Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte)
Eine Lie-Gruppe G ist eine glatte Mannigfaltigkeit, die zugleich eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ mit neutralem Element e ist, wobei $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$ glatt ist.
Es bezeichne $L_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$ die Linksmultiplikation mit g. Ein Vektorfeld $\underline{X} \in \mathfrak{X}(G)$ heißt linksinvariant, falls $(d_h L_g)\underline{X}_h = \underline{X}_{g \cdot h}$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathfrak{g}$ aller linksinvarianten Vektorfelder einen Vektorraum bildet, der zu $T_e G$ isomorph ist.

b) Beweisen Sie, dass die Integralkurven eines linksinvarianten Vektorfeldes $\underline{X}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst Integralkurven $\alpha_{\underline{X}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ mit $\alpha_{\underline{X}}(0) = e$ und zeigen Sie, dass

$$\alpha_{\underline{X}}(s + t) = \alpha_{\underline{X}}(s) \cdot \alpha_{\underline{X}}(t) \quad \textit{für alle} \quad s, t, s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Gruppe Γ versehen wir mit der diskreten Topologie und wir betrachten sie als 0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Gegeben sei eine Gruppen-Operation A von Γ auf M, d.h. eine stetige Abbildung $A : M \times \Gamma \to M$ mit $A(p, e) = p$ und $A(p, \gamma\tau) = A(A(p, \gamma), \tau)$ für alle $p \in M$, $\gamma, \tau \in \Gamma$. Sei $p \cdot \Gamma := \{A(p, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ der Orbit von p, sei $M/\Gamma := \{p \cdot \Gamma \mid p \in M\}$ der Quotientenraum und sei $\pi : M \to M/\Gamma$, $\pi(p) = p \cdot \Gamma$ die *kanonische Projektion*. Der *Quotientenraum* M/Γ wird mit der *Quotiententopologie* versehen, d.h. $U \subset M/\Gamma$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist.

a) Zeigen Sie :Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist $R_\gamma : M \to M$, $p \mapsto A(p, \gamma)$ ein Homöomorphismus.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass Γ *frei* und *eigentlich diskontinuierlich* auf M operiert. „Frei“ bedeutet, dass die Abbildung $R_\gamma : M \to M$ nur für $\gamma = e$ Fixpunkte hat. Eigentlich diskontinuierlich bedeutet, dass zu allen $p, q \in M$ Umgebungen U von p und V von q existieren, sodass $R_\gamma(U) \cap V = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $A(p, \gamma) \neq q$.

Zeigen Sie nun:

b) M/Γ ist ein Hausdorffraum

c) Die kanonische Projektion $\pi : M \to M/\Gamma$ ist eine Überlagerung.

d) (Bonus-Aufgabe, 2 Punkte) Ist A eine glatte Abbildung, so sind die Abbildungen R_γ Diffeomorphismen und M/Γ trägt genau eine differenzierbare Struktur, so dass π ein lokaler Diffeomorphismus ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)
Es sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$. Für ein $p \in M$ seien je zwei Basen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ von T_pM äquivalent, falls der Basiswechsel $C = (c_{i,j})$ mit $b_i = \sum_{j=1}^n c_{j,i} a_j$ positive Determinante hat. Es bezeichne $\mathcal{O}_p$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Basen von T_pM. Wir nennen ein $O_p \in \mathcal{O}_p$ eine Orientierung von T_pM und definieren

$$\tilde{M} = \{(p, O_p) \mid p \in M,\, O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

a) Es sei (U_α, x_α) eine Karte von M. Wir setzen dann

$$\tilde{U}_\alpha = \left\{ (p, O_p) \,\middle|\, p \in U,\, O_p \in \left[\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right)\right] \right\}$$

und

$$\tilde{x}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to x_\alpha(U_\alpha), \quad (p, O_p) \mapsto x_\alpha(p).$$

Zeigen Sie, dass $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{x}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ eine glatte Struktur auf $\tilde{M}$ definiert, die $\tilde{M}$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit macht.

b) Zeigen Sie, dass $\tilde{M}$ orientierbar ist.

c) Beweisen Sie, dass die Projektion $\pi : \tilde{M} \to M$, $(p, O_p) \mapsto p$ eine glatte, zweiblättrige Überlagerung ist.

Abgabe in der Vorlesung am 21.1.2016