}^n/\Gamma, g)$ *heißt der flache Torus zum Gitter* Γ*.*

Es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ *von* $\mathbb{R}^n$*, so dass*

$$\Gamma = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \Big| a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Sei $(b_1^*, ..., b_n^*)$ *die dazu duale Basis von* $\mathbb{R}^n$*, d.h. für alle* i, j *gelte* $\langle b_i^*, b_j \rangle = \delta_{ij}$*. Das zu* Γ *duale Gitter ist definiert durch*

$$\Gamma^* = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} a_j b_j^* \Big| a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z} \Big\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \gamma \in \Gamma : \ \langle x, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Satz 6.7. *Der Laplace-Operator hat auf* $\mathbb{R}^n/\Gamma$ *das Spektrum*

$$\{4\pi^2|\gamma|^2| \, \gamma \in \Gamma^*\}$$

und ein Eigenwert λ *hat die Multiplizität*

$$\mathrm{mult}(\lambda) = \#\{\gamma \in \Gamma^* | \lambda = 4\pi^2|\gamma|^2\},$$

insbesondere $\mathrm{mult}(0) = 1$ *und* $\mathrm{mult}(\lambda)$ *gerade, falls* $\lambda > 0$.

Beweis. a) Wir komplexifizieren

$$\Delta : \quad C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

und erhalten

$$\Delta_{\mathbb{C}} : \quad C^\infty(M, \mathbb{C}) \to C^\infty(M, \mathbb{C}),$$

definiert durch $\Delta_{\mathbb{C}}(u + iv) := \Delta u + i\Delta v$.

b) Für jedes $\gamma \in \Gamma^*$ definieren wir die Funktion

$$f_\gamma : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad f_\gamma(x) := e^{2\pi i \langle \gamma, x \rangle}.$$

Die Funktionen f_γ sind Γ-periodisch, und daher existieren Funktionen

$$F_\gamma : \quad \mathbb{R}^n/\Gamma \to \mathbb{C},$$

so dass

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "f_\gamma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C} \\
& \mathbb{R}^n/\Gamma \arrow[ur, "F_\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

c) Sei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Für jedes $\gamma \in \Gamma^*$ gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\mathbb{C}} F_\gamma) \circ \pi &= \Delta_{\mathbb{C}}(F_\gamma \circ \pi) \\
&= \Delta_{\mathbb{C}} f_\gamma \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2} e^{2\pi i \langle \gamma, x\rangle} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} (2\pi i \langle \gamma, e_j\rangle e^{2\pi i \langle \gamma, x\rangle}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 4\pi^2 \langle \gamma, e_j\rangle \langle \gamma, e_j\rangle f_\gamma \\
&= 4\pi^2 \|\gamma\|^2 f_\gamma \\
&= 4\pi^2 \|\gamma\|^2 F_\gamma \circ \pi
\end{aligned}$$

und daher $\Delta_{\mathbb{C}} F_\gamma = 4\pi^2 \|\gamma\|^2 F_\gamma$.

d) Wir zeigen, dass $(F_\gamma | \gamma \in \Gamma^*)$ eine orthogonale Familie ist. Seien dazu $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \Gamma^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}) &= \int_{\mathbb{R}^n/\Gamma} \overline{F_{\gamma_1}(x)} F_{\gamma_2}(x)\, d\mu \\
= \int_{[0,1]^n} &\overline{F_{\gamma_1}(t_1 b_1 + ... + t_n b_n)} F_{\gamma_2}(t_1 b_1 + ... + t_n b_n) |\det(b_1, ..., b_n)| dt_1 ... dt_n \\
= \int_{[0,1]^n} &\exp\Big(2\pi i \langle \gamma_2 - \gamma_1, \sum_{i=1}^{n} t_i b_i\rangle\Big) |\det(b_1, ..., b_n)| dt_1 ... dt_n
\end{aligned}$$

Es gibt ein i mit $\langle \gamma_2 - \gamma_1, b_i\rangle \neq 0$, o.E. $i = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
(F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}) &= \overbrace{\int_0^1 e^{2\pi i t_1 \langle \gamma_2 - \gamma_1, b_1\rangle} dt_1}^{=0} \\
&\quad \times \int_{[0,1]^{n-1}} \exp\Big(2\pi i \langle \gamma_2 - \gamma_1, \sum_{i=2}^{n} t_i b_i\rangle\Big) |\det(b_1, ..., b_n)| dt_2 ... dt_n,
\end{aligned}$$

und daher gilt für $\gamma_1 \neq \gamma_2$, dass $(F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}) = 0$ ist und insbesondere F_{γ_1}, F_{γ_2} linear unabhängig sind.

e) Da für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$ gilt $F_{\gamma_1} F_{\gamma_2} = F_{\gamma_1 + \gamma_2}$, ist $\mathcal{A} := \oplus_{\gamma \in \Gamma^*} \mathbb{C} F_\gamma$ eine Unteralgebra von $C^0(\mathbb{R}^n/\Gamma, \mathbb{C})$. Offensichtlich enthält $\mathcal{A}$ konstante Funktionen. Da für alle $\gamma \in \Gamma^*$ gilt $\overline{F}_\gamma = F_{-\gamma}$, ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter komplexer

Konjugation. Weiterhin trennt $\mathcal{A}$ Punkte, denn seien $x \neq \in \mathbb{R}^n/\Gamma$. Dann gibt es $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$y - x = \sum_{j=1}^{n} t_j b_j,$$

und so dass nicht alle t_j ganze Zahlen sind. Wähle ein j mit $t_j \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\frac{F_{b_j^*}(y)}{F_{b_j^*}(x)} = e^{2\pi i \langle b_j^*, y-x\rangle} = e^{2\pi i t_j} \neq 1.$$

Nach Satz 6.5 ist $\mathcal{A}$ dicht in $C^0(\mathbb{R}^n/\Gamma, \mathbb{C})$. Daher gibt es keine weiteren Eigenfunktionen von Δ. □

Wir fragen nun, ob das Spektrum von Δ den flachen Torus bis auf Isometrie bestimmt. Hierbei sind zwei flache Tori $\mathbb{R}^n/\Gamma_1$ und $\mathbb{R}^n/\Gamma_2$ genau dann isometrisch, wenn es eine Isometrie A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A(\Gamma_1) = \Gamma_2$ gilt.

Im Fall $n = 1$ lautet die Antwort auf obige Frage "Ja", denn wie wir bereits gesehen haben, hat Δ auf $S^1_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ das Spektrum $\{\frac{4\pi^2 k^2}{L^2} | k \in \mathbb{Z}\}$.

Satz 6.8. *Flache Tori der Dimension 2 mit demselben Spektrum von Δ sind isometrisch.*

Beweis. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein Gitter. Wir rekonstruieren Γ^* und somit Γ aus dem Spektrum wie folgt

1. Rekonstruiere die Länge des ersten Basisvektors.

2. Rekonstruiere die Länge des zweiten Basisvektors.

3. Rekonstruiere den Winkel zwischen diesen.

Dies geschieht in den folgenden beiden Lemmata. □

Definition 6.9. *Ein Vektor $\gamma \in \Gamma^*$ heißt primitiv, falls für alle $k \in \mathbb{Z}$ und für alle $\widetilde{\gamma} \in \Gamma^*$ mit $k\widetilde{\gamma} = \gamma$ folgt, dass $k = \pm 1$ gilt.*

Lemma 6.10. *Zu jedem primitiven Vektor $\gamma \in \Gamma^*$ gibt es einen primitiven Vektor $\widetilde{\gamma} \in \Gamma^*$, so dass $\Gamma^* = \mathbb{Z}\gamma \oplus \mathbb{Z}\widetilde{\gamma}$.*

Beweis. Sei b_1^*, b_2^* eine Basis von Γ^*. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$, so dass $\gamma = rb_1^* + sb_2^*$. Da γ primitiv ist, sind r, s teilerfremd. Daher existieren $k, \ell \in \mathbb{Z}$, so dass $rk + \ell s = 1$, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} r & -\ell \\ s & k \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Setzt man daher $\widetilde{\gamma} := -\ell b_1^* + k b_2^*$, so sind $\gamma, \widetilde{\gamma}$ linear unabhängig und wegen $rk + \ell s = 1$ sind k, ℓ teilerfremd, d.h. $\widetilde{\gamma}$ ist primitiv. □

Zu Schritt 1: Wähle ein $\gamma_1 \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ mit kürzester Länge. Dann ist γ_1 primitiv. Nach dem Lemma gibt es ein primitives $\widetilde{\gamma}_1$, so dass $\Gamma^* = \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\widetilde{\gamma}_1$. Indem wir gegebenenfalls die Rollen von $\gamma_1, \widetilde{\gamma}_1$ vertauschen oder γ_1 durch $-\gamma_1$ ersetzen, können wir annehmen, dass

$$0 \leq -\langle \widetilde{\gamma}_1, \gamma_1 \rangle < \|\gamma_1\|^2 \leq \|\widetilde{\gamma}_1\|^2.$$

Lemma 6.11. *Unter dieser Voraussetzung gilt:*

1. *Für alle $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt $\|a\widetilde{\gamma}_1 + b\gamma_1\| \geq \|\widetilde{\gamma}_1 + \gamma_1\|$*
2. *Falls für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Gleichheit gilt, so folgt $|a| = |b| = 1$.*
3. *Falls für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Gleichheit gilt und zusätzlich $\langle \gamma_1, \widetilde{\gamma}_1 \rangle \neq 0$, so folgt $a = b = 1$ oder $a = b = -1$.*

Beweis. Zu 1: Angenommen, es gäbe $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so dass

$$\|a\widetilde{\gamma}_1 + b\gamma_1\|^2 < \|\gamma_1 + \widetilde{\gamma}_1\|^2.$$

Es folgt

$$a^2\|\widetilde{\gamma}_1\|^2 - 2ab\,|\langle \gamma_1, \widetilde{\gamma}_1 \rangle| + b^2\|\gamma_1\|^2 < \|\gamma_1\|^2 - 2|\langle \gamma_1, \widetilde{\gamma}_1 \rangle| + \|\widetilde{\gamma}_1\|^2$$

und daher

$$(a^2 - 1)\|\widetilde{\gamma}_1\|^2 + (b^2 - 1)\|\gamma_1\|^2 < 2(ab - 1)|\langle \gamma_1, \widetilde{\gamma}_1 \rangle|. \tag{4}$$

Nach Voraussetzung ist

$$(a^2 - 1)\|\gamma_1\|^2 \leq (a^2 - 1)\|\widetilde{\gamma}_1\|^2$$

und daher

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - 2)\|\gamma_1\|^2 &\leq (a^2 - 1)\|\widetilde{\gamma}_1\|^2 + (b^2 - 1)\|\gamma_1\|^2 \\ &< 2(ab - 1)|\langle \gamma_1, \widetilde{\gamma}_1 \rangle| \\ &\leq 2(|ab| - 1)\|\gamma_1\|^2. \end{aligned}$$

Es folgt $(|a| - |b|)^2 < 0$, ein Widerspruch.

