Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 04.05.2017 um 12:00 Uhr (in den Übungskästen 4-6 im 1. Stock des Mathematikgebäudes)

Bitte heften Sie Ihre Abgabe zusammen (keine losen Blätter) und versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Übungsgruppennummer.

Übungsblatt 1

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms in den Fällen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Überprüfen Sie die Matrix auf Diagonalisierbarkeit in diesen beiden Fällen. Bestimmen Sie außerdem im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alle Eigenräume.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben und $x \in (a,b)$ fixiert. Zeigen Sie, dass f genau dann differenzierbar in x ist, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ch}{|h|} = 0.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Geschwindigkeitsvektoren und die Bogenlänge:

i) $\gamma_1\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma_1(t) = (\cos^3(2t), \sin^3(2t))$.

ii) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, $x + iy = (x,y)$, und definieren $\gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_2(t) = e^{(c+i)t}$, wobei $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $a < b$. Bestimmten Sie außerdem den Grenzwert der Bogenlänge für $a \to -\infty$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre glatte Kurve sowie $s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|_2 \, d\tau$. Zeigen Sie:

i) $s\colon [a,b] \to [0,L]$ ist eine Parametertransformation, wobei L die Bogenlänge von γ bezeichnet. Zeigen Sie insbesondere $s \in C^\infty$ und $s^{-1} \in C^\infty$.

ii) Die Umparametrisierung $\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1}\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$ ist nach Bogenlänge parametrisiert.

iii) Bestimmen Sie die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{\gamma}$ für die logarithmische Spirale gegeben durch $\gamma\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.