
Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei eine symmetrische $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die kritischen Punkte des sogenannten *Rayleigh-Quotienten*

$$R\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{x^T A x}{\|x\|^2}$$

genau die Eigenvektoren von A sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und entscheiden Sie bei jedem der kritischen Punkte, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum, oder einen Sattelpunkt handelt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

$M \subset \mathbb{R}^2$ sei die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 y^2 = 3xy.$$

i) Bestimmen Sie M direkt. Skizzieren Sie M.

ii) In welchen Punkten kann man M lokal als Graph einer Funktion $y = g(x)$ darstellen? In welchen Punkten kann man M lokal als Graph einer Funktion $x = f(y)$ darstellen? Geben Sie für diese Punkte g bzw. f konkret an.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \le 0, z \in \mathbb{R}\}$ und $U := (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$. Die Abbildung

$$\Phi\colon U \to V,\, \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

nennen wir *Kugelkoordinatentransformation.*

i) Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist. Geben Sie dazu die Umkehrfunktion konkret an. *Hinweis: eine kleine Fallunterscheidung ist notwendig, wie bei den Polarkoordinaten im Skript.*

ii) Zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus ist.

iii) Bestimmen Sie $\Phi'(r,\theta,\phi)$ und zeigen Sie, dass Φ eine orthogonale Koordinatentransformation ist.

iv) Bestimmen Sie die dazugehörigen Maßstabsfaktoren N_r, N_θ, N_ϕ und das dazugehörige 3-Bein E_r, E_θ, E_ϕ.