Zu 2: Analog zu oben erhält man $(|a| - |b|)^2 \leq 0$.

Zu 3: Wegen $\langle \gamma_1, \widetilde{\gamma}_1 \rangle \neq 0$ folgt aus (4), dass $ab > 0$ gilt. Daher können wir in den folgenden Abschätzungen $|ab|$ durch ab ersetzen. □

Zu Schritt 2: Wähle einen kürzesten Vektor γ_2 in $\Gamma \setminus \mathbb{Z}\gamma_1$. Dann ist γ_2 primitiv und von der Form $\gamma_2 = a\widetilde{\gamma}_1 + b\gamma_1$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Nach dem Lemma folgt

$$\gamma_2 \in \{\widetilde{\gamma}_1, -\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_1 + \gamma_1, -\widetilde{\gamma}_1 - \gamma_1\}.$$

Zu Schritt 3: Die Länge des kürzesten Vektors in $\Gamma \setminus (\mathbb{Z}\gamma_1 \cup \mathbb{Z}\gamma_2)$ bestimmt den Winkel.

7 Minimax-Prinzipien

Sei $\overline{M}$ zusammenhängend und kompakt mit glattem Rand ∂M, wobei $\partial M = \emptyset$ möglich ist. Seien

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \to \infty$$

die Eigenwerte von Δ auf M für eines der Eigenwert-Probleme (Dirichlet, Neumann, geschlossen). Alle Eigenwerte werden mit ihrer Multiplizität wiederholt. Sei B eine der Randbedingungen von oben. Wir verwenden die Sprechweise

$$\begin{aligned} & f \text{ Eigenfunktion zum Eigenwert } \lambda \\ :\Longleftrightarrow \; & f \text{ Eigenvektor von } \Delta \text{ zum Eigenwert } \lambda \text{ mit Randbedingung } B \end{aligned}$$

und die Bezeichnung

$$C_B^\infty(\overline{M}) := \{\varphi \in C^\infty(\overline{M}) | \varphi \text{ erfüllt } B\}.$$

Wir definieren nun

$$Q: \quad C_B^\infty(\overline{M}) \times C_B^\infty(\overline{M}) \to \mathbb{R}, \quad Q(f,h) := (\Delta f, h).$$

Q ist bilinear, symmetrisch und positiv semidefinit.

Satz 7.1 (Rayleigh)**.** *Sei $\varphi_1, \varphi_2, ...$ eine L^2-Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ Sei $f \in C_B^\infty(\overline{M})$, $f \not\equiv 0$, und sei $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \in \{1, ..., k-1\}$ gilt $(f, \varphi_j) = 0$. Dann gilt*

$$\lambda_k \leq \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn f eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k ist.

Beweis. a) Schreibe $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j$, wobei $\alpha_j = (f, \varphi_j)$. Es gilt

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{1=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_j (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2.$$

Sei nun $\alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$. Es folgt für alle $\ell \geq k$

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(f - \sum_{i=k}^{\ell} \alpha_i \varphi_i, f - \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j \varphi_j) \\ &= Q(f, f) - 2 \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j \underbrace{Q(\varphi_j, f)}_{=\lambda_j \alpha_j} + \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j \underbrace{Q(\varphi_i, \varphi_j)}_{=\lambda_j \delta_{ij}} \\ &= Q(f, f) - \sum_{j=k}^{\ell} \lambda_j \alpha_j^2 \end{aligned}$$

und deshalb

$$Q(f, f) \geq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j^2 = \lambda_k \|f\|_{L^2}^2.$$

b) Gilt $Q(f, f) = \lambda_k \|f\|_{L^2}^2$, so folgt

$$\sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 = \lambda_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j^2.$$

Für jedes j mit $\lambda_j > \lambda_k$ ist daher $\alpha_j = 0$. Sei nun $\ell \geq k$, so dass

$$\lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_\ell < \lambda_{\ell+1}.$$

Dann ist $f = \sum_{j=k}^{\ell} \alpha_j \varphi_j$ und daher $\Delta f = \lambda_k f$.

c) Sei umgekehrt $\Delta f = \lambda_k f$. Dann folgt sofort $Q(f, f) = \lambda_k \|f\|_{L^2}^2$. □

Satz 7.2 (Min-Max-Prinzip)**.** *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lambda_k = \min_{\substack{V \subset C_B^\infty(\overline{M}) \\ \dim V = k}} \max_{f \in V \setminus \{0\}} \frac{Q(f, f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Sei $V \subset C_B^\infty(\overline{M})$ ein Untervektorraum der Dimension k und sei $f \in V \setminus \{0\}$. Dann gilt für jedes $\alpha > 0$:

$$\frac{Q(\alpha f, \alpha f)}{\|\alpha f\|_{L^2}^2} = \frac{Q(f, f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Es folgt

$$\max_{f\in V\setminus\{0\}} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2} = \max_{f\in V,\|f\|_{L^2}=1} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2},$$

und da $\{f \in V \,|\, \|f\|_{L^2} = 1\}$ kompakt ist, wird das Maximum angenommen. Mit dem Minimax-Prinzip kann man die Eigenwerte beschreiben, ohne die Eigenfunktionen zu kennen.

Beweis. a) Sei $V \subset C_B^\infty(\overline{M})$ ein Untervektorraum der Dimension k und sei

$$W := V \cap \operatorname{span}\{\varphi_1, ..., \varphi_{k-1}\}^\perp.$$

Dann ist $\dim W \geq 1$, und daher existiert ein $f_W \in W$ mit $f_W \not\equiv 0$. Weiter gilt für alle $j \in \{1, ..., k-1\}$, dass $(f_W, \varphi_j) = 0$. Nach Satz 7.1 folgt

$$\lambda_k \leq \frac{Q(f_W, f_W)}{\|f_W\|_{L^2}^2}$$

und daher

$$\lambda_k \leq \inf_{\substack{V\subset C_B^\infty(\overline{M})\\ \dim V=k}} \max_{f\in V\setminus\{0\}} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

b) Sei $V_0 := \operatorname{span}\{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ und sei $f \in V_0 \setminus \{0\}$, $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i$. Es folgt

$$Q(f,f) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i\alpha_j Q(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = \lambda_k \|f\|_{L^2}^2$$

und daher

$$\max_{f\in V_0\setminus\{0\}} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2} \leq \lambda_k.$$

Wegen $\dim V_0 = k$ wird das Infimum in der letzten Ungleichung in Teil a) angenommen und ist gleich λ_k. □

Satz 7.3 (Max-Min-Prinzip). *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lambda_k = \max_{\substack{V\subset C_B^\infty(\overline{M})\\ \dim V=k-1}} \inf_{\substack{f\in C_B^\infty(\overline{M})\setminus\{0\}\\ f\perp V}} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Bemerkung 7.4. *Aus dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt, dass das Infimum angenommen wird.*

Beweis. a) Sei $V \subset C_B^\infty(\overline{M})$ ein Untervektorraum der Dimension $k-1$ und sei

$$W := \operatorname{span}\{\varphi_1, ..., \varphi_k\} \cap V^\perp.$$

Dann ist $\dim W \geq 1$ und daher existiert ein $f_0 \in W \setminus \{0\}$. Wir schreiben $f_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i$. Es folgt

$$Q(f_0, f_0) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \alpha_j Q(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = \lambda_k \|f_0\|_{L^2}^2$$

und daher

$$\sup_{\substack{V \subset C_B^\infty(\overline{M}) \\ \dim V = k-1}} \inf_{\substack{f \in C_B^\infty(\overline{M}) \setminus \{0\} \\ f \perp V}} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2} \leq \lambda_k.$$

b) Sei $V_0 := \operatorname{span}\{\varphi_1, ..., \varphi_{k-1}\}$. Dann folgt nach Satz 7.1

$$\lambda_k \leq \inf_{f \in C_B^\infty(\overline{M}) \cap (V_0^\perp \setminus \{0\})} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}$$

Wegen $\dim V_0 = k-1$ wird das Supremum in der letzten Ungleichung in Teil a) angenommen und ist gleich λ_k. □

8 Knotengebiete

Definition 8.1. *Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Dann heißt $f^{-1}(0)$ Knotenmenge von f. Die Zusammenhangskomponenten von $M \setminus f^{-1}(0)$ nennt man Knotengebiete.*

Die Menge $f^{-1}(0)$ ist abgeschlossen. Außerdem benutzen wir ohne Beweis die folgende Aussage: Falls f eine Eigenfunktion zu einem Wert $\lambda \neq 0$ ist, dann ist das Innere der Menge $f^{-1}(0)$ leer. Diese Aussage gilt auch, wenn $\lambda = 0$ ist und M zusammenhängend ist.

Satz 8.2 (Courantscher Knotengebietssatz)**.** *Sei $\overline{M}$ eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, wobei eventuell $\partial M = \emptyset$. Seien $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ die Dirirchlet-Eigenwerte und $\varphi_1, \varphi_2, ...$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann hat φ_k höchstens k Knotengebiete.*

Beispiel 8.3. *Sei $M = [0, L]$. Dann gilt $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$ und $\varphi_k(x) = \sin(\frac{\pi k x}{L})$ für alle $k \geq 1$. Man sieht, dass φ_k genau k Knotengebiete hat.*

Korollar 8.4. *φ_1 hat genau ein Knotengebiet, d. h. es gilt $\varphi_1 \geq 0$ oder $\varphi_1 \leq 0$.*

Sei nun o. B. d. A. $\varphi_1 \geq 0$ und sei $\varphi_1, \varphi_2, ...$ eine L^2-Orthononormalbasis aus Eigenvektoren. Falls für ein $k \geq 2$ gilt $\varphi_k \geq 0$, so ist

$$0 = \int_M \varphi_1 \varphi_k \,\mathrm{dV} > 0 \text{ oder } \varphi_1^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap \varphi_k^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Im ersten Fall ergibt sich ein Widerspruch, im zweiten Fall folgt

$$\varphi_1^{-1}(0) \cup \varphi_k^{-1}(0) = M$$

und daher $M \setminus \varphi_1^{-1}(0) \subset \varphi_k^{-1}(0)$. Jedoch ist $M \setminus \varphi_1^{-1}(0)$ offen. Es folgt $M \setminus \varphi_1^{-1}(0) = \emptyset$ und daher $\varphi_1 \equiv 0$. Auch dies ist ein Widerspruch. Wir haben daher folgendes gezeigt.

Korollar 8.5. *Sei $k \geq 2$. Dann existieren $x_1, x_2 \in M$, so dass $\varphi_k(x_1) < 0 < \varphi_k(x_2)$, d. h. φ_k wechselt das Vorzeichen.*

Weiter erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 8.6. *Es gilt $\lambda_1 < \lambda_2$.*

Beweis. Sonst wäre φ_2 eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 und daher $\varphi_2 \geq 0$ oder $\varphi_2 \leq 0$. □

Nun zum Beweis des Knotengebietssatzes. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\Omega \subset M$ offen. Sei $C_c^\infty(\Omega)$ der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in Ω.

