Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇. Zeigen Sie, dass genau eine Folge bilinearer Operatoren

$$\nabla^{(r,s)} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T^{r,s}(M)) \to \Gamma(T^{r,s}(M)), \text{ wobei } r, s \in \mathbb{N}_0,$$

mit folgenden Eigenschaften existiert:

a) $\nabla_X^{(0,0)} f = \partial_X f,$

b) $\nabla_X^{(1,0)} Y = \nabla_X Y,$

c) $\left(\nabla_X^{(0,1)} \omega\right)(Y) = \partial_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y),$

d) $\nabla_X^{(r+r',s+s')}(T \otimes T') = \left(\nabla_X^{(r,s)} T\right) \otimes T' + T \otimes \left(\nabla_X^{(r',s')} T'\right).$

Dabei ist $\nabla_X^{(r,s)} T := \nabla^{(r,s)}(X, T)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\nabla^{(r,s)}$ ein lokaler Operator ist, und weisen Sie dann die geforderten Eigenschaften für die lokal definierten Operatoren nach.

Zusatz: Zeigen Sie, dass alle $\nabla^{(r,s)}$ auch die Eigenschaften

$$\nabla_{fX}^{(r,s)} T = f \cdot \nabla_X^{(r,s)} T \quad \text{und} \quad \nabla_X^{(r,s)}(fT) = (\partial_X f) \cdot T + f \cdot \nabla_X^{(r,s)} T$$

besitzen (in Analogie zu den Eigenschaften des affinen Zusammenhangs).

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇ und $T \in \Gamma(T^{0,k}(M))$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für die induzierte kovariante Ableitung $\nabla^{(0,k)}$ aus Aufgabe 1 die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X^{(0,k)} T\right)(X_1, \ldots, X_k) &= \partial_X \left(T(X_1, \ldots, X_k)\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} T(X_1, \ldots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

gilt mit Vektorfeldern $X, X_1, \ldots, X_k$ auf M.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit überall verschwindender Schnittkrümmung. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subset T_pM$ und $V \subset M$ gibt mit $0_{T_pM} \in U$ und $p \in V$, sodass $\exp_p : (U, g_p) \to (V, g)$ eine Isometrie ist. Dabei identifizieren wir $T_v(T_pM) \cong T_pM$ für $v \in T_pM$.

Hinweis: Es sei $v \in T_pM$ und $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$ die Geodätische durch p in Richtung v. Finden Sie zu $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$ eine explizite Darstellung des Jacobi-Felds J entlang γ mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt}\big|_{t=0} J(t) = w$ durch Paralleltransport von w entlang γ.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei V ein $n-$dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir definieren eine Abbildung

$$\beta : \left(\bigwedge^2 V^*\right) \otimes \left(\bigwedge^2 V^*\right) \to \left(\bigwedge^3 V^*\right) \otimes V^*$$

vermöge

$$\beta(R)(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W)$$

mit $X, Y, Z, W \in V$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung β ist wohldefiniert.

b) Ein $R \in V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ erfüllt genau dann die punktweisen Symmetrien des Krümmungstensors (also Antisymmetrie im 1. und 2. bzw. 3. und 4. Argument, Blockvertauschung und 1. Bianchi-Identität), wenn R im Kern von β liegt.

c) Die Abbildung β ist surjektiv. Wählen Sie dazu eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V^* und betrachten Sie zunächst

$$\beta\left((b_i \wedge b_j) \otimes (b_k \wedge b_\ell)\right) \text{ für } \ell \in \{i,j\} \text{ und für } \ell \notin \{i,j,k\}$$

und anschließend

$$\beta\left(((b_k + b_\ell) \wedge b_i) \otimes (b_j \wedge (b_k + b_\ell))\right).$$

d) Es gilt:

$$\dim \ker \beta = \binom{n}{2}^2 - n\binom{n}{3} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Abgabe in der Vorlesung am 26.11.2015