Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann

Auf Grund des Feiertags am Donnerstag, ist die Abgabe diese Woche anders geregelt.
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis 26. Mai um 11:00 Uhr im Büro von Frau Bonn, Mathematik 217, nicht weit von den üblichen Zettelkästen ab.

Übungsblatt 4

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $f\colon\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v\colon\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

i) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$,

ii) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$,

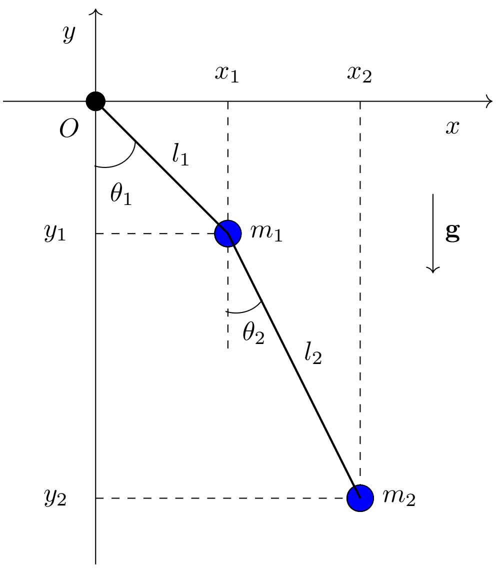
iii) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \nabla(\operatorname{div} v) - \Delta v$.

Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

iv) $\operatorname{grad}\operatorname{div} v = \Delta v$.

In iii) und iv) ist Δ komponentenweise definiert, das heißt $\Delta v = \Delta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe (4 Punkte) *Doppelpendel*



Gegeben sei die potentielle Energie eines Doppelpendels als

$$E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto -(m_1 + m_2)\ell_1 \cos\theta_1 - m_2\ell_2 \cos\theta_2$$

Berechnen Sie alle $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla E(\theta_1, \theta_2) = 0$ und bestimmen Sie die Hesse-Matrix in diesen Punkten. Unter welchen Voraussetzungen ist die Hesse-Matrix positiv/negativ (semi-)definit und wann indefinit?

Zusatzfrage: Wie interpretiert man dies physikalisch?

3. Aufgabe (4 Punkte)

i) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt $(0,0)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, x_2) := \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^\alpha.$$

ii) Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $B_\delta(x) \subset U$. Zeigen Sie, dass für alle $h = (h_1, h_2)^T \in B_\delta(0)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x+h) = {} & f(x) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) h_2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) h_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x) h_2^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} f(x) h_1^2 h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} f(x) h_1 h_2^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} f(x) h_1^3 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} f(x) h_2^3 + \varphi(h) \end{aligned}$$

gilt, wobei $\varphi(h) = o(\|h\|^3)$ für $h \to 0$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Zeigen Sie die Kettenregel $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $x \in U$.

ii) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

Zeigen Sie, dass f die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) - \Delta f(x,t) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

löst. Dabei ist $\Delta f(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x,t)$ der Laplace-Operator bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$.