

Motivation der Vorlesung Analysis IV

B. Ammann¹

¹Universität Regensburg

Vorlesung Analysis IV im SS 2015



Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Ziel:

Verständnis von

- ▶ Kurven in der Ebene
- ▶ Kurven im Raum
- ▶ Flächen im Raum



Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Ziel:

Verständnis von

- ▶ Kurven in der Ebene: Krümmung
- ▶ Kurven im Raum: Krümmung und Torsion
- ▶ Flächen im Raum: intrinsische Krümmung und extrinsische Krümmung



Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Ziel:

Verständnis von

- ▶ Kurven in der Ebene: Krümmung
- ▶ Kurven im Raum: Krümmung und Torsion
- ▶ Flächen im Raum: intrinsische Krümmung und extrinsische Krümmung

Oder allgemein: Krümmung von Untermannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^n



Wie sind diese Untermannigfaltigkeiten gegeben:

Beispiel: Parabelkurve in \mathbb{R}^2

- ▶ als Graph einer Funktion: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- ▶ durch eine Parametrisierung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$
- ▶ durch eine andere Parametrisierung, z.B. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$
 $t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}$
- ▶ implizit als Lösungsmenge der Gleichung $y = x^2$

All diese Darstellungen ergeben dieselbe Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie sind diese Untermannigfaltigkeiten gegeben:

Beispiel: Parabelkurve in \mathbb{R}^2

- ▶ als Graph einer Funktion: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- ▶ durch eine Parametrisierung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$
- ▶ durch eine andere Parametrisierung, z.B. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$
 $t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}$
- ▶ implizit als Lösungsmenge der Gleichung $y = x^2$

All diese Darstellungen ergeben dieselbe Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Satz ist zentral für den Übergang zwischen diesen Darstellungsmöglichkeiten:

- ▶ als Graph,
- ▶ durch Parametrisierung,
- ▶ implizit als Nullstellenmenge einer Funktion

Er funktioniert gut dort, wo die Fläche glatt und die Parametrisierung nicht singulär ist. Das ist der häufigste Fall in Anwendungen.



Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Satz ist zentral für den Übergang zwischen diesen Darstellungsmöglichkeiten:

- ▶ als Graph,
- ▶ durch Parametrisierung,
- ▶ implizit als Nullstellenmenge einer Funktion

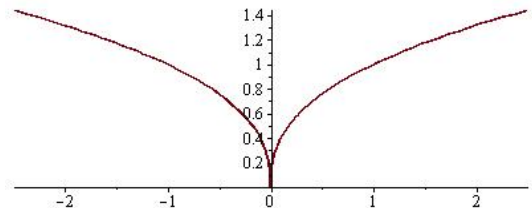
Er funktioniert gut dort, wo die Fläche glatt und die Parametrisierung nicht singulär ist. Das ist der häufigste Fall in Anwendungen.



Singularitäten

Schwierigkeiten macht zum Beispiel die Parametrisierung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightarrow \begin{pmatrix} t^5 \\ t^2 \end{pmatrix}$$



Es gibt eine „Singularität“ in $t = 0$.

Geometrie

Nun wird es wichtig Untermannigfaltigkeiten **geometrisch** zu verstehen.

- ▶ intrinsische Krümmung (innere Geometrie).
Distanzmessung in der Untermannigfaltigkeit.
- ▶ extrinsische Krümmung. Beschreibt, wie sich eine Untermannigfaltig im umgebenden Raum krümmt.

Zylinder sind intrinsisch flach, aber extrinsisch gekrümmt.

Innere Geometrie und Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Wichtiger Fortschritt

Um die innere Geometrie klarer zu sehen, betrachtet man nicht mehr **Untermannigfaltigkeiten** von \mathbb{R}^n sondern betrachtet **Mannigfaltigkeiten**.

Der umgebende Raum verschwindet, nur noch die innere Geometrie bleibt sichtbar.



Innere Geometrie und Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Wichtiger Fortschritt

Um die innere Geometrie klarer zu sehen, betrachtet man nicht mehr **Untermannigfaltigkeiten** von \mathbb{R}^n sondern betrachtet **Mannigfaltigkeiten**.

Der umgebende Raum verschwindet, nur noch die innere Geometrie bleibt sichtbar.



