Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 18.05.2017 um 12:00 Uhr

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \|x\|^\gamma,$$
$$g(x) = \log \|x\|,$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

i) Zeigen Sie, dass f und g differenzierbar sind und berechnen Sie die Gradienten ∇f und ∇g.

ii) Zeigen Sie, dass die Gradienten $\nabla f, \nabla g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind und berechnen Sie Δf und Δg.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine rotationssymmetrische Funktion, d.h. es gebe eine Funktion $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ so, dass man f darstellen kann als $f(x) = g(\|x\|)$. Weiter sei f differenzierbar.

i) Zeigen Sie, dass g auf $(0, \infty)$ differenzierbar und in 0 rechtsseitig differenzierbar sein muss.

ii) Drücken Sie die Ableitung von f in Punkten $x \neq 0$ durch die Ableitung von g (und Terme, die von x abhängen) aus. Bestimmen Sie die Ableitung von f im Punkt 0.

3. Aufgabe (4 Punkte)

i) Sei $g: (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von g. *Bemerkung: Man nennt diese Abbildung die Parametrisierung durch Zylinderkoordinaten.*

ii) Sei $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\tilde{u} := u \circ g$ mit g aus i). Berechnen Sie $\nabla \tilde{u}$ als Ausdruck in den partiellen Ableitungen von u.

iii) Sei $\tilde{u}$ wie in ii). Zusätzlich sei ∇u differenzierbar. Zeigen Sie:

$$(\Delta u) \circ g = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right).$$

Bemerkung: Man nennt diese Formel die Darstellung des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist und dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ ebenfalls partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie dabei auch, dass

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0).$$