Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann

Auf Grund des Feiertags am Donnerstag, ist die Abgabe diese Woche anders geregelt.
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis 16. Juni um 11:00 Uhr im Büro von Frau Bonn, Mathematik 217, nicht weit von den üblichen Zettelkästen ab.

Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z^2 = 1\}.$$

i) Zeigen Sie: M ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

ii) Bestimmen Sie die Dimension von M.

iii) Geben Sie für $(x, y, z) \in M$ den Tangentialraum $T_{(x,y,z)}M$ und den Normalenraum $\mathcal{N}_{(x,y,z)}$ an.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Untermannigfaltigkeiten sind. Wenn es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt, begründen Sie, warum das so ist.

i) $N_1 = \partial([-1, 1] \times [-1, 1])$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

ii) $N_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$.

iii) $M_{m^2} = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = m^2\}$ für beliebiges $m > 0$.

iv) $M_0 = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$.

v) $M_{-m^2} = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -m^2\}$ für beliebiges $m > 0$.

Bemerkung: In der Speziellen Relativitätstheorie nennt man M_0 den Lichtkegel und M_{m^2} die Massenschale zur Masse m.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ sei die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$e^x - y + x - z = -1,$$
$$ye^{-z} - \frac{1}{e} = 0.$$

i) Es sei $(x_0, y_0, z_0) \in M$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von x_0 und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$, $h(x_0) = z_0$, und für alle $x \in U$ stellt $(x, g(x), h(x))$ eine Lösung des Gleichungssystems dar.

ii) Bestimmen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$ für die zum Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ gehörenden Funktionen g und h.

4. Aufgabe (4 Punkte)

i) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (x + y\cos x, ye^{xy})$. Zeigen Sie, dass es Umgebungen U und V von $(0,0)$ gibt, so dass gilt: Für alle $(w,z) \in V$ hat die Gleichung $f(x,y) = (w,z)$ eine eindeutige Lösung $(x,y) = g(w,z)$. Begründen Sie außerdem, dass g stetig differenzierbar ist auf V und bestimmen Sie $g'(0,0)$.

ii) Sei $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Zeigen Sie, dass g ein lokaler Diffeomorphismus ist und berechnen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion. Ist g ein Diffeomorphismus?