Axiome der Mengenlehre nach von Neumann, Bernays, Gödel (NBG)

B. Ammann[1]

[1]Universität Regensburg

Vorlesung Analysis am 6.11.13

Ziel: Axiomatischer Aufbau der Mathematik

Es gibt verschiedene Axiomensysteme

- ZFC (Zermelo, Fraenkel, Axiom of Choice).
  Oft einfacher für rein mengentheoretische Argumente.
- NBG (von Neumann, Bernays, Gödel).
  Oft einfacher für das praktische Arbeiten damit.

In beiden Axiomensystemen können dieselben Sätze gezeigt werden.

Grundlegende Ideen

- Man will gar nicht mehr erklären, was eine Menge ist, sondern fordert axiomatische Eigenschaften für Mengen.
- Man nimmt an, dass auch alle Elemente von Mengen ebenfalls Mengen sind.
  In anderen Worten: jede Menge ist ein Mengensystem über einer geeigneten Menge.
- Trotz dieser Einschränkungen kann man immer noch natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen und vieles mehr als Mengen definieren. Die Zahl π ist also eine Menge, deren Elemente wieder Mengen sind, deren Elemente wieder Mengen sind, ...

Axiome der Mengenlehre nach von Neumann, Bernays, Gödel (NBG)

- Es gibt zwei Sorten von Objekten, *Mengen* und *Klassen*. Außerdem gibt es noch die Beziehung $\in$, die besagt, wann eine Klasse das Element einer anderen Klasse ist.
- Jede Menge ist eine Klasse.
- Alle Elemente von Klassen sind Mengen.
- Extensionalität. Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
- Komprehension. Ist C eine auf allen Mengen definierte Aussagenform, die nach "gewissen strikt festgelegten Regeln" aufgebaut ist. Dann ist

$$\{x \text{ ist eine Menge} \mid C(x)\}$$

eine Klasse.

- Die *leere Klasse* $\emptyset := \{x \text{ ist eine Menge} \mid x \neq x\}$ ist eine Menge.
- Aussonderungsmengenaxiom. Jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge.
  Benutzt wurde hierbei die folgende Definition: Eine Klasse A ist eine *Teilklasse* einer Klasse B, wenn jedes Element von A ein Element von B ist.
- Paarmengenaxiom. Sind A und B Mengen, so ist auch $\{A, B\}$ eine Menge.
- Vereinigungsaxiom. Ist A eine Menge, so ist auch

  $$\bigcup A := \{x \mid \exists y \in A : \ x \in y\}$$

  eine Menge, die *Vereinigungsmenge von A*.

- Potenzmengenaxiom. Ist A eine Menge, so ist auch

$$\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \subset A\}$$

eine Menge, die *Potenzmenge von A*.
- Fundierungsaxiom. Ist $A \neq \emptyset$, so gibt es ein $x \in A$ mit $x \cap A = \emptyset$.
- Ersetzungsaxiom.Sind X und Y Klassen und ist F eine funktionale "Relationsklasse" mit $D(F) = X$ und $B(F) \subset Y$. Ist die Teilklasse $A \subset X$ eine *Menge*, so ist auch $B(F|_A)$ eine Menge.
- Unendlichkeitsaxiom. Es gibt eine induktive Menge; eine Menge A heißt *induktiv*, wenn $\emptyset \in A$ und wenn für alle $x \in A$ auch $x \cup \{x\} \in A$ ist.

- Auswahlaxiom. Sei I eine nicht-leere Menge und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen.
  Dann ist $\prod_{i \in I} M_i$ nicht die leere Menge.

Aus all diesen Axiomen kann man nun Schritt für Schritt die gesamte Mathematik entwickeln.

Besonders interessant ist das Auswahlaxiom.

- Auswahlaxiom (AA). Sei I eine nicht-leere Menge und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen.
  Dann ist $\prod_{i \in I} M_i$ nicht die leere Menge.

Angenommen wir hätten alle Axiome von (NBG) außer das Auswahlaxiom.
Dann gilt:

(AA) $\iff$ Jeder Vektorraum besitzt eine Basis
$\iff$ Sind X und Y Mengen, dann gibt es eine injektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ oder eine injektive Abbildung $g : Y \longrightarrow X$.

Wenn wir (NBG) inklusive (AA) annehmen, dann gibt es einen Vektorraum, der zwar eine Basis besitzt, aber zugleich kann keine Basis angegeben werden.

Gödelsche Unvollständigkeitssätze

- Man kann aus den Axiomen der Mengenlehre nicht folgern, dass die Mengenlehre widerspruchsfrei ist! (Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz).
  Die Mathematik beruht auf der *Annahme*, dass die Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind.
- Es gibt Aussagen, von denen gezeigt werden kann, dass weder diese Aussage noch die Negation dieser Aussage beweisbar ist.
  Solche Aussagen gibt es in jedem hinreichend großen logischen System. (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz).

Kontinuumshypothese (CH), nach Georg Cantor 1878

Beispiel für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz

$CH \quad :\Longleftrightarrow$ Sei M eine Menge, so dass es keine injektive Abbildung $M \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt. Dann gibt es eine injektive Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow M$.

Anschaulich: Es gibt keine Menge, die "größer" als $\mathbb{N}$ und "kleiner" als $\mathbb{R}$ ist.

Kontinuumshypothese (CH), nach Georg Cantor

Beispiel für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz

$CH \quad :\Longleftrightarrow$ Sei M eine Menge, so dass es keine injektive Abbildung $M \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt. Dann gibt es eine injektive Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow M$.

CH besagt: Es gibt keine Menge, die mächtiger als $\mathbb{N}$ und weniger mächtig als $\mathbb{R}$ ist.

M heißt mächtiger als N, falls es eine injektive Abbildung $N \longrightarrow M$ gibt, aber keine injektive Abbildung $M \longrightarrow N$.

Man kann zeigen:

- Gödel 1938: Ist (NBG) widerspruchsfrei, dann ist auch (NBG)$\wedge$(CH) widerspruchsfrei.
- Cohen 1960er: Ist (NBG) widerspruchsfrei, dann ist auch (NBG)$\wedge\neg$(CH) widerspruchsfrei. (Fields-Medaille)

Man also kann zeigen, dass man weder (CH) noch $\neg$(CH) zeigen kann.