Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 11

1. Aufgabe (4 Punkte)
Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt symmetrischer Raum, falls in jedem Punkt $p \in M$ ein $\sigma \in \mathrm{Isom}(M, g)$ mit $\sigma(p) = p$ und $d_p\sigma = -\mathrm{id}_{T_pM}$ existiert.
Zeigen Sie, dass symmetrische Räume geodätisch vollständig sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M. Eine Kurve $c : (a, b) \to M$ heißt Integralkurve von X, falls $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$ für alle $t \in (a, b)$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $p \in M$ eine eindeutig bestimmte Integralkurve c von X mit $c(0) = p$ und maximalem Definitionsbereich existiert.

b) Es seien U, W offene Teilmengen von M, wobei der Abschluss von W eine kompakte Teilmenge von U sei. Zeigen Sie, dass eine Integralkurve $c : (a, b) \to W$ von X zu einer Integralkurve $c : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to U$ mit einem geeigeneten $\varepsilon > 0$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Ist $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (a, b) mit $t_k \to a$ (bzw. $t_k \to b$), so existiert eine konvergente Teilfolge $c(t_{k_j}) \to p \in U$.
Wählen Sie eine Riemannsche Metrik auf M und zeigen Sie, dass es ein $\alpha > 0$ mit $d(c(t_1), c(t_2)) \leq \alpha|t_1 - t_2|$ für alle $t_1, t_2 \in (a, b)$ gibt.
Schließen Sie, dass $c(s_k) \to p$ für alle Folgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in (a, b) mit $s_k \to a$ (bzw. $s_k \to b$). Damit existiert eine stetige Fortsetzung $c : [a, b] \to U$.

c) Wir nehmen nun an, dass X kompakten Träger hat. Folgern Sie mit b), dass Integralkurven von X auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, X ein Vektorfeld auf M und $q \in M$.

a) Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung U von q zusammen mit einer glatten Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ existieren, sodass

$$X_{\varphi_t(p)} = \frac{d}{dt}\varphi_t(p) \quad \text{und} \quad \varphi_0(p) = p$$

für alle $(t, p) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times U$. Dabei ist $\varphi_t(p) := \varphi(t, p)$.

b) Beweisen Sie, dass für kompaktes M die Abbildung $\varphi_t : M \to M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung φ_{-t} ist.

c) Es sei Y ein weiteres Vektorfeld auf M. Für kleine $|t|$ ist dann

$$\left(\varphi_t^* Y\right)_q := d_{\varphi_t(q)}(\varphi_{-t})\, Y_{\varphi_t(q)} \in T_q M$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$[X,Y]_q = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\varphi_t^* Y\right)_q .$$

Hinweis: Rechnen Sie in lokalen Koordinaten.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben seien zwei zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M,g) und (N,h) mit gleicher Dimension.

a) Es sei (M,g) vollständig und $\pi : M \to N$ eine lokale Isometrie, d.h. $g_p(v,w) = h_{\pi(p)}(d_p\pi(v), d_p\pi(w))$ für alle $p \in M$ und $v,w \in T_pM$. Zeigen Sie, dass dann auch (N,h) vollständig ist und $\pi : M \to N$ eine Überlagerung.

b) Es sei $\pi : M \to N$ eine glatte Überlagerung und (N,h) vollständig. Zeigen Sie, dass $\pi^* h$ eine Riemannsche Metrik auf M definiert und $(M, \pi^* h)$ vollständig ist.

Abgabe in der Vorlesung am 14.1.2016