Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei (M, g) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für ein $p \in M$ wählen wir $\varepsilon > 0$, sodass $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to \exp_p(B_\varepsilon(0))$ ein Diffeomorphismus ist. Es sei (e_1, e_2) eine Orthonormalbasis von T_pM. Für $r \in (0, \varepsilon)$ definieren wir den Kreis um p mit Radius r als

$$\begin{aligned} \gamma_r : [0, 2\pi] &\to M \\ t &\mapsto \exp_p((r\cos t)e_1 + (r\sin t)e_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie für die Schnittkrümmung K_p in p, dass

$$K_p = \frac{3}{\pi} \lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - \mathcal{L}[\gamma_r]}{r^3}.$$

Hinweis: Wählen Sie Polarkoordinaten (r, φ) in (T_pM, g_p), wobei (T_pM, g_p) über die Basis (e_1, e_2) mit $(\mathbb{R}^2, g^{\mathrm{eukl}})$ identifiziert sei, und zeigen Sie

$$g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = r^2 - \frac{K}{3}r^4 + O(r^5).$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist ein lokal symmetrischer Raum, falls $\nabla R = 0$ auf M.

a) Zeigen Sie, dass Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung lokal symmetrisch sind.

Es sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Geodätische in einem lokal symmetrischen Raum M der Dimension n durch $p = c(0)$ in Richtung $v = \dot{c}(0)$. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} K_v : T_pM &\to T_pM \\ x &\mapsto R(x, v)v. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von T_pM existiert, die K_v diagonalisiert, d.h., $K_v(e_i) = \lambda_i\, e_i$ für $i = 1, \ldots, n$ mit geeigneten $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Wir setzen die Basis $(e_1, \dots, e_n)$ aus b) durch Paralleltransport zu einem Rahmen $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ entlang c fort.

c) Es sei $J(t) = \sum_{i=1}^n x^i(t) e_i(t)$ ein Jacobi-Feld entlang c. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Gleichung zu dem System

$$\ddot{x}^i(t) + \lambda_i x^i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{(keine Summe über } i\text{)}$$

äquivalent ist.

d) Zeigen Sie, dass die konjugierten Punkte von p entlang c durch $c\left(\frac{k}{\sqrt{\lambda_i}}\pi\right)$ gegeben sind, wobei $k \in \mathbb{Z}$ und λ_i ein positiver Eigenwert von K_v ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)
Es sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zum Krümmungstensor R assoziieren wir den (0,4)-Tensor $\tilde{R}$ vermöge $g(R(X,Y)Z,W) = \tilde{R}(X,Y,Z,W)$.

a) Es sei $p \in M$ und $(e_1, \dots, e_n)$ eine vONB von T_pM. Finden Sie eine Fortsetzung von $e_1, \dots, e_n$ zu lokalen Vektorfeldern $E_1, \dots, E_n$ in einer geeigneten Umgebung U von p in M, sodass $\left(E_1|_q, \dots, E|_q\right)$ für alle $q \in U$ eine vONB von T_qM ist und $(\nabla E_i)_p = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

b) Es sei $p \in M$ und $X \in T_pM$. Zeigen Sie, dass der (0,4)-Tensor $\nabla_X \tilde{R}$ antisymmetrisch im 1. und 2. sowie im 3. und 4. Argument ist und außerdem die Blockvertauschung erfüllt.

Zusätzlich zu den obigen Symmetrien erfüllt $\nabla \tilde{R}$ die 2. Bianchi-Identität, d.h. für alle $p \in M$ und $X, Y, Z, U, W \in T_pM$ gilt

$$(\nabla_Z \tilde{R})(X,Y,U,W) + (\nabla_X \tilde{R})(Y,Z,U,W) + (\nabla_Y \tilde{R})(Z,X,U,W) = 0.$$

(Ein Beweis wird in der Vorlesung gegeben.)
Für $A \in \Gamma(T^{0,2}(M))$ definieren wir die Divergenz $\operatorname{div}(A) \in \Gamma(T^{0,1}(M))$ punktweise durch

$$\operatorname{div}(A)(x) := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\nabla_{e_i} A)(e_i, x)$$

für alle $x \in T_pM$, wobei $(e_1, \dots, e_n)$ eine vONB von T_pM sei, d.h. $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \cdot \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}(A)$ wohldefiniert ist.

d) Beweisen Sie mit Hilfe der 2. Bianchi-Identität, dass

$$2 \cdot \operatorname{div}(\mathrm{ric}) = d\,scal.$$

Abgabe in der Vorlesung am 10.12.2015