Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Mihaela Pilca

WiSe 2013/14
29.10.2013

Zentralübung Analysis I
29.10.2013

Aufgabe 1.
Zeigen Sie (Proposition 3.14 (a) bis (g) im Skript), indem Sie Proposition 2.8 (a) bis (g) nutzen.
Seien P und Q Teilmengen von M. Dann gilt

(a) $P \cup (M \setminus P) = M$

(b) $P \cap (M \setminus P) = \emptyset$

(c) $P \cup M = M$

(d) $P \cap \emptyset = \emptyset$

(e) $P \cup \emptyset = P$

(f) $P \cap M = P$

(g) $P \cup Q = Q \cup P$ (Kommutativität von $\cup$)

Aufgabe 2.
1.) Geben Sie mengentheoretische Analoga zu Proposition 2.8 (h) bis (n) an.
2.) Zeigen Sie diese Aussagen.

Aufgabe 3.
Seien M_1 und M_2 disjunkte Mengen. Sei $M = M_1 \cup M_2$. Zeigen Sie $(M_1 \times M_1) \cup (M_2 \times M_2)$ ist eine Äquivalenzrelation auf M. Gilt diese Aussage noch, wenn M_1 und M_2 nicht disjunkt sind? (Wenn ja, bitte beweisen; wenn nein, bitte Gegenbeispiel geben).

Aufgabe 4.
Zeigen Sie: Ist R eine antisymmetrische Äquivalenzrelation auf M, so ist R die Diagonale Δ_M in $M \times M$.

Aufgabe 5.
Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Relation $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \in k\mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.
Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen R auf M mit $1R2$. Bestimmen Sie alle Ordnungsrelationen Q auf M mit $1Q2$.

Aufgabe 7.
Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Wir definieren für $x \in M$ die Äquivalenzklasse von x als

$$[x] := \{y \in M \mid xRy\}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in M$ gilt:

(a)
$$y \in [x] \iff [x] = [y]$$

(b)
$$[x] = [y] \quad \veebar \quad [x] \cap [y] = \emptyset.$$

Aufgabe 8.
Sei R eine Ordnungsrelation auf M. Ein Element $x \in M$ heißt *Maximum*, falls $\forall y \in M : yRx$. Ein Element $x \in M$ heißt *maximales Element*, falls $\forall y \in M : (xRy \to x = y)$. Zeigen Sie, dass jedes Maximum ein maximales Element ist. Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass maximale Elemente nicht immer Maxima sind.

PROPOSITION 2.8. Für alle Belegungen von A, B und C mit Wahrheitswerten w und f sind die folgenden Aussagen wahr:

(a) $A \vee \neg A$ (Tertium non datur)

(b) $\neg(A \wedge \neg A)$ (Widerspruchsfreiheit)

(c) $A \vee w$

(d) $\neg(A \wedge f)$

(e) $(A \vee f) \leftrightarrow A$

(f) $(A \wedge w) \leftrightarrow A$

(g) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ (Kommutativität von $\vee$)

(h) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativität von $\wedge$)

(i) $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ (Assoziativität von $\vee$)

(j) $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (Assoziativität von $\wedge$)

(k) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B))$ (de Morgansche Regeln)

(l) $(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg(\neg A \vee \neg B))$ (de Morgansche Regeln)

(m) $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (Distributivgesetze)

(n) $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (Distributivgesetze)