Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 01.06.2017 bis 12:00 Uhr im Zettelkasten

Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix.

i) Zeigen Sie: Gibt es $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_{ii} > 0$ und $a_{jj} < 0$, so ist A indefinit.

ii) Nun sei $n = 2$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $a_{11} > 0$ und $\det(A) > 0$. Zeigen Sie: A ist genau dann negativ definit, wenn $a_{11} < 0$ und $\det(A) > 0$.

iii) Geben Sie ein Beispiel für eine indefinite 2×2-Matrix mit $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$ an. Begründen Sie Ihre Wahl.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden symmetrischen Matrizen positiv (semi-) definit, negativ (semi-) definit oder indefinit sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \qquad g(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und g. Entscheiden Sie bei jedem kritischen Punkt, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum, oder einen Sattelpunkt handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\overline{B} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \le 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \overline{B} \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, x_2) := x_1^2 + 2x_2^2.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die *globalen* Minima bzw. Maxima von f zu finden. (Ist $h\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so nennen wir $x \in X$ ein globales Minimum bzw. globales Maximum, falls $h(x) \le h(y)$ bzw. $h(x) \ge h(y)$ für alle $y \in X$.)

i) Begründen Sie zunächst, dass f auf $\overline{B}$ ein globales Minimum und Maximum annimmt. *Hinweis: Die Menge $\overline{B}$ ist kompakt.*

ii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von $g := f|_{B_1(0)}: B_1(0) \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für jeden dieser kritischen Punkte, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum, oder einen Sattelpunkt von g handelt.

iii) Bestimmen Sie die globalen Minima und Maxima von f. *Hinweis: Aufgabenteil ii) ist hier hilfreich, um die Extremstellen im Inneren $B_1(0)$ von $\overline{B}$ zu bestimmen. Um die Extremstellen auf dem Rand $\partial\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ von $\overline{B}$ zu finden, können Sie zum Beispiel die Funktion $f \circ \gamma$ betrachten, wobei $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$.*