Definition 8.7. *Der Grundton von Ω ist definiert als*

$$\lambda^*(\Omega) = \inf_{f \in C_c^\infty(\Omega), f \not\equiv 0} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Lemma 8.8. *Ist Ω zusammenhängend, beschränkt und mit glattem Rand $\partial\Omega$, so ist $\lambda^*(\Omega)$ der kleinste Dirichlet-Eigenwert von $\overline{\Omega}$.*

Beweis. Zeige zunächst $\lambda_1(\overline{\Omega}) \leq \lambda^*(\Omega)$. Nach dem Max-Min-Prinzip 7.3 gilt für den kleinsten Dirichlet-Eigenwert

$$\lambda_1(\overline{\Omega}) = \inf_{f \in C_B^\infty(\Omega), f \not\equiv 0} \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}.$$

Wegen $C_c^\infty(\Omega) \subset C_B^\infty(\Omega)$ folgt $\lambda_1(\overline{\Omega}) \leq \lambda^*(\Omega)$.

Zeige nun $\lambda_1(\overline{\Omega}) \geq \lambda^*(\Omega)$. Man kann die Beweisidee kurz folgendermaßen zusammenfassen. Wir definieren auf $C_B^\infty(\Omega)$ die Norm

$$\|f\|_H := \sqrt{Q(f,f)} + \|f\|_{L^2}$$

und bezeichnen mit $H_0(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_B^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|.\|_H$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0(\Omega)$ und die Abbildung

$$(C_B^\infty(\Omega) \setminus \{0\}, \|.\|_H), \quad f \mapsto \frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2}$$

hat eine stetige Fortsetzung $H_0(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Wir geben aber jetzt einen ausführlichen Beweis der Abschätzung. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine glatte Funktion φ_ε: $\mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq \varepsilon \\ 0, & t \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{und } |\varphi_\varepsilon'(t)| \leq \frac{3}{\varepsilon} \text{ für alle } t.$$

Definiere nun

$$\rho_\varepsilon : \quad \Omega \to \mathbb{R}, \quad \rho_\varepsilon(x) := \varphi_\varepsilon(\mathrm{d}(x, \partial\Omega)).$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{d}(x,\partial\Omega)$ den Riemannschen Abstand zwischen x und $\partial\Omega$. Die Funktion $x \mapsto \mathrm{d}(x,\partial\Omega)$ ist glatt, falls x nahe genug an $\partial\Omega$ liegt, da $\partial\Omega$ nach Voraussetzung glatt ist. Daher ist die Funktion ρ_ε glatt, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. In diesem Fall gilt $|\operatorname{grad} \rho_\varepsilon(x)| = |\varphi_\varepsilon'(x)|$ für alle $x \in \Omega$.

Sei nun $\delta > 0$ und sei $f \in C_B^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2} \leq \lambda_1(\overline{\Omega}) + \delta.$$

Zum Beispiel kann man $f = \varphi_1$ wählen. Sei nun

$$U_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x \in \overline{\Omega} | \mathrm{d}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\}.$$

Setze $h_\varepsilon = \rho_\varepsilon f \in C_c^\infty(\Omega)$. Wir benutzen, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ und folgern

$$\begin{aligned}
&\|h_\varepsilon\|_{L^2}^2 \lambda^*(\Omega) \leq Q(h_\varepsilon, h_\varepsilon) = \int_\Omega |\operatorname{grad} h_\varepsilon|^2 \, \mathrm{dV} \\
= \; & \int_\Omega |f \operatorname{grad} \rho_\varepsilon + \rho\varepsilon \operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} \\
= \; & \int_{U\varepsilon(\partial\Omega)} |f \operatorname{grad} \rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon \operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} + \int_{\Omega \setminus U_\varepsilon(\partial\Omega)} |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} \\
\leq \; & 2 \int_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} |f \operatorname{grad} \rho_\varepsilon|^2 \, \mathrm{dV} + 2 \int_{U\varepsilon(\partial\Omega)} \rho_\varepsilon^2 |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} \\
& + \int_{\Omega \setminus U_\varepsilon(\partial\Omega)} |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} \\
\leq \; & 2 \int_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} |f \operatorname{grad} \rho_\varepsilon|^2 \, \mathrm{dV} + \int_{U\varepsilon(\partial\Omega)} |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} + \int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\rho_\varepsilon^2 \leq 1$ gilt. Der dritte Term auf der rechten Seite ist gleich $Q(f,f)$. Wir zeigen im Folgenden, dass die ersten beiden Terme gegen 0 gehen für $\varepsilon \to 0$.

Um den ersten Term abzuschätzen, bemerken wir zunächst

$$\int_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} |f \operatorname{grad} \rho_\varepsilon|^2 \, \mathrm{dV} \leq \frac{9}{\varepsilon^2} \int_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} f^2 \, \mathrm{dV}.$$

Wir wählen dann auf $U_\varepsilon(\partial\Omega)$ lokale Koordinaten (r,y), wobei $r(x) = \mathrm{d}(x, \partial\Omega)$ und y: $U_\varepsilon(\partial\Omega) \to \mathbb{R}^{n-1}$ dazu transversale Koordinaten seien. Dann gilt

$$f(r,y) = \int_0^r \frac{\partial f}{\partial r}(s,y)\, ds$$

und daher $|f(r,y)| \leq \|\operatorname{grad} f\|_{L^\infty} r$, wobei wir für ein stetiges Vektorfeld X auf $\overline{\Omega}$ definieren

$$\|X\|_{L^\infty} := \sup_{p \in \overline{\Omega}} |X(p)|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} |f \operatorname{grad} \rho_\varepsilon|^2 \, \mathrm{dV} &\leq \frac{9}{\varepsilon^2} \int_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} \|\operatorname{grad} f\|_{L^\infty}^2 \varepsilon^2 \, \mathrm{dV} \\ &\leq 9 \|\operatorname{grad} f\|_{L^\infty}^2 \operatorname{vol}(U_\varepsilon(\partial\Omega)). \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{vol}(U_\varepsilon(\partial\Omega)) \leq C\varepsilon$ geht dies gegen 0 für $\varepsilon \to 0$.

Um den zweiten Term abzuschätzen, bezeichnen wir mit $\chi_{U_\varepsilon(\partial\Omega)}$ die charakteristische Funktion der Menge $U_\varepsilon(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{U\varepsilon(\partial\Omega)} |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{dV} = \int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2 \chi_{U_\varepsilon(\partial\Omega)} \, \mathrm{dV} \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$ nach dem Satz von der dominierten Konvergenz. Für eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n \to 0$ erhält man nämlich eine Folge $(|\operatorname{grad} f|^2 \chi_{U_{\varepsilon_n}(\partial\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}$, die punktweise konvergiert und durch $|\operatorname{grad} f|^2 \in L^1(\Omega)$ dominiert wird.

Insgesamt erhalten wir somit

$$\|h_\varepsilon\|_{L^2}^2 \lambda^*(\Omega) \leq Q(f,f) + O(\varepsilon) \leq (\lambda_1(\overline{\Omega}) + \delta)\|f\|_{L^2}^2 + O(\varepsilon).$$

Wir bilden nun den Limes $\varepsilon \to 0$ und benutzen, dass nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \|h_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$. Es folgt

$$\|f\|_{L^2}^2 \lambda^*(\Omega) \leq (\lambda_1(\overline{\Omega}) + \delta)\|f\|_{L^2}^2$$

und daher für $\delta \to 0$ die gewünschte Abschätzung. □

Lemma 8.9. *Sei $\overline{M}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und sei u eine Eigenfunktion zum Dirichlet-Eigenwert λ. Sei $\Omega \subset M$ ein Knotengebiet von u. Dann gilt $\lambda^*(\Omega) = \lambda$.*

Beweis. a) Ist 0 ein regulärer Wert von u, so ist $u^{-1}(0)$ eine glatte Hyperfläche. Insbesondere hat Ω einen glatten Rand. Es folgt $\lambda^*(\Omega) = \lambda_1(\overline{\Omega})$ nach Lemma 8.8. Nun ist aber $u|_{\overline{\Omega}} \in C_B^\infty(\overline{\Omega})$ eine Eigenfunktion zum Wert $\lambda \geq \lambda_1(\overline{\Omega})$. Es folgt $\lambda^*(\Omega) \leq \lambda$.

b) Nun sei 0 ein singulärer Wert von u und es sei o. B. d. A. $u > 0$ auf Ω. Nach dem Satz von Sard gibt es eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_j \to 0$, so dass für alle j gilt $\varepsilon_j > 0$ und $\varepsilon_{j+1} \leq \varepsilon_j$ und so dass für alle j der Wert ε_j ein regulärer Wert von u ist. Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\Omega_j := \{x \in \Omega | u(x) > \varepsilon_j\}.$$

Für alle j gilt dann $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$. Weiter ist $\cup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j = \Omega$. Wir definieren für $j \in \mathbb{N}$ die Funktion $u_j := u - \varepsilon_j \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Dann gilt $u_j|_{\overline{\Omega_j}} \in C_B^\infty(\overline{\Omega_j})$ und

$$\Delta u_j = \Delta u = \lambda u = \lambda u_j + \lambda \varepsilon_j.$$

Wegen $\Omega_j \subset \Omega$ gilt $\lambda^*(\Omega) \leq \lambda^*(\Omega_j)$. Da $\partial\Omega_j$ glatt ist, dürfen wir im Folgenden partiell integrieren. Weiter benutzen wir Satz 7.1 und Lemma 8.8 und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_j} u_j u \, \mathrm{dV} &= \int_{\Omega_j} u_j \Delta u \, \mathrm{dV} = \int_{\Omega_j} u_j \Delta u_j \, \mathrm{dV} = \int_{\Omega_j} |\operatorname{grad} u_j|^2 \, \mathrm{dV} \\ &\geq \lambda_1(\overline{\Omega_j}) \int_{\Omega_j} u_j^2 \, \mathrm{dV} = \lambda^*(\Omega_j) \int_{\Omega_j} u_j^2 \, \mathrm{dV} \\ &\geq \lambda^*(\Omega) \int_{\Omega_j} u_j^2 \, \mathrm{dV}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Limes $j \to \infty$ bilden. Dazu benutzen wir

$$\int_{\Omega_j} u_j u \, \mathrm{dV} = \int_{\Omega_j} u^2 \, \mathrm{dV} - \varepsilon_j \int_{\Omega_j} u \, \mathrm{dV} \to \int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{dV},$$

für $j \to \infty$, da $\int_{\Omega_j} u \, \mathrm{dV}$ für $j \to \infty$ beschränkt bleibt. Weiter gilt

$$| \, \|u\|_{L^2(\Omega)} - \|u_j\|_{L^2(\Omega)} \, | \leq \|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_j \sqrt{\mathrm{vol}(\Omega)} \to 0$$

für $j \to \infty$ und daher

$$\int_{\Omega} u_j^2 \, \mathrm{dV} \to \int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{dV}$$

für $j \to \infty$. Aus der obigen Abschätzung folgt daher $\lambda \geq \lambda^*(\Omega)$.