Physikalische Anwendungen

- ▶ Differentialformen erklären Elektrodynamik
- ▶ Klassische Integralsätze der Physik: Satz von Stokes, Divergenzsatz von Gauß,..
- ▶ Klassische Mechanik: Hamilton- und Lagrange-Formalismus
- ▶ Allgemeine Relativitätstheorie: Schwarze Löcher, „Urknall“, Dunkle Energie
- ▶ Beschreibung von Symmetrien. Hilfsmittel: Lie-Gruppen
- ▶ Spektralberechnungen von Differentialoperatoren führen zum Orbital-Modell eines Atomes in Chemie und Atom-Physik

(nicht mehr alles in dieser Vorlesung)



Mathematische Anwendungen

- ▶ Viele Aussage über Flächen
- ▶ Visualisierungen von Kurven, Flächen
- ▶ Hohe Mathematik: Poincaré-Vermutung
- ▶ Weniger hohe Mathematik: Straßenplanung

(nicht mehr alles in dieser Vorlesung)



Zur Poincaré-Vermutung

Henri Poincaré vermutete 1904:

Ist M eine kompakte einfach-zusammenhängende 3-dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine glatte bijektive Abbildung

$$M \rightarrow S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\}$$

mit glatter Umkehr-Abbildung.

Die Vermutung wurde um das Jahr 2002 von Grigori Perelman gelöst.

Eine Million Dollar Preisgeld vom Clay Institute.

Der Beweis beruht darauf, dass man die Krümmung von Mannigfaltigkeiten gut versteht.



Wiederholung: Untermannigfaltigkeiten

Definition (Analysis II, Kap. 8, Definition 6.1)

Sei U offen in \mathbb{R}^k , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ℓ -mal stetig differenzierbar, $\ell \geq 1$. Wir sagen $y \in \mathbb{R}^m$ ist ein **regulärer Wert** von F , falls gilt

$$\forall p \in F^{-1}(\{y\}) : F'(p) \text{ hat Rang } m.$$

Ist y kein regulärer Wert, so nennt man y einen **singulären Wert**.



Definition (Analysis II, Kap. 8, Definition 6.4)

Sei $\ell \geq 1$, $k \geq n$. Sei M eine Teilmenge von \mathbb{R}^k . Wir nennen M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k mit Regularität C^ℓ , falls jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U in \mathbb{R}^k besitzt und eine Funktion $F \in C^\ell(U, \mathbb{R}^{k-n})$ existiert, so dass 0 regulärer Wert von F ist und $F^{-1}(\{0\}) = U \cap M$.



Ist M eine Teilmenge von \mathbb{R}^k , dann besagt Analysis II, Kap. 8, Prop. 6.6:

M ist n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k mit Regularität C^ℓ

$\Leftrightarrow^{(*)}$ Zu jedem $p \in M$ gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^k$ und einen C^ℓ -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$, so dass $p \in U$ und $\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

$\Leftrightarrow^{(+)}$ Für alle $p \in M$ existiert eine n -dimensionale lokale Parametrisierung von M der Regularität C^ℓ , deren Bild p enthält.

Zu (*): Solch ein ϕ nennt man eine

Untermannigfaltigkeits-Karte.

Zu (+): Hier wurde die folgende Definition verwendet:

Definition (Analysis II, Kap. 8, Definition 6.8)

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Teilmenge. Eine n -dimensionale lokale Parametrisierung von M ist eine C^ℓ -Abbildung $f : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit:

- (a) $W \subset \mathbb{R}^n$ ist offen,
- (b) $f'(p) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ hat Rang n für alle $p \in W$,
- (c) $f(W) = U \cap M$ für eine offene Teilmenge U von \mathbb{R}^k ,
- (d) $f : W \rightarrow f(W)$ ist ein Homöomorphismus.

Wiederholung: Der Tangentialraum

Definition (Analysis II, Kap. 8, Def. 6.11)

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Der **Tangentialraum** an M im Punkt p ist

$$T_p M := \{v \in \mathbb{R}^k \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ und } c: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit} \\ c((-\varepsilon; \varepsilon)) \subset M, \quad c(0) = p \text{ und } c'(0) = v\} \subset \mathbb{R}^k.$$



Proposition (Analysis II, Kap. 8, Prop. 6.12)

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt.

- (a) Sei $\Phi : U \rightarrow V$ eine Untermannigfaltigkeits-Karte von M um p . Dann gilt $T_p M = \Phi'(p)^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$.
- (b) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offene Umgebung von p und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n} C^\ell$ mit 0 als regulärem Wert und $F^{-1}(\{0\}) = U \cap M$. Dann gilt

$$T_p M = \ker(F'(p)).$$

- (c) Sei $f : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale lokale Parametrisierung von M um p . Sei $\hat{p} := f^{-1}(p) \in W$. Dann gilt

$$T_p M = f'(\hat{p})(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere ist $T_p M$ ein n -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^k .

