Analysis II für Physiker: Übungen
Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 29.06.2017 bis 12:00 Uhr im Zettelkasten

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge.

i) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Funktion $f : N \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

ii) Zeigen Sie: Ist $f : N \to \mathbb{R}$ beschränkt, so gilt $\int_N f(x)\,dx = 0$.

iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}(N) = 0$.

Hinweis zu i): Erweitern Sie f zu einer Funktion $\tilde{f}$, die auf einem Quader definiert ist.
Hinweis zu i) und ii): Nutzen Sie die Definition von Jordan-Nullmengen.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen dass Definition 2.11 nicht von der Wahl von Q abhängt. Man sollte also nur Aussagen vor Definition 2.11 nutzen.

i) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von Q. Zeigen Sie: Ist $f|_P\colon P \to \mathbb{R}$ für jeden Teilquader $P \in \mathcal{Z}$ Riemann-integrierbar, so ist $f\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \sum_{P \in \mathcal{Z}} \int_P f(x)\,dx.$$

ii) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f(x) = 0$ für alle $x \in Q \setminus \partial Q$. Zeigen Sie, dass $f\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_Q f(x)\,dx = 0.$$

iii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ nicht abhängig ist von der Wahl des Quaders Q in Definition 2.11 der Vorlesung. Zeigen Sie weiter, dass im Fall einer Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ das Riemann-Integral über A nicht von der Wahl des Quaders Q abhängt.

Hinweis zu i) und ii): Nutzen Sie den Beweis von Satz 2.5 und wählen Sie die Punkte Ξ_m geschickt.
Hinweis zu iii): Nutzen Sie die Aufgabenteile i) und ii).

3. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen $\mathrm{vol}(A)$ der folgenden Mengen:

i) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le (1-z)^2,\ z \in [0,1]\}$ (Paraboloid)

ii) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1, x^2 + z^2 \le 1\}$ (Schnitt zweier Zylinder, deren Achsen die z- bzw. die y-Achse sind)

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f\colon[a,b] \to [0,\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion und M_f der Rotationskörper von f, definiert durch

$$M_f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a,b],\ x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\}.$$

i) Zeigen Sie, dass M_f Jordan-messbar ist.

ii) Zeigen Sie durch Transformation auf Zylinderkoordinaten, dass $\operatorname{vol}(M) = \pi \int_a^b (f(t))^2\, dt$.

iii) Berechnen Sie damit nochmal das Volumen vom Paraboloid aus Aufgabe 3 i).

iv) Berechnen Sie für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ das Integral $\int_A f(x,y,z)\, d(x,y,z)$, wobei A der Paraboloid aus Aufgabe 3 i) ist.