c) Sei nun $\delta > 0$. Wähle $f \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2} \leq \lambda^*(\Omega) + \delta$. Da $\mathrm{supp} f$ eine kompakte Teilmenge von Ω ist und $u > 0$ im Inneren von Ω gilt, ist $u_0 := \min_{x \in \mathrm{supp} f} u(x) > 0$. Für hinreichend große j ist $\varepsilon_j < u_0$ und daher $\mathrm{supp} f \subset \Omega_j$. Für diese j gilt dann $\frac{Q(f,f)}{\|f\|_{L^2}^2} \geq \lambda^*(\Omega_j)$. Es folgt mit Lemma 8.8

$$\lambda^*(\Omega) + \delta \geq \lim_{j \to \infty} \lambda^*(\Omega_j) = \lim_{j \to \infty} \lambda_1(\overline{\Omega_j}). \tag{5}$$

Sei v_j eine Dirichlet-Eigenfunktion auf Ω_j zum Eigenwert $\lambda_1(\overline{\Omega_j})$. Auf den Zusammenhangskomponenten, auf denen $v_j < 0$ gilt, ersetzen wir v_j durch $-v_j$ und können daher annehmen, dass $v_j \geq 0$ auf Ω_j gilt. Unter Benutzung der Dirichlet-Randbedingung und wegen $u|_{\partial\Omega_j} \equiv \varepsilon_j$ folgt

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\Omega_j} v_j u \,\mathrm{dV} &= \int_{\Omega_j} v_j \Delta u \,\mathrm{dV} \\
&= \int_{\Omega_j} \langle \mathrm{grad}\, v_j, \mathrm{grad}\, u \rangle \,\mathrm{dV} - \int_{\partial\Omega_j} v_j \partial_\nu u \,\mathrm{dA} \\
&= \int_{\Omega_j} \langle \mathrm{grad}\, v_j, \mathrm{grad}\, u \rangle \,\mathrm{dV} \\
&= \int_{\Omega_j} u \Delta v_j \,\mathrm{dV} + \int_{\partial\Omega_j} u \partial_\nu v_j \,\mathrm{dA} \\
&= \lambda_1(\overline{\Omega_j}) \int_{\Omega_j} v_j u \,\mathrm{dV} + \varepsilon_j \int_{\partial\Omega_j} \underbrace{\partial_\nu v_j}_{\leq 0} \,\mathrm{dA} \\
&\leq \lambda_1(\overline{\Omega_j}) \int_{\Omega_j} v_j u \,\mathrm{dV}.
\end{aligned}$$

Es folgt $\lambda \leq \lambda_1(\overline{\Omega_j})$ und im Limes $j \to \infty$ folgt $\lambda \leq \lambda^*(\Omega) + \delta$ wegen (5). Für $\delta \to 0$ erhalten wir die Behauptung. □

Beweis von Satz 8.2. Angenommen, es gäbe $k+1$ Knotengebiete $G_1, ..., G_{k+1}$ für die Eigenfunktion φ_k. Nach Lemma 8.9 folgt $\lambda^*(G_j) = \lambda_k$ für jedes j. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $j \in \{1, ..., k\}$ wähle $u_j \in C_c^\infty(G_j)$ mit

$$\frac{Q(u_j, u_j)}{\|u_j\|_{L^2}^2} \leq \lambda^*(G_j) + \varepsilon = \lambda_k + \varepsilon.$$

Wähle $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \neq (0, ..., 0)$, so dass für $f_\varepsilon := \sum_{j=1}^k \alpha_j u_j$ gilt

$$0 = (\varphi_1, f_\varepsilon) = ... = (\varphi_{k-1}, f_\varepsilon).$$

Dies ist möglich, da die Gleichungen in der Form

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, u_1) & \dots & (\varphi_1, u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_{k-1}, u_1) & \dots & (\varphi_{k-1}, u_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

geschrieben werden können und die Matrix auf der linken Seite eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}$ beschreibt. O. B. d. A. sei $\|f_\varepsilon\|_{L^2} = 1$. Da die Träger der u_j paarweise disjunkt sind, gilt $Q(u_j, u_k) = 0$ für alle $j \neq k$. Nach Satz 7.1 folgt

$$\begin{aligned} \lambda_k &\leq Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 Q(u_j, u_j) \\ &\leq (\lambda_k + \varepsilon) \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \|u_j\|_{L^2}^2 = (\lambda_k + \varepsilon)\|f_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \lambda_k + \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun

$$f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon + \psi_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon \in E_{\lambda_k}, \quad \psi_\varepsilon \in \overline{\bigoplus_{\lambda > \lambda_k} E_\lambda}.$$

Sei λ' der erste Eigenwert, der größer als λ_k ist. Dann folgt mit Satz 7.1

$$\begin{aligned} \lambda_k + \varepsilon &\geq Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = \int_M f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \, \mathrm{dV} = \int_M (\varphi_\varepsilon + \psi_\varepsilon)\Delta(\varphi_\varepsilon + \psi_\varepsilon)\, \mathrm{dV} \\ &= \int_M (\varphi_\varepsilon \Delta \varphi_\varepsilon + \psi_\varepsilon \Delta \psi_\varepsilon + \underbrace{\varphi_\varepsilon \Delta \psi_\varepsilon}_{=0} + \underbrace{\psi_\varepsilon \Delta \varphi_\varepsilon}_{=0})\, \mathrm{dV} \\ &= \lambda_k \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \underbrace{Q(\psi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)}_{\geq \lambda' \|\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2} \\ &\geq \lambda_k(\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2) + (\lambda' - \lambda_k)\|\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ &= \lambda_k + (\lambda' - \lambda_k)\|\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Es folgt $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \frac{\varepsilon}{\lambda' - \lambda_k} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

Sei nun $\varphi \in E_{\lambda_k}$ und sei $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\varepsilon_j \to 0$ und $\|\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi\|_{L^2} \to 0$ für $j \to \infty$. Dann folgt

$$\|f_{\varepsilon_j} - \varphi\|_{L^2}^2 = \|\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi\|_{L^2}^2 + \|\psi_{\varepsilon_j}\|_{L^2}^2 \to 0$$

für $j \to \infty$. Es gilt $\|\varphi\|_{L^2} = \lim_{j \to \infty} \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2} = 1$. Da für alle j gilt $f_{\varepsilon_j}|_{G_{k+1}} \equiv 0$, folgt $\varphi|_{G_{k+1}} \equiv 0$. Weiter gilt $\Delta\varphi = \lambda_k \varphi$. Mit dem folgenden Satz über eindeutige Fortsetzung folgt ein Widerspruch. □

Satz 8.10 (Satz über eindeutige Fortsetzung von Aronszajn, [2]). *Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $u \in C^\infty(M)$ mit $\Delta u = \lambda u$. Ist $\Omega \subset M$ offen, $\Omega \neq 0$ und $u|_\Omega \equiv 0$, dann gilt bereits $u \equiv 0$ auf M.*

Bemerkung 8.11. *Ohne Satz 8.10 kann man zeigen: Falls die Eigenfunktion φ_k ℓ Knotengebiete besitzt, so folgt $\lambda_\ell \leq \lambda_k$. Insbesondere falls $\lambda_{k+1} > \lambda_k$, dann folgt $\ell \leq k$.*

9 Der Laplace-Operator auf Sphären

Sei $R > 0$ und $S^n(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, \|x\| = R\}$. Wir definieren das Einheitsnormalenfeld

$$\nu : \quad S^n(R) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \nu(x) := \frac{x}{R}.$$

Ab jetzt schreiben wir $S^n := S^n(R)$.

Proposition 9.1. *Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Dann gilt auf S^n:*

$$\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) - \partial_\nu \partial_\nu f - \frac{n}{R} \partial_\nu f.$$

Beweis. Ergänze $e_0 := \nu$ zu einem lokalen Orthonormal-Rahmen $(e_0, e_1, ..., e_n)$ entlang S^n, d.h. für jedes $x \in S^n$ existiert eine offene Umgebung $U \subset S^n$ von x, so dass für alle $y \in U$ das System $(e_0(y), ..., e_n(y))$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Dann ist für jedes $y \in U$ das System $(e_1(y), ..., e_n(y))$ eine Orthononormalbasis von $T_y S^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f &= -\sum_{i=0}^n \partial_{e_i} \partial_{e_i} f + \sum_{i=0}^n \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_i, \operatorname{grad}^{\mathbb{R}^{n+1}} f \rangle, \\ \Delta^{S^n} f &= -\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} \partial_{e_i} f + \sum_{i=1}^n \langle \nabla^{S^n}_{e_i} e_i, \operatorname{grad}^{S^n} f \rangle. \end{aligned}$$

Hierbei ist nach Definition $\operatorname{grad}^{S^n} f$ die Orthogonalprojektion von $\operatorname{grad}^{\mathbb{R}^{n+1}} f$ auf TS^n. Es folgt für alle $i \geq 1$:

$$\langle e_i, \operatorname{grad}^{S^n} f \rangle = \langle e_i, \operatorname{grad}^{\mathbb{R}^{n+1}} f \rangle$$

und daher

$$\operatorname{grad}^{\mathbb{R}^{n+1}} f = \sum_{i=0}^n (\partial_{e_i} f) e_i = (\partial_\nu f)\nu + \operatorname{grad}^{S^n} f.$$

Für alle $i, j \geq 1$ ist nach Definition $\nabla^{S^n}_{e_i} e_j$ die Orthogonalprojektion von $\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_j$ auf TS^n. Es folgt für alle $i, j, k \geq 1$

$$\begin{aligned}\langle \nabla^{S^n}_{e_i} e_j, e_k \rangle &= \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_j, e_k \rangle,\\ \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_j, \nu \rangle &= \partial_{e_i} \langle e_j, \nu \rangle - \langle e_j, \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} \nu \rangle = -\langle e_j, \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} \nu \rangle.\end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $x \in S^n$ die Gleichung $d\nu|_x(e_i) = \frac{e_i}{R}$ und daher

$$\langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_j, \nu \rangle = -\frac{1}{R} \langle e_j, e_i \rangle.$$

Insbesondere folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_i, \nu \rangle = -\frac{n}{R}.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in S^n$ gilt

$$\frac{x + t\nu(x)}{\|x + t\nu(x)\|} = \frac{x + tx/R}{\|x + tx/R\|} = \frac{x}{\|x\|}$$

und daher

$$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\nu} \nu = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nu(x + t\nu(x)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{x + t\nu(x)}{\|x + t\nu(x)\|} = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f &= -\partial_\nu \partial_\nu f - \sum_{i=1}^{n} \partial_{e_i} \partial_{e_i} f + \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\nu} \nu, \operatorname{grad}^{\mathbb{R}^{n+1}} f \rangle\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_i, \operatorname{grad}^{S^n} f \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_i} e_i, \nu \rangle \partial_\nu f\\ &= \Delta^{S^n} f - \partial_\nu \partial_\nu f - \frac{n}{R} f,\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Bemerkung 9.2. *Genauso zeigt man allgemein das Folgende: Sei (M, g) eine $(n+1)$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, geblättert durch eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit N. Sei $\vec{H} := H\nu$ das mittlere Krümmungsvektorfeld, wobei ν ein lokales Einheitsnormalenfeld sei. Sei $Y := \nabla_\nu \nu$. Dann gilt für alle $f \in C^\infty(M)$*

$$\begin{aligned}\Delta^M(f|_N) &= \Delta^N(f|_N) - \partial_\nu \partial_\nu f + \partial_Y f + n\partial_{\vec{H}} f\\ &= -(\nabla^2 f)(\nu, \nu) + n\partial_{\vec{H}} f,\end{aligned} \tag{6}$$

wobei wir für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definieren

$$(\nabla^2 f)(X,Y) := \partial_X \partial_Y f - \partial_{\nabla_X Y} f.$$

Die Zahl $(\nabla^2 f)(X,Y)|_p$ hängt dann nur von den Werten von X und Y im Punkt p sowie von f ab.

