Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 22.06.2017 bis 12:00 Uhr im Zettelkasten

Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und seien $f, g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie:

i) Gilt $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in Q$, so gilt auch $\int_Q g(x)\,dx \leq \int_Q f(x)\,dx$.

ii) $|f|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_Q f(x)\,dx \right| \leq \int_Q |f(x)|\,dx.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f: S^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + yz$, wobei $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Für ein $R \in (0, 1)$ betrachten wir die glatte Funktion

$$F : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 + z^2 - R^2$$

Die Nullstellenmenge $T_R := F^{-1}(0)$ nennt man den Torus.

i) Zeigen Sie, dass T_R eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Skizzieren Sie diese Fläche. Bestimmen Sie dazu zunächst den Schnitt von T_R mit der durch $y = 0$ gegebenen Ebene.

iii) Bestimmen Sie den Normalenvektorraum $\mathcal{N}_{(x,y,z)}$ von $T_R \subset \mathbb{R}^3$ in einem beliebigen Punkt $(x, y, z) \in T_R$. *Hinweis: Nutzen Sie ∇F gemäß Interpretation 1.115 der Vorlesung.*

4. Aufgabe (4 Punkte)

Für ein $R \in \mathbb{R}$ mit $0 < R < 1$ betrachten wir $f: T_R \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, wobei T_R wie in der 3. Aufgabe definiert ist.

i) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f.

ii) Bestimmen Sie, welche dieser stationären Punkte lokale Minima und Maxima von f sind. *Hinweis: Aufgabenteil ii) kann mit elementaren Methoden gelöst werden.*