Übungen zur Differentialgeometrie

Universität Regensburg, Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dipl.-Math. Manuel Streil

Übungsblatt 13

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$. Zeigen Sie, dass auf M keine Riemannsche Metrik h existiert für die $\mathrm{ric}(v, v) > 0$ für alle $v \in TM$, $v \neq 0$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Antipodenabbildung $A : S^n \to S^n$ mit $x \mapsto -x$ die Orientierung erhält, falls n ungerade ist, und die Orientierung umkehrt, falls n gerade ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}P^{2n}$ nicht orientierbar und $\mathbb{R}P^{2n-1}$ orientierbar ist.

b) Beweisen Sie, dass jede Lie-Gruppe $(G, \cdot, e)$ orientierbar ist.
Hinweis: Wählen Sie dazu eine Karte (U, x) mit $e \in U$, wobei U zusammenhängend ist, und setzen Sie diese durch Linkstranslation zu einem Atlas von G fort. Zeigen Sie, dass die Kartenwechsel positive Jacobi-Determinante haben.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension n mit konstanter Schnittkrümmung K und $\tilde{K}$, $K = \tilde{K}$. Für Punkte $p \in M$ und $\tilde{p} \in \tilde{M}$ wählen wir eine lineare Isometrie $i : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ ist dann

$$\begin{aligned} f : B_\varepsilon(p) &\to B_\varepsilon(\tilde{p}) \\ q &\mapsto \exp_{\tilde{p}} \circ\, i \circ \exp_p^{-1}(q) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus.

a) Es sei $v \in B_\varepsilon(0)$ und $q = \exp_p(v)$. Wir bezeichnen den Paralleltransport entlang den Geodätischen $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ und $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma$ mit

$$\mathcal{P}_t : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{P}}_t : T_{\tilde{\gamma}(0)}\tilde{M} \to T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$$

und definieren

$$\begin{aligned} \Phi_t : T_{\gamma(0)}M &\to T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M} \\ w &\mapsto \tilde{\mathcal{P}}_t \circ i \circ \mathcal{P}_t^{-1}(w). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Ist $t \mapsto J(t)$ ein Jacobi-Feld längs γ, so ist $t \mapsto \tilde{J}(t) = \Phi_t(J(t))$ ein Jacobi-Feld längs $\tilde{\gamma}$.

b) Folgern Sie, dass $f : B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(\tilde{p})$ eine Isometrie ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (M^n, g), $n \geq 2$, eine (zusammenhängende) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K. Wir betrachten die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{M} \to M$.
Zeigen Sie:

$$(\tilde{M}, \pi^* g) \text{ ist isometrisch zu } \begin{cases} H^n & \text{falls } K = -1 \\ \mathbb{R}^n & \text{falls } K = 0 \\ S^n & \text{falls } K = 1 \end{cases} .$$

Abgabe in der Vorlesung am 28.1.2016