Beispiel 9.3. *Es sei $\mathcal{P}_k$ der Raum aller homogenen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $p \in \mathcal{P}_k$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und alle $r > 0$:*

$$p(rx) = r^k p(x).$$

Wir differenzieren nach r und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial r}(p(rx)) = k r^{k-1} p(x) = \frac{k}{r} p(rx).$$

Wir differenzieren noch einmal nach r und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(p(rx)) = -\frac{k}{r^2} p(rx) + \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}(p(rx)) = \frac{k^2 - k}{r^2} p(rx).$$

Sei nun p harmonisch, d. h. $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} p = 0$. Dann gilt

$$0 = (\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} p)|_{S^n(R)} = \Delta^{S^n(R)}(p|_{S^n(R)}) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} p|_{S^n} - \frac{n}{R}\frac{\partial}{\partial r} p|_{S^n}.$$

Ab jetzt sei $R = 1$ und $S^n := S^n(1)$. Dann folgt

$$\Delta^{S^n}(p|_{S^n}) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} p|_{S^n} + n\frac{\partial}{\partial r} p|_{S^n} = k(n+k-1) p|_{S^n}.$$

Wir definieren

$$\mathcal{H}_k := \{p \in \mathcal{P}_k | \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} p = 0\}.$$

Die Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{P}_k \to C^\infty(S^n), \quad p \mapsto p|_{S^n}$$

ist injektiv. Wir schreiben $\mathcal{P}_k|_{S^n}$ und $\mathcal{H}_k|_{S^n}$ für die Bilder von $\mathcal{P}_k$ und $\mathcal{H}_k$ in $C^\infty(S^n)$.

Satz 9.4. *Das Spektrum von $S^n(R)$ besteht aus den Eigenwerten*

$$\lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{R^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

mit Multiplizität $\frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(n+2k-1)$.

Bemerkung 9.5. *Sei (M, g_1) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $C > 0$ und $g_2 = Cg_1$. Dann gilt $\Delta^{g_2} = C^{-1}\Delta^{g_1}$. Daher ist λ genau dann ein Eigenwert von Δ^{g_1}, wenn $\frac{\lambda}{C}$ ein Eigenwert von Δ^{g_2} ist. Es genügt daher, Satz 9.4 für den Fall $R = 1$ zu beweisen.*

Lemma 9.6. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2k} &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-2} \oplus ... \oplus r^{2k}\mathcal{H}_0 \\ \mathcal{P}_{2k+1} &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-1} \oplus ... \oplus r^{2k}\mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen Induktion über k. Der Fall $k = 0$ ist klar, denn: Falls $p \in \mathcal{P}_0$ oder $p \in \mathcal{P}_1$, so gilt $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}p = 0$.

Sei nun $k \geq 1$ und die Behauptung gelte für $k - 1$. Sei weiter $m = 2k$ beziehungsweise $m = 2k + 1$. Zu zeigen ist

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus r^2\mathcal{P}_{m-2}.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{P}_m \supset \mathcal{H}_m \oplus r^2\mathcal{P}_{m-2}$, zu zeigen bleibt "$\subset$". Nach Beispiel 9.3 gilt

$$\mathcal{H}_m|_{S^n} \subset E^{S^n}_{\lambda_m} := \ker(\Delta^{S^n} - \lambda_m),$$

wobei $\lambda_m = m(n+m-1)$. Da $r \equiv 1$ auf S^n und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m-2}|_{S^n} &= \mathcal{H}_{m-2}|_{S^n} \oplus r^2\mathcal{H}_{m-4}|_{S^n} \oplus ... \oplus r^{2k}\mathcal{H}_{0/1}|_{S^n} \\ &\subset E^{S^n}_{\lambda_{m-2}} \oplus E^{S^n}_{\lambda_{m-4}} \oplus ... \oplus E^{S^n}_{\lambda_{0/1}}. \end{aligned}$$

Da die λ_k alle verschieden sind, ist $E^{S^n}_{\lambda_m} \oplus ... \oplus E^{S^n}_{\lambda_{0/1}}$ eine direkte orthogonale Summe. Daher ist die Summe $\mathcal{H}_m|_{S^n} \oplus \mathcal{P}_{m-2}|_{S^n}$ direkt und orthogonal und die Summe $\mathcal{H}_m \oplus r^2\mathcal{P}_{m-2}$ ist direkt.

Zu zeigen bleibt $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{H}_m \oplus r^2\mathcal{P}_{m-2}$. Dafür reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{P}_m|_{S^n} \subset \mathcal{H}_m|_{S^n} \oplus \mathcal{P}_{m-2}|_{S^n}$ gilt. Sei daher $p \in \mathcal{P}_m$, so dass $p|_{S^n}$ senkrecht auf $\mathcal{P}_{m-2}|_{S^n}$ steht. Zu zeigen ist $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}p = 0$ und dafür reicht es zu zeigen, dass $(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}p)|_{S^n} = 0$ gilt. Es ist $(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}p)|_{S^n} \in \mathcal{P}_{m-2}|_{S^n}$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\mathcal{P}_{m-2}|_{S^n} = \mathcal{H}_{m-2}|_{S^n} \oplus \mathcal{H}_{m-4}|_{S^n} \oplus ... \oplus \mathcal{H}_{0/1}|_{S^n}.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass für alle $k \geq 1$ und für alle $h \in \mathcal{H}_{m-2k}$ gilt $\int_{S^n}(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}p)|_{S^n}h|_{S^n}\,\mathrm{dV} = 0$. Nach Proposition 9.1 und Beispiel 9.3 gilt

$$\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}p|_{S^n} = \Delta^{S^n}(p|_{S^n}) - m(m-1)p|_{S^n} - nmp|_{S^n}.$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
& \int_{S^n} (\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} p)|_{S^n} h|_{S^n} \,\mathrm{dV} \\
= \; & \int_{S^n} p|_{S^n} \Delta^{S^n}(h|_{S^n}) \,\mathrm{dV} - m(n+m-1) \int_{S^n} p|_{S^n} h|_{S^n} \,\mathrm{dV} \\
= \; & (\lambda_{m-2k} - \lambda_m) \int_{S^n} p|_{S^n} h|_{S^n} \,\mathrm{dV} = 0
\end{aligned}
$$

und daher die Behauptung. □

Beweis von Satz 9.4. Nach dem letzten Lemma gilt

$$
\mathcal{A} := \Big(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{P}_k \Big)\Big|_{S^n} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_k|_{S^n} \subset C^0(S^n).
$$

$\mathcal{A}$ ist eine Unteralgebra mit 1 von $C^0(S^n)$. Seien nun

$$
x = (x^0, ..., x^n) \in S^n, \quad y = (y^0, ..., y^n) \in S^n
$$

mit $x \neq y$. Dann existiert ein i mit $x^i \neq y^i$. Für die Funktion $p_i \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $p_i(x) = x^i$ gilt $p_i \in \mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1$ und $p_i(x) \neq p_i(y)$. Wir haben daher gezeigt, dass $\mathcal{A}$ Punkte separiert. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass 6.5 folgt, dass $\mathcal{A}$ dicht ist in $C^0(S^n)$. Daraus folgt

$$
\overline{\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_k\big|_{S^n}}^{L^2} = L^2(S^n) = \overline{\bigoplus_{k \geq 0} E^{S^n}_{\lambda_k}}^{L^2}.
$$

Da für alle $k \geq 0$ gilt $\mathcal{H}_k|_{S^n} \subset E^{S^n}_{\lambda_k}$, folgt daraus $k \geq 0$ gilt $\mathcal{H}_k|_{S^n} = E^{S^n}_{\lambda_k}$ für alle k. Wir haben gezeigt, dass die Eigenwerte genau die λ_k sind mit Multiplizität $\dim \mathcal{H}_k$. Im Folgenden wollen wir diese Dimension berechnen. Für alle $k \geq 2$ gilt

$$
\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus \mathcal{P}_{k-2}
$$

und daher

$$
\dim \mathcal{H}_k = \begin{cases} \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2}, & k \geq 2 \\ \dim \mathcal{P}_k, & k = 0, 1. \end{cases}
$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\dim \mathcal{P}_k = \binom{n+k}{k}$ und daher $\dim \mathcal{H}_k$ wie behauptet. □

10 Lichnerowicz-Abschätzung

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, schreibe $g = \langle ., . \rangle$. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf (M, g). Dann gilt für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und für alle $f \in C^\infty(M)$:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \partial_{[X,Y]} f = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f.$$

Für Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ definieren wir

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \in \Gamma(TM).$$

Der Wert $(R(X, Y)Z)_p$ im Punkt $p \in M$ hängt nur von den Werten X_p, Y_p, Z_p ab. Setzen wir daher $X_p, Y_p, Z_p \in T_pM$ zu Vektorfeldern $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ fort, so ist die Abbildung

$$R_p : \quad T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM, \quad (X_p, Y_p, Z_p) \mapsto (R(X, Y)Z)_p$$

wohldefiniert und trilinear. Sie heißt der Riemannsche Krümmungstensor im Punkt p. Der Ricci-Tensor ist definiert als die Spur

$$\operatorname{Ric}(X, Y) := \operatorname{Spur}(Z \mapsto R(Z, X)Y).$$

Für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt $\operatorname{Ric}(X, Y) = \operatorname{Ric}(Y, X)$.

Satz 10.1 (Lichnerowicz)**.** *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und es existiere ein $k > 0$ so dass für alle $X \in \Gamma(TM)$ gilt $\operatorname{Ric}(X, X) \geq k\langle X, X \rangle$. Dann erfüllt der erste positive Eigenwert λ_1 von Δ die Ungleichung*

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} k.$$

Beispiel 10.2. *Sei $M = S^n$ mit der Standardmetrik. Dann gilt für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ die Gleichung $\operatorname{Ric}(X, Y) = (n - 1)\langle X, Y \rangle$. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass $\lambda_1 = n$ gilt. In diesem Fall gilt in Satz 10.1 Gleichheit.*

Definition 10.3. *Sei $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren die Hessesche im Punkt $p \in M$ durch*

$$\operatorname{Hess} f|_p : \quad T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad (X_p, Y_p) \mapsto (\partial_X \partial_Y f)_p - (\partial_{\nabla_X Y} f)_p,$$

wobei $X, Y \in \Gamma(TM)$ Fortsetzungen von X_p, Y_p zu glatten Vektorfeldern sind.

