Einige Sätze und Definitionen der Maßtheorie

B. Ammann[1]

[1]Universität Regensburg

Vorlesung Analysis III im WS 2014/15

Äußere Maße

Definition 3.4

Sei $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra auf X.
Ein äußeres Maß auf $(X, \mathcal{N})$ ist eine Funktion $\mu^* : \mathcal{N} \to [0, \infty]$, so dass

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) *(Monotonie) Wenn $A, B \in \mathcal{N}$ mit $A \subset B$, dann* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

(iii) *(σ-Subadditivität) Sei $A_i \in \mathcal{N}$ für $i \in \mathbb{N}$, dann*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

Jedes Maß ist ein äußeres Maß.

Sei nun $\mathcal{N} = \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $A \in \mathcal{P}(X)$ μ^*-messbar, falls für alle $Z \in \mathcal{P}(X)$ gilt:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A)$$

Lemma (Carathéodory)

Ist μ^* ein äußeres Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$. Definiere

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}.$$

Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X und μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{M}$.

Ringe und Prämaße

Definition 3.6

Ein Ring $\mathcal{R}$ *auf* X *ist eine Teilmenge* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$*, falls*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) *Wenn* $A, B \in \mathcal{R}$*, dann* $A \setminus B \in \mathcal{R}$

(iii) *Wenn* $A, B \in \mathcal{R}$*, dann* $A \cup B \in \mathcal{R}$

Man nennt $\mathcal{R}$ *eine Algebra auf* X*, falls zusätzlich* $X \in \mathcal{R}$ *gilt.*
Ist $\mathcal{R}$ *ein Ring auf* X*, so heißt* $\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *ein Prämaß auf* X*, falls*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) *Ist* $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *eine Familie paarweise disjunkter Elemente von* $\mathcal{R}$ *und ist* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{R}$*, dann gilt auch*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i).$$

σ-Endlichkeit

Ein Prämaß μ auf $(X, \mathcal{R})$ heißt σ-endlich, falls es eine Folge $S_i \in \mathcal{R}$ gibt mit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ und $\mu(S_i) < \infty$.

Jedes Maß ist ein Prämaß.

Satz (Über die Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen, Satz von Hahn)

Sei $\mathcal{R}$ *ein Ring auf* X *und* $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ *ein Prämaß auf* $(X,\mathcal{R})$*.*

1. *Dann gibt es mindestens ein Maß auf* $\tilde{\mu}\colon \mathcal{M}(\mathcal{R},X) \to [0,\infty]$ *mit*

$$\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu.$$

2. *Ist* μ σ*-endlich, dann gibt es genau ein solches Maß.*

Lebesgue-Integral

Eine Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ist eine Stufenfunktion, falls

(1) φ messbar ist

(2) $\varphi(X)$ ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$

Notationen

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$
\begin{aligned}
M &= \{\text{messbare Funktionen } (X, \mathcal{M}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}})\},\\
M^+ &:= \{\varphi \in M \mid \varphi \geq 0\},\\
\mathcal{S} &= \{\text{Stufenfunktion}\},\\
\mathcal{S}^+ &= \mathcal{S} \cap M^+.
\end{aligned}
$$

Integral von nicht-negativen Stufenfunktionen

$$
\int_X : \mathcal{S}^+ \to [0, \infty],
$$

$$
\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \mapsto \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) = \int_X \varphi \, d\mu
$$

für $A_i \in \mathcal{M}$, $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Ähnliches Integral $\int_X : \mathcal{T}(\mu) \to \mathbb{R}$.

Integral nicht-negativer Funktionen

Satz 2.7

$f\colon X \to [0,\infty]$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen gibt, so dass $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le \varphi_n \le \cdots \le f$, $f = \sup \varphi_j$.

Definition 4.3

Definiere dann für $f \in M^+$

$$\int_X f\, d\mu := \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi_j\, d\mu \in [0,\infty].$$

Integral von Lebesgue-integrierbaren Funktionen

Definition 4.7 (Lebesgue-Integral)

Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-integrierbar bzgl. μ oder μ-integrierbar, falls f messbar und $\int_X |f| \, d\mu < \infty$. Definiere dann das Lebesgue-Integral von f als

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu,$$

wobei

$$f_+ := \max\{f, 0\} \in M^+, \quad f_- := \max\{-f, 0\} \in M^+, \quad f = f_+ - f_-$$

Dann ist

$$\mathcal{L}(\mu) := \{f \in M \mid f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}$$

ein Vektorraum und

$$\int_X : \mathcal{L}(\mu) \to \mathbb{R}$$

ist linear.

Eigenschaften 4.9

(1) Für alle $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$: $f \leq g \;\Rightarrow \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$ (Monotonie).

(2) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann $\chi_A \in \mathcal{S}^+ \subset M^+$.

$$\int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A)$$

$$\int_X \chi_A \, d\mu < \infty \Leftrightarrow \mu(A) < \infty \Leftrightarrow \chi_A \in \mathcal{L}(\mu).$$

(3) Seien $f, g \in M$ mit $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}(\mu) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}(\mu)$. In diesem Fall

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Eigenschaften 4.9 (Fortsetzung)

(4) Ist $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und $g \in M$ mit g beschränkt ($\exists C \in \mathbb{R}_{\geq 0} : -C \leq g \leq C$). Dann

$$|gf| = |g||f| \leq C|f|,$$
$$0 \leq \int_X |gf| \, d\mu \leq C \int_X |f| \, d\mu < \infty,$$

dann folgt $gf \in \mathcal{L}(\mu)$.
Insbesondere folgt für $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und $A \in \mathcal{M}$:

$$f \cdot \chi_A \in \mathcal{L}(\mu).$$

Definiere nun:

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f\chi_A \, d\mu$$