Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 10

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M, g) eine zusammenhängende, nicht kompakte, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

a) Zeigen Sie die Existenz einer Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in M mit $d(p, p_i) \to \infty$ für $i \to \infty$.

b) Schließen Sie, dass es in (M, g) eine minimale Geodätische $\gamma : [0, \infty) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c_i : [0, l_i] \to M$ mit $c_i(0) = p$ und $c_i(l_i) = p_i$. Da $\|\dot{c}_i(0)\| = 1$, konvergiert eine Teilfolge $\dot{c}_{i_j}(0) \to X \in T_pM$. Setzen Sie dann $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ und zeigen Sie $d(p, \gamma(t)) = t$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $M, g)$ eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Wir fixieren einen Punkt $m \in M \setminus N$.

a) Zeigen Sie, dass es einen Punkt $p \in N$ gibt mit $d(m, p) = d(m, N)$, wobei $d(m, N) := \inf \{d(m, x) \mid x \in N\}$.

b) Zeigen Sie, dass eine Geodätische γ von m nach p mit $\mathcal{L}[\gamma] = d(m, p)$ existiert.

c) Schließen Sie mit Hilfe der 1. Variationsformel für die Energie, dass γ auf N senkrecht steht.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M, g) ein lokal symmetrischer Raum, d.h. eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\nabla R = 0$. Für ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \to \exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$$

ein Diffeomorphismus ist, definieren wir die geodätische Spiegelung

$$\sigma_p : B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(p)$$

vermöge $\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ für alle Geodätischen γ mit $\gamma(0) = p$.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma_p = \exp_p \circ \left(-\mathrm{id}_{T_pM}\right) \circ \exp_p^{-1}$.

b) Es sei $v \in B_\varepsilon(0)$ und $q = \exp_p(v)$. Wir bezeichnen den Paralleltransport entlang den Geodätischen $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ und $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ mit

$$\mathcal{P}_t : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{P}}_t : T_{\tilde{\gamma}(0)}M \to T_{\tilde{\gamma}(t)}M$$

und definieren

$$\begin{aligned} \Phi_t : T_{\gamma(t)}M &\to T_{\tilde{\gamma}(t)}M \\ w &\mapsto \tilde{\mathcal{P}}_t \circ \left(-\mathrm{id}_{T_pM}\right) \circ \mathcal{P}_t^{-1}(w). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Ist $t \mapsto J(t)$ ein Jacobi-Feld längs γ, so ist $t \mapsto \tilde{J}(t) = \Phi_t(J(t))$ ein Jacobi-Feld längs $\tilde{\gamma}$.

c) Folgern Sie, dass $\sigma : B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(p)$ eine Isometrie ist.
Hinweis: Ist $q = \exp_p(v) \in B_\varepsilon(p)$ und $X \in T_qM$, so existiert genau ein $x \in T_v(T_pM) \cong T_pM$ mit $(d_v \exp_p)(x) = X$. Wenden Sie nun b) auf das Jacobi-Feld J längs $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt}\big|_{t=0} J(t) = x$ an.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. In einer Umgebung U von $p \in M$ existiere eine Isometrie $\sigma : U \to \sigma(U)$ mit $d_p\sigma = -\mathrm{id}_{T_pM}$. Wir betrachten eine Geodätische $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ mit $\gamma(0) = p$.

a) Es sei X ein paralleles Vektorfeld entlang γ. Zeigen Sie, dass

$$\left(d_{\gamma(t)}\sigma\right) X(t) = -X(-t)$$

und folgern Sie für einen parallelen Rahmen $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ entlang γ, dass

$$g_{\gamma(t)}\left(R(e_i(t), e_j(t))e_k(t), e_l(t)\right) = g_{\gamma(-t)}\left(R(e_i(-t), e_j(-t))e_k(-t), e_l(-t)\right).$$

b) Wir nehmen nun an, dass für alle $q \in M$ die analog zu Aufgabe 3 definierten geodätischen Spiegelungen σ_q Isometrien sind. Zeigen Sie, dass dann (M, g) lokal symmetrisch ist.

Abgabe in der Vorlesung am 7.1.2016