Man rechnet nach, dass der Ausdruck auf der rechten Seite nur von X_p, Y_p abhängt. Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle &= \partial_X \langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y\rangle \\ &= \partial_X \partial_Y f - \partial_{\nabla_X Y} f = \operatorname{Hess} f|_p(X,Y). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\operatorname{Hess} f|_p(X,Y) - \operatorname{Hess} f|_p(Y,X) = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f - \partial_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} f = 0,$$

d. h. $\operatorname{Hess} f|_p$ ist symmetrisch.

Proposition 10.4 (Bochner-Lichnerowicz-Formel)**.** *Für alle $f \in C^\infty(M)$ gilt*

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad} f|^2) = |\operatorname{Hess} f|^2 - \langle \operatorname{grad}(\Delta f), \operatorname{grad} f\rangle + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f).$$

Beweis. Wähle $p \in M$ und zeige die Gleichung in p. Wähle eine Orthonormalbasis von T_pM und verschiebe jeden Basisvektor parallel entlang radialer Geodätischer durch p. Erhalte dadurch einen lokalen Orthonormalrahmen $e_1, ..., e_n$ auf einer offenen Umgebung U von x, so dass zusätzlich im Punkt p für alle i, j gilt: $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$. Dann folgt

$$[e_i, e_j]|_p = \nabla_{e_i} e_j|_p - \nabla_{e_j} e_i|_p = 0.$$

Nach der Formel (3) für den Laplace-Operator in einem lokalen Orthonormalrahmen gilt für jedes $X \in \Gamma(TM)$ im Punkt p:

$$\begin{aligned} \Delta(|X|^2)|_p &= -\sum_{i=1}^n \partial_{e_i}\partial_{e_i}(|X|^2)|_p + \sum_{i=1}^n \langle \underbrace{\nabla_{e_i} e_i|_p}_{=0}, \operatorname{grad}(|X|^2)|_p\rangle \\ &= -2\sum_{i=1}^n \partial_{e_i}\langle \nabla_{e_i} X, X\rangle|_p \\ &= -\sum_{i=1}^n (2\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X, X\rangle|_p + 2\|\nabla_{e_i} X\|^2|_p) \end{aligned}$$

Weiter gilt für jedes $X \in \Gamma(TM)$ im Punkt p und für alle i, j, k:

$$\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} X, e_k\rangle|_p = \partial_{e_i}\langle \nabla_{e_j} X, e_k\rangle|_p - \langle \nabla_{e_j} X|_p, \underbrace{\nabla_{e_i} e_k|_p}_{=0}\rangle.$$

Setzt man nun $X = \operatorname{grad} f$, so gilt im Punkt p für alle i, j, k:

$$\langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} \operatorname{grad} f, e_k\rangle|_p = (\partial_{e_j}\operatorname{Hess} f(e_i, e_k))|_p = \langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_k} \operatorname{grad} f, e_i\rangle|_p$$

und daher

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad} f|^2)|_p &= \sum_{i=1}^n |\nabla_{e_i} \operatorname{grad} f|^2|_p \\
&\quad + \sum_{i,k=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} \operatorname{grad} f, e_k\rangle \langle \operatorname{grad} f, e_k\rangle|_p \\
&= \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\langle \nabla_{e_i} \operatorname{grad} f, e_j\rangle}_{=\mathrm{Hess} f(e_i,e_j)}{}^2|_p \\
&\quad + \sum_{i,k=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} \operatorname{grad} f, e_i\rangle (\partial_{e_k} f)|_p. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Weiter gilt für alle i, k:

$$
R(e_i, e_k) \operatorname{grad} f|_p = \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} \operatorname{grad} f|_p - \nabla_{e_k}\nabla_{e_i} \operatorname{grad} f|_p - \underbrace{\nabla_{[e_i,e_k]} \operatorname{grad} f|_p}_{=0}
$$

und daher

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,k=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} \operatorname{grad} f, e_i\rangle (\partial_{e_k} f)|_p \\
= &\sum_{i,k=1}^n \langle \nabla_{e_k}\nabla_{e_i} \operatorname{grad} f, e_i\rangle (\partial_{e_k} f)|_p + \sum_{i,k=1}^n \langle R(e_i, e_k) \operatorname{grad} f, e_i\rangle (\partial_{e_k} f)|_p \\
= &\sum_{i,k=1}^n (\partial_{e_k} \langle \nabla_{e_i} \operatorname{grad} f, e_i\rangle)(\partial_{e_k} f)|_p + \sum_{k=1}^n \mathrm{Ric}(e_k, \operatorname{grad} f)(\partial_{e_k} f)|_p \\
= &\sum_{i,k=1}^n (\partial_{e_k} \mathrm{Hess} f(e_i, e_i))(\partial_{e_k} f)|_p + \mathrm{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)|_p \\
= &\sum_{k=1}^n (\partial_{e_k} \Delta f)(\partial_{e_k} f)|_p + \mathrm{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)|_p.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit (7) folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 10.1. Integriere die Bochner-Lichnerowicz-Formel über M und benutze

$$
\int_M \Delta(|\operatorname{grad} f|^2)\, \mathrm{dV} = 0, \qquad \int_M \langle \operatorname{grad}(\Delta f), \operatorname{grad} f\rangle\, \mathrm{dV} = \int_M (\Delta f)^2\, \mathrm{dV}.
$$

Erhalte dann

$$\int_M (\Delta f)^2 \, \mathrm{dV} = \int_M |\mathrm{Hess} f|^2 \, \mathrm{dV} + \int_M \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) \, \mathrm{dV}.$$

Sei nun $\Delta f = \lambda_1 f$. Nach Voraussetzung gilt für alle $X \in \Gamma(TM)$: $\mathrm{Ric}(X,X) \geq k\langle X, X\rangle$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \int_M f^2 \, \mathrm{dV} &\geq \int_M |\mathrm{Hess} f|^2 \, \mathrm{dV} + k \int_M \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f \rangle \, \mathrm{dV} \\ &= \int_M |\mathrm{Hess} f|^2 \, \mathrm{dV} + k\lambda_1 \int_M f^2 \, \mathrm{dV}. \end{aligned} \tag{8}$$

Es gilt

$$\Delta f = -\mathrm{Spur}(\mathrm{Hess} f) = -\langle \mathrm{Hess} f, \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i^* \rangle,$$

wobei $e_1, ..., e_n$ ein lokaler Orthononormalrahmen ist und $e_1^*, ..., e_n^*$ die dazu dualen Felder von Linearformen. Weiter ist $\langle ., . \rangle$ auf der rechten Seite das von g induzierte Skalarprodukt auf den symmetrischen Bilinearformen. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$|\Delta f|^2 \leq |\mathrm{Hess} f|^2 \Big| \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i^* \Big|^2 = n |\mathrm{Hess} f|^2.$$

Eingesetzt in (8) ergibt sich

$$\lambda_1^2 \int_M f^2 \, \mathrm{dV} \geq \frac{\lambda_1^2}{n} \int_M f^2 \, \mathrm{dV} + k\lambda_1 \int_M f^2 \, \mathrm{dV}.$$

Es folgt $\lambda_1 \geq \frac{\lambda_1}{n} + k$ und daher $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} k$. □

11 Cheeger-Ungleichung

Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei Ω eine offene und zusammenhängende Teilmenge von M, so dass $\overline{\Omega}$ kompakt ist. Weiter sei der Rand von Ω glatt.

Sei $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$. Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt ein regulärer Wert von f, falls für jedes $x \in \Omega$ mit $f(x) = t$ gilt: $\mathrm{grad}\, f|_x \neq 0$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Reg}(f) \subset \mathbb{R}$ die Menge aller regulären Werte von f.

Nach dem Satz von Sard hat die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Reg}(f)$ das Maß Null. Daher ist $\mathrm{Reg}(f)$ dicht in $\mathbb{R}$. Da die Bedingung $\mathrm{grad}\, f|_x \neq 0$ eine offene Bedingung ist, ist $\operatorname{Reg}(f)$ auch offen in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz vom regulären Wert ist für jedes $t \in \operatorname{Reg}(f)$ die Menge $f^{-1}(t) \cap \Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von Ω. Weiter ist $f^{-1}(t) \cap \overline{\Omega}$ kompakt. Es ist möglich, dass $f^{-1}(t) \cap \Omega = \emptyset$ gilt.

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $(a,b) \subset \operatorname{Reg}(f)$ und sei $t_0 \in (a,b)$, so dass $f^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. Sei $X := \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|^2}$ auf $f^{-1}((a,b))$. Sei $\varepsilon > 0$ und für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sei

$$\Phi_t : \quad M \to M$$

der Fluss von X, d. h. für alle $x \in M$ und für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X_{\Phi_t(x)}, \quad \Phi_0(x) = x.$$

Wir definieren

$$\Psi : \quad f^{-1}(t_0) \times (a,b) \to M, \quad \Psi(q,t) := \Phi_{t-t_0}(q).$$

Die Abbildung Ψ ist eine injektive Immersion. Weiter gilt für alle $(q,t) \in f^{-1}(t_0) \times (a,b)$

$$\frac{d}{dt} f(\Psi(q,t)) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle|_{\Psi(q,t)} = 1$$

und für alle $q \in f^{-1}(t_0)$:

$$f(\Psi(q,t_0)) = f(q) = t_0.$$

Es folgt, dass für alle $t \in (a,b)$ gilt $f(\Psi(q,t)) = t$.

Sind $q_1, ..., q_{n-1}$ lokale Koordinaten auf $f^{-1}(t_0)$, so liefert Ψ lokale Koordinaten $q_1, ..., q_{n-1}, t$ auf $f^{-1}((a,b)) \subset \Omega$. Für die Komponenten $g_{\alpha t}$ der Metrik gilt

$$g_{tt} = \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \langle X, X \rangle = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|^2}$$

sowie $g_{\alpha t} = 0$ für $\alpha = 1, ..., n-1$. Insgesamt erhalten wir

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\operatorname{grad} f|^2} & 0 \\ 0 & g^{f^{-1}(t)} \end{pmatrix}.$$

Für die Volumenformen dV von M und $\mathrm{dA}^{f^{-1}(t)}$ von $f^{-1}(t)$ folgt

$$\mathrm{dV} = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \mathrm{dA}^{f^{-1}(t)} \mathrm{dt}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\Omega(t) := \{p \in \overline{\Omega} \,|\, |f(p)| > t\}, \quad \Gamma(t) := \partial\Omega(t)$$

sowie

$$V(t) := \mathrm{vol}_n(\Omega(t)), \quad A(t) := \mathrm{vol}_{n-1}(\Gamma(t)).$$

Dann gilt der folgende Satz.

