Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (4 Punkte)
Berechnen Sie die Schnittkrümmung des pseudo-hyperbolischen Raumes

$$H^{k,\ell-1} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{k+\ell} \,\middle|\, g^{(k,\ell)}(X,X) = -1 \right\},$$

wobei $H^{k,\ell-1}$ die von $(\mathbb{R}^{(k,\ell)}, g^{(k,\ell)})$ induzierte semi-Riemannsche Metrik trage.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $(\bar{M}, \bar{g})$ eine flache semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und M eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\bar{M}$ der Dimension m mit induzierter Metrik g. Für eine Basis $(b_1, \ldots, b_m)$ von T_pM mit $g(b_i, b_j) = \delta_{ij}\,\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ definieren wir den mittleren Krümmungsvektor $H_p := \sum_{i=1}^m \varepsilon_i\, \mathbb{I}(b_i, b_i)$.

a) Zeigen Sie, dass H_p wohldefiniert ist.

b) Es sei ric die Ricci-Krümmung von (M, g). Zeigen Sie für alle $X, Y \in T_pM$, dass

$$\mathrm{ric} = \bar{g}(H_p, \mathbb{I}(X,Y)) - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i\, \bar{g}(\mathbb{I}(b_i, X), \mathbb{I}(b_i, Y)).$$

c) Es sei nun M eine Hyperfläche mit einem (lokalen) verallgemeinerten Einheitsnormalenfeld ν und assoziierter Weingartenabbildung S. Zeigen Sie für die Skalarkrümmung scal von (M, g), dass

$$\bar{g}(\nu, \nu) \cdot \mathrm{scal} = (\mathrm{Tr}\, S)^2 - \mathrm{Tr}(S^2).$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇. Wir betrachten eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r < t_{r+1} = 1$ und einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit glatten Einschränkungen $\gamma_i := \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für $i = 0, 1, \ldots, r$. Der Paralleltransport entlang γ ist dann durch

$$\mathcal{P}_\gamma^\nabla := \mathcal{P}_{\gamma_r}^\nabla \circ \mathcal{P}_{\gamma_{r-1}}^\nabla \circ \ldots \circ \mathcal{P}_{\gamma_0}^\nabla : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(1)}M$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_\gamma^\nabla$ wohldefiniert ist. Wie verändert sich der Paralleltransport unter orientierungserhaltenden und orientierungsumkehrenden Parametertransformationen von γ?

b) Für ein $p \in M$ definieren wir die Holonomiegruppe

$$\mathrm{Hol}_p^\nabla := \left\{ \mathcal{P}_\gamma^\nabla \,\middle|\, \gamma \in C([0,1], M) \text{ wobei } \gamma \text{ stückweise glatt und } \gamma(0) = \gamma(1) = p \right\}.$$

Zeigen Sie, dass Hol_p^∇ eine Untergruppe von $(\mathrm{Aut}(T_pM), \circ)$ ist.

c) Beweisen Sie, dass für $p, q \in M$ die Gruppen Hol_p^∇ und Hol_q^∇ isomorph sind.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt Einstein-Mannigfaltigkeit, falls ein $f \in C^\infty(M)$ existiert, sodass $\mathrm{ric} = f \cdot g$.

a) Zeigen Sie, dass (M, g) eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist, falls die Schnittkrümmung nur vom Fußpunkt abhängt, d.h. für ein fixiertes p unabhängig von der Wahl der nicht-ausgearteten Ebene $E \subset T_pM$ ist.

b) Beweisen Sie, dass jede zusammenhängende Einstein-Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ konstante Skalarkrümmung hat.

Abgabe in der Vorlesung am 17.12.2015