Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 11.05.2017 um 12:00 Uhr

Übungsblatt 2

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $r, h > 0$ und $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die Schraubenlinie. Berechnen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ den Krümmungsvektor $\vec{\kappa}(t)$ und die Krümmung $\kappa(t)$ von γ.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben seien die Vektorräume $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ mit Normen $\|.\|_V$ und $\|.\|_W$. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definieren wir

$$\|A\|_{V,W} := \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}.$$

Sei $S := \{x \in V \mid \|x\|_2 = 1\}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) $\|A\|_{V,W} = \sup_{v\in S} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}$. *Hinweis: absolute Homogenität.*

ii) Es gilt $\|A\|_{V,W} \in [0,\infty)$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Hinweis: Kompaktheit von S.*

iii) $\|.\|_{V,W}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.
(Man nennt $\|.\|_{V,W}$ Operatornorm bezüglich $\|.\|_V$ und $\|.\|_W$.)

3. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ in alle Richtungen richtungsableitbar ist und berechnen Sie die Richtungsableitungen.

ii) Ist f in $(0,0)$ stetig?

iii) Ist f in $(0,0)$ differenzierbar? *Hinweis: Falls f differenzierbar in $(0,0)$ ist, so gilt $\partial_{(0,0),v} f = f'((0,0)) \cdot v$ **für alle** $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

4. Aufgabe (4 Punkte)

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten wir das Minkowski-Produkt

$$\left\langle\!\!\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle\!\!\right\rangle := -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Eine reguläre Kurve $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *Weltlinie* (mit positiver Ruhemasse), falls für alle $t \in (a,b)$ gilt: $\langle\!\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle\!\rangle < 0$.

i) Zeigen Sie, dass für jede Weltlinie γ eine Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$ existiert, so dass $\langle\!\langle \tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle\!\rangle = -1$ für alle t. (Man nennt $\tilde{\gamma}$ eine *nach Eigenzeit parametrisierte Weltlinie.*) *Hinweis: Gehen sie ähnlich vor wie in der 4. Aufgabe von Übungsblatt 1.*

ii) Ist γ eine nach Eigenzeit parametrisierte Weltlinie, so definieren wir die *Beschleunigung im Parameter t* als $\vec{a}(t) := \gamma''(t)$. Zeigen Sie $\langle\!\langle \vec{a}(t), \gamma'(t) \rangle\!\rangle = 0$ für alle t.