Satz 11.1 (Koflächenformel). *Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so dass $h|\operatorname{grad} f| \in L^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega h|\operatorname{grad} f|\mathrm{dV} = \int_0^\infty \Big(\int_{\Gamma(t)} h\mathrm{dA}\Big)\mathrm{dt}.$$

Insbesondere gilt

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} f|\mathrm{dV} = \int_0^\infty \Big(\int_{\Gamma(t)} \mathrm{dA}\Big)\mathrm{dt} = \int_0^\infty A(t)\,\mathrm{dt}.$$

Die Funktion $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist glatt auf $\operatorname{Reg}(|f|)$ und es gilt

$$V'(t) = -\int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\,\mathrm{dA}. \tag{9}$$

Beweis. Zu zeigen bleibt die letzte Gleichung. Es gilt

$$V(t) = \int_{\Omega(t)} \mathrm{dV} = \int_t^\infty \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\mathrm{dA}\,\mathrm{dt}.$$

Durch Differenzieren erhält man die gewünschte Gleichung. □

Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen

$$V := \mathrm{vol}_n, \quad A := \mathrm{vol}_{n-1}.$$

Definition 11.2. *Sei (M,g) eine nicht-kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Zahl*

$$\mathfrak{H}(M) := \inf\Big\{\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)}\Big|\Omega \subset\subset M, \Omega \text{ offen, relativ kompakt, } \partial\Omega \text{ glatt, } \Omega \neq \emptyset\Big\}$$

heißt Cheeger-Konstante von M.

Beispiel 11.3. 1. *Bild von M mit $\mathfrak{H}(M)$ klein.*

2. *Sei $B(r) := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < r\}$, $M := B(1)$. Sei $0 < r < 1$ und sei $\Omega := B(r) \subset B(1)$. Es gilt*

$$A(\partial\Omega) = r^{n-1}A(\partial B(1)), \quad V(\Omega) = r^n V(B(1))$$

und

$$V(B(1)) = \int_0^1 A(\partial B(\rho))\, d\rho = A(\partial B(1)) \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho = \frac{A(\partial B(1))}{n}.$$

Es folgt

$$\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)} = \frac{nr^{n-1}}{r^n} = \frac{n}{r} \to n$$

für $r \to 1$ *und daher* $\mathfrak{H}(M) \leq n$.

Die isoperimetrische Ungleichung im $\mathbb{R}^n$ *besagt: Sei* $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ *mit glattem Rand. Dann gilt*

$$\frac{A(\partial\widetilde{\Omega})^n}{V(\widetilde{\Omega})^{n-1}} \geq \frac{A(\partial B(1))^n}{V(B(1))^{n-1}}.$$

Sei nun $\widetilde{\Omega} \subset B(1)$. *Dann ist* $V(\widetilde{\Omega}) \leq V(B(1))$ *und somit*

$$\begin{aligned}
\frac{A(\partial\widetilde{\Omega})}{V(\widetilde{\Omega})} &= \Big(\frac{1}{V(\widetilde{\Omega})}\frac{A(\partial\widetilde{\Omega})^n}{V(\widetilde{\Omega})^{n-1}}\Big)^{1/n} \\
&\geq \Big(\frac{1}{V(B(1))}\frac{A(\partial B(1))^n}{V(B(1))^{n-1}}\Big)^{1/n} = \frac{A(\partial B(1))}{V(B(1))} = n.
\end{aligned}$$

Es folgt $\mathfrak{H}(B(1)) \geq n$. *Insgesamt folgt* $\mathfrak{H}(B(1)) = n$.

Satz 11.4 (Cheeger-Ungleichung)**.** *Sei* (M, g) *eine nicht-kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für den Grundton von* M *gilt dann* $\lambda^*(M) \geq \frac{\mathfrak{H}(M)^2}{4}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $u \in C_c^\infty(M)$, so dass

$$\frac{\int_M |\operatorname{grad} u|^2 \mathrm{dV}}{\int_M u^2 \mathrm{dV}} \leq \lambda^*(M) + \varepsilon.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\int_M |\operatorname{grad}(u^2)| \mathrm{dV}}{\int_M u^2 \mathrm{dV}} &= \frac{2\int_M |u \operatorname{grad} u| \mathrm{dV}}{\int_M u^2 \mathrm{dV}} \\
&\leq \frac{2(\int_M u^2 \mathrm{dV})^{1/2}(\int_M |\operatorname{grad} u|^2 \mathrm{dV})^{1/2}}{\int_M u^2 \mathrm{dV}} \\
&= 2\Big(\frac{\int_M |\operatorname{grad} u|^2 \mathrm{dV}}{\int_M u^2 \mathrm{dV}}\Big)^{1/2} \leq 2\sqrt{\lambda^*(M) + \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Für $\Omega(t) = \{x \in M | u(x)^2 > t\}$ gilt $\partial\Omega(t) = \{x \in M | u(x)^2 = t\}$. Nach Definition von $\mathfrak{H}(M)$ und mit der Koflächenformel für $f = u^2$ und $h = 1$ folgt

$$\begin{aligned}\int_M |\operatorname{grad}(u^2)|\mathrm{dV} &= \int_0^\infty A(\partial\Omega(t))\,dt \\ &\geq \mathfrak{H}(M)\int_0^\infty \underbrace{V(\Omega(t))}_{=V(t)}\,dt = -\mathfrak{H}(M)\int_0^\infty tV'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert und benutzt, dass $V(t) = 0$ gilt, falls t groß genug ist. Mit (9) und der Koflächenformel für $f = u^2$ und $h = \frac{u^2}{|\operatorname{grad}(u^2)|}$ folgt

$$\begin{aligned}-\mathfrak{H}(M)\int_0^\infty tV'(t)\,dt &= \mathfrak{H}(M)\int_0^\infty \int_{\partial\Omega(t)} \frac{t}{|\operatorname{grad}(u^2)|}\,\mathrm{dA}\,\mathrm{dt} \\ &= \mathfrak{H}(M)\int_0^\infty \int_{\partial\Omega(t)} \frac{u^2}{|\operatorname{grad}(u^2)|}\,\mathrm{dA}\,\mathrm{dt} \\ &= \mathfrak{H}(M)\int_M u^2\mathrm{dV}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$4(\lambda^*(M) + \varepsilon) \geq \left(\frac{\int_M |\operatorname{grad}(u^2)|\mathrm{dV}}{\int_M u^2\mathrm{dV}}\right)^2 \geq \mathfrak{H}(M)^2.$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Proposition 11.5. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit $\pi_1(M) = \{0\}$. Es existiere ein $\kappa > 0$, so dass für die Schnittkrümmung K^M von (M, g) gelte $K^M \leq -\kappa^2$. Dann gilt $\mathfrak{H} \geq (n-1)\kappa$.*

Beispiel 11.6. *Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^{n,1}$ den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ versehen mit der nicht-ausgearteten Bilinearform $\langle .,. \rangle$ definiert durch*

$$\langle \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \rangle = -x^0y^0 + \sum_{i=1}^n x^iy^i.$$

Für jedes $r > 0$ ist die Menge

$$H^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} | \langle x, x\rangle = -r^2, x^0 > 0\}$$

eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Für jedes $x \in H^n(r)$ ist der Tangentialraum $T_xH^n(r)$ gegeben durch

$$T_xH^n(r) = \{y \in \mathbb{R}^{n,1} | \langle x, y\rangle = 0\}$$

und die Einschränkung von $\langle .,.\rangle$ auf $T_xH^n(r)$ ist positiv definit. Daher ist $H^n(r)$ versehen mit der Einschränkung von $\langle .,.\rangle$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Schnittkrümmung von $H^n(r)$ ist konstant $-\frac{1}{r}$. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(H^n := H^n(1), \langle .,.\rangle)$ heißt n-dimensionaler hyperbolischer Raum.

Beweisidee zu Proposition 11.5. Wegen $K^M \leq -\kappa^2 < 0$ und $\pi_1(M) = \{0\}$ folgt aus dem Satz von Cartan-Hadamard, dass für jeden Punkt $p \in M$ die Exponentialabbildung

$$\exp_p : \quad T_pM \to M$$

ein Diffeomorphismus ist. Sei nun M_κ die einfach zusammenhängende vollständige n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $-\kappa^2$. Es gilt $M_\kappa = H^n(\frac{1}{\kappa})$. Für jedes $q \in \mathbb{R}^n$ ist die Exponentialabbildung

$$\exp_q : \quad T_qM_\kappa \to M_\kappa$$

ein Diffeomorphismus. Da T_pM und T_qM_κ beide diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind, erhalten wir einen Diffeomorphismus φ: $M \to M_\kappa$.

$$\begin{tikzcd}
 & T_pM \cong \mathbb{R}^n \cong T_qM_\kappa \arrow[dl, "\cong"', "\exp_p"] \arrow[dr, "\cong", "\exp_q"'] & \\
M \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] & & M_\kappa
\end{tikzcd}$$

Sei r: $M \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto \mathrm{d}^M(p, x)$, wobei d^M den Riemannschen Abstand auf (M, g) bezeichne. Es gilt für alle $x \in M$:

$$r(x) = \mathrm{d}^{M_\kappa}(q, \varphi(x)) = \| \exp_p^{-1}(x)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Für $r > 0$ sei

$$S(r) = \{x \in M | \mathrm{d}^M(p, x) = r\}$$

die geodätische Sphäre vom Radius r in M. Aus der Formel (6) für den Laplace-Operator auf Hyperflächen folgt

$$\Delta^M r = \underbrace{\Delta^{S(r)} r}_{=0} - \underbrace{\partial_r \partial_r r}_{=0} + \underbrace{\partial_{\nabla_{\operatorname{grad} r} \operatorname{grad} r} r}_{=0} + (n-1) H^M_{S(r)} \underbrace{\partial_r r}_{=1} = (n-1) H^M_{S(r)},$$

wobei $H^M_{S(r)}$ die mittlere Krümmung von $S(r)$ in M bezeichne. Wegen $K^M \leq -\kappa^2$ folgt aus den Sätzen der Vergleichsgeometrie:

$$H^M_{S(r)} \leq H^{M_\kappa}_{S(r)} = -\kappa \coth(\kappa r) \leq -\kappa$$

und daher $-\Delta^M r \geq \kappa(n-1)$.

