Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) zwei Riemannsche Mannigfaltigen mit zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhängen ∇^1 bzw. ∇^2. Wir identifzieren

$$T_{(p,q)}M_1 \times M_2 \cong T_pM_1 \times T_qM_2$$

und definieren die Produktmetrik $g_1 \oplus g_2$ auf $M_1 \times M_2$ durch

$$g_1 \oplus g_2\left((v_1, w_1), (v_2, w_2)\right) = g_1(v_1, v_2) + g_2(w_1, w_2).$$

a) Sind X_1 und X_2 Vektorfelder auf M_1 bzw. M_2, so definieren wir ein Vektorfeld X auf $M_1 \times M_2$ vermöge

$$X_{(p,q)} = (X_1, 0)_{(p,q)} + (0, X_2)_{(p,q)}$$

und schreiben $X = X_1 \oplus X_2$. Es sei Y ein weiteres Vektorfeld vom Typ $Y_1 \oplus Y_2$ mit $Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ und $Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$. Zeigen Sie, dass dann für den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ gilt, dass

$$\nabla_X Y = \nabla^1_{X_1} Y_1 + \nabla^2_{X_2} Y_2.$$

b) Es seien c_1 und c_2 Geodätische in M_1 bzw. M_2. Folgern Sie, dass dann c mit $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ eine Geodätische in $M_1 \times M_2$ ist.

c) Berechnen Sie den Krümmungstensor sowie die Schnitt-, Ricci- und Skalarkrümmung von $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ in Termen der entsprechenden Größen von (M_1, g_1) und (M_2, g_2).

d) Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung einer Ebene, die von zwei Vektoren $(v, 0)$ und $(0, w)$ aufgespannt wird, verschwindet.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : I \to M$ eine normierte Geodätische, d.h. $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$. Wir betrachten ein Vektorfeld X längs c mit $X(t) \perp c'(t)$ und $\|X(t)\| = 1$ für alle $t \in I$. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ glatt und K die Gaußkrümmung von M. Zeigen Sie:

a) X ist parallel längs c.

b) Das Vektorfeld fX ist genau dann ein orthogonales Jacobi-Feld längs c, falls

$$f'' + Kf = 0.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Wir betrachten die hyperbolische Ebene $(\mathfrak{H}, g^{\text{hyp}})$, wobei

$$\mathfrak{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y > 0\}$$

und $g^{\text{hyp}}_{x+iy} = \frac{1}{y^2} g^{\text{eukl}}$. Zeigen Sie, dass Halbkreise

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

bis auf Parametrisierung Geodätische von $(\mathfrak{H}, g^{\text{hyp}})$ sind.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es reicht, sich auf den Fall $a = 0$ und $r = 1$ zu beschränken. Finden Sie dann eine Möbius-Transformation $\Psi_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, mit $\Psi_A(i) = i$ und $\Psi_A(0) = -1$. Folgern Sie die Behauptung, indem Sie Ψ_A auf die Geodätische $\gamma(t) = ie^t$ anwenden.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Im Folgenden betrachten wir

$$H^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \text{ und } z > 0\}$$

und

$$\mathfrak{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},$$

wobei H^2 die von $R^{2,1}$ induzierte Riemannsche Metrik g trage und $\mathfrak{H}$ mit der Riemannschen Metrik $g^{\text{hyp}}_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} g^{\text{eukl}}$ versehen sei. Ferner setzen wir

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

a) Wir definieren eine stereographische Projektion f, indem wir jeden Punkt $p \in H^2$ auf den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von p und $(0, 0 - 1)$ mit der $xy-$Ebene abbilden. Zeigen Sie, dass H^2 durch f diffeomorph auf D^2 abgebildet wird, wobei wir die $xy-$Ebene mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

b) Wir fassen D^2 und $\mathfrak{H}$ vermöge $(x, y) \mapsto x + iy$ als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, dass

$$h : \mathfrak{H} \to D^2, \quad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

ein Diffeomorphismus ist.

c) Zeigen Sie, dass $f^{-1} \circ h : (\mathfrak{H}, g^{\text{hyp}}) \to (H^2, g)$ eine Isometrie ist.

Abgabe in der Vorlesung am 3.12.2015