Sei nun $\Omega \subset M$ offen und relativ kompakt mit glattem Rand. Zu zeigen ist $\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)} \geq (n-1)\kappa$. Es gilt

$$(n-1)\kappa V(\Omega) = \int_\Omega (n-1)\kappa \mathrm{dV} \leq \int_\Omega (-\Delta^M r)\mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega} \langle \operatorname{grad} r, \nu \rangle \, \mathrm{dA},$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale auf $\partial\Omega$ bezeichne. Wir wenden auf die rechte Seite die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an und erhalten $(n-1)\kappa V(\Omega) \leq A(\partial\Omega)$. □

Satz 11.7 (McKean)**.** *Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und sei $\kappa > 0$. Es gelte $\pi_1(M) = \{0\}$ und für die Schnittkrümmung gelte $K^M \leq -\kappa^2$. Dann gilt für alle offenen Teilmengen $M' \subset M$:*

$$\lambda^*(M') \geq \frac{(n-1)^2\kappa^2}{4}.$$

Beweis. Es gilt

$$\lambda^*(M') \geq \lambda^*(M) \geq \frac{\mathfrak{H}(M)^2}{4} \geq \frac{(n-1)^2\kappa^2}{4}$$

nach Proposition 11.5. □

Bemerkung 11.8. *Sei $(M,g) = (H^n, \langle .,. \rangle)$ der hyperbolische Raum, sei $p \in H^n$ und sei $M' = B_p(r)$ der geodätische Ball vom Radius r um p in H^n. Es gilt $K^M = -1$ und daher*

$$\frac{(n-1)^2}{4} \leq \lambda^*(B_p(r)) \overset{r\to\infty}{\to} \lambda^*(H^n) = \frac{(n-1)^2}{4},$$

wobei wir die letzte Gleichheit ohne Beweis verwenden. Daher sind die Abschätzungen in Satz 11.4, Proposition 11.5 und Satz 11.7 scharf.

Wir beweisen nun die Cheeger-Ungleichung auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten. Eine Mannigfaltigkeit M heißt geschlossen, wenn sie kompakt ist und $\partial M = \emptyset$ gilt.

Definition 11.9. *Die Cheeger-Konstante einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *ist*

$$\mathfrak{H}(M) := \inf_S \frac{A(S)}{\min\{V(\Omega_1), V(M \setminus \Omega_1)\}},$$

wobei das Infimum über alle Hyperflächen S *gebildet wird, die abgeschlossen und glatt sind und die* M *in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten zerlegen:*

$$M \setminus S = \Omega_1 \cup M \setminus \Omega_1$$

mit Ω_1 *und* $M \setminus \Omega_1$ *offen in* M *und nichtleer.*

Satz 11.10 (Cheeger-Ungleichung, geschlossener Fall)**.** *Sei* (M, g) *eine geschlossene zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei* λ_1 *der kleinste positive Dirichlet-Eigenwert. Dann gilt* $\lambda_1 \geq \frac{\mathfrak{H}(M)^2}{4}$.

Beweis. Jede Eigenfunktion zu λ_1 hat zwei Knotengebiete $\Omega_1, \Omega_2 \subset M$, wobei $\Omega_2 = M \setminus \overline{\Omega_1}$. O. B. d. A. gelte $V(\Omega_1) \leq V(\Omega_2)$. Nach Lemma 8.8 und Satz 11.4 gilt

$$\lambda_1 = \lambda^*(\Omega_1) \geq \frac{\mathfrak{H}(\Omega_1)^2}{4}.$$

Für jede offene relativ kompakte Teilmenge $\Omega \subset\subset \Omega_1$ mit glattem Rand gilt

$$V(\Omega) \leq V(\Omega_1) \leq V(M \setminus \Omega_1) \leq V(M \setminus \Omega)$$

und daher

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}(\Omega_1) &= \inf\left\{\frac{A(\partial\Omega)}{\min\{V(\Omega), V(M \setminus \Omega)\}} \,\middle|\, \Omega \subset \Omega_1 \text{ wie oben}\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)} \,\middle|\, \Omega \subset \Omega_1 \text{ wie oben}\right\} \geq \mathfrak{H}(M).
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist gezeigt. □

12 Die isoperimetrische Konstante und die Sobolev-Konstante

Definition 12.1. *Sei* (M, g) *eine* n*-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit,* M *sei nicht kompakt.*

$$J(M) := \inf\left\{\frac{A(\partial\Omega)^n}{V(\Omega)^{n-1}} \,\middle|\, \Omega \subset\subset M,\ \Omega \text{ offen},\ \partial\Omega \text{ glatt}\right\}$$

heißt isoperimetrische Konstante von (M, g).

Beispiel 12.2. *Sei* $(M,g) = (\mathbb{R}^2, g_{\mathrm{eukl}})$*. Für jede offene relativ kompakte Teilmenge* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *gilt*

$$A(\partial\Omega) \geq 4\pi V(\Omega)$$

und Gleichheit genau dann, wenn Ω *eine Kreisscheibe ist. Wir erhalten* $J(\mathbb{R}^2) = 4\pi$*. Sei nun* $(M,g) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eukl}})$*. Dann gilt*

$$J(\mathbb{R}^n) = \frac{A(\partial B_1(0))^n}{V(B_1(0))^{n-1}}.$$

Definition 12.3. *Sei* (M,g) *eine* n*-dimensionale nicht-kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt*

$$s(M) := \inf_{f\in C_c^\infty(M), f\not\equiv 0} \frac{(\int_M |\operatorname{grad} f| \mathrm{dV})^n}{(\int_M |f|^{n/(n-1)} \mathrm{dV})^{n-1}}$$

die Sobolev-Konstante der Einbettung $H^{1,1} \hookrightarrow L^{n/(n-1)}$*.*

Satz 12.4 (Federer-Fleming)**.** *Sei* (M,g) *wie oben. Dann gilt* $s(M) = J(M)$*.*

Beweis. a) Sei $\Omega \subset\subset M$ offen und $\partial\Omega$ glatt. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $f_\varepsilon \in C_C^\infty(M)$ mit

1. $f_\varepsilon|_{M\setminus\Omega} \equiv 0$
2. $f_\varepsilon \equiv 1$ auf $\{x \in \Omega | \, \mathrm{d}(x,\partial\Omega) \geq \varepsilon\}$
3. $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$
4. $|\operatorname{grad} f_\varepsilon| \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$ überall.

Dann gilt

$$\begin{aligned} V(\{x \in \Omega | \, \mathrm{d}(x,\partial\Omega) \geq \varepsilon\}) &= \int_{\{x\in\Omega| \, \mathrm{d}(x,\partial\Omega)\geq\varepsilon\}} \mathrm{dV} \\ &\leq \int_M |f_\varepsilon|^{n/(n-1)} \mathrm{dV} \leq \int_\Omega \mathrm{dV} = V(\Omega). \end{aligned}$$

Da die linke Seite für $\varepsilon \to 0$ gegen $V(\Omega)$ konvergiert, folgt

$$\Big(\int_M |f_\varepsilon|^{n/(n-1)} \mathrm{dV}\Big)^{n-1} \to (V(\Omega))^{n-1}$$

für $\varepsilon \to 0$. Definiere $F\colon M \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{d}(x,\partial\Omega), & \text{falls } x \in \Omega \\ -\mathrm{d}(x,\partial\Omega), & \text{falls } x \notin \Omega. \end{cases}$$

In einer kleinen Umgebung von $\partial\Omega$ ist F glatt und dort gilt $|\operatorname{grad} F| = 1$. Aus der Koflächenformel folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}V(\{x\in\Omega|\,\mathrm{d}(x,\partial\Omega)\le\varepsilon\}) = \int_{\partial\Omega}\frac{1}{|\operatorname{grad} F|}\,\mathrm{dA} = A(\partial\Omega).$$

Weiter gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_M |\operatorname{grad} f_\varepsilon|\,\mathrm{dV} \le \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}V(\{x\in\Omega|\,\mathrm{d}(x,\partial\Omega)\le\varepsilon\}) = A(\partial\Omega).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A(\partial\Omega)^n &\ge \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_M |\operatorname{grad} f_\varepsilon|\,\mathrm{dV}\Big)^n \\ &\ge s(M)\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_M |f_\varepsilon|^{n/(n-1)}\mathrm{dV}\Big)^{n-1} = s(M)V(\Omega)^{n-1}. \end{aligned}$$

Da Ω beliebig ist, folgt $s(M)\le J(M)$.

b) Sei $f\in C_c^\infty(M)$, $f\not\equiv 0$. Wir verwenden wieder die Notation

$$\Omega(t) := \{x\in M|\,|f(x)|>t\},\quad V(t) := V(\Omega(t)),\quad A(t) := A(\partial\Omega(t)).$$

Aus der Koflächenformel und der Definition der isoperimetrischen Konstante folgt

$$\int_M |\operatorname{grad} f|\,\mathrm{dV} = \int_0^\infty A(t)\,dt \ge J(M)^{1/n}\int_0^\infty V(t)^{(n-1)/n}\,dt. \tag{10}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_M |f|^{n/(n-1)}\,\mathrm{dV} &= \int_M\int_0^{|f(x)|}\frac{n}{n-1}t^{1/(n-1)}\,dt\,\mathrm{dV} \\ &= \frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{1/(n-1)}\int_{\Omega(t)}\mathrm{dV}\,dt \\ &= \frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{1/(n-1)}V(t)\,dt, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei wir im zweiten Schritt den Satz von Fubini benutzt haben. Es reicht nun, die Ungleichung

$$\Big(\int_0^\infty V(t)^{(n-1)/n}\,dt\Big)^n \ge \Big(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{1/(n-1)}V(t)\,dt\Big) \tag{12}$$

zu zeigen. Zusammen mit (10) und (11) folgt dann nämlich für alle $f \in C_c^\infty(M)$, $f \not\equiv 0$:

$$\frac{(\int_M |\operatorname{grad} f| \,\mathrm{dV})^n}{(\int_M |f|^{n/(n-1)} \,\mathrm{dV})^{n-1}} \geq J(M)$$

und durch Bilden des Infimums die Behauptung. Um (12) zu zeigen, setzen wir für $T \in \mathbb{R}$

$$F(T) := \Big(\int_0^T V(t)^{(n-1)/n}\,dt\Big)^{n/(n-1)}, \quad G(T) := \frac{n}{n-1}\int_0^T t^{1/(n-1)} V(t)\,dt.$$

Zu zeigen ist $\lim_{T\to\infty} F(T) \geq \lim_{T\to\infty} G(T)$. Es gilt $F(0) = G(0) = 0$ und für alle $T \in \mathbb{R}$

$$F'(T) = V(T)^{(n-1)/n} \frac{n}{n-1}\Big(\int_0^T V(t)^{(n-1)/n}\,dt\Big)^{1/(n-1)}.$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(T) &= \frac{n}{n-1} T^{1/(n-1)} V(T) = \frac{n}{n-1} V(T)^{(n-1)/n} V(T)^{1/n} T^{1/(n-1)} \\ &= \frac{n}{n-1} V(T)^{(n-1)/n} \Big(\int_0^T V(T)^{(n-1)/n}\,dt\Big)^{1/(n-1)} \leq F'(T), \end{aligned}$$

da die Funktion $t \mapsto V(t)$ monoton fallend ist. Es folgt die Behauptung. □

Literatur

[1] S. Agmon, Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2, Princeton, 1965.

[2] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order.* J. Math. Pures Appl. **36**, 235-249, 1957.

[3] C. Bär, Elementare Differentialgeometrie, deGruyter, Berlin, New York, 2001.

[4] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le spectre d'une variété Riemannienne, Lecture Notes in Mathematics 194, Springer Verlag, Berlin, New York, 1971.

[5] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, Orlando, 1984.

[6] J. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1982.

[7] A. Henrot, Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[8] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, second edition, Publish or Perish, Wilmington, 1979.

[9] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer Verlag, New York, 2000.