Analysis II für Physiker: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2017
Prof. Dr. Bernd Ammann/ M.Sc. Johannes Wittmann
Abgabe am 20.07.2017 bis 12:00 Uhr im Zettelkasten

Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a, b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(y,t)\, dy.$$

Zeigen Sie, dass g stetig differenzierbar ist mit

$$g'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(y,t)\, dy + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t).$$

Hinweis: Betrachten Sie $F(t,a,b) := \int_a^b f(y,t)\, dy$ und verwenden Sie die Kettenregel. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass F bezüglich t stetig partiell differenzierbar ist und

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,a,b) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(y,t)\, dy$$

für alle $t, a, b \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

i) Es sei I ein offenes Intervall mit $t_0 \in I$ und es seien $a, b: I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y + b(t), \qquad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt, die durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\right) y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)\, d\tau\right) b(s)\, ds,$$

$t \in I$, gegeben ist.

ii) Bestimmen Sie durch Anwenden von Sätzen aus der Vorlesung und gezeigten Resultaten die Lösungen zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Angabe des größtmöglichen Existenzintervalls.

(a) $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$,

(b) $y' = \frac{y}{t} + t^2$, $y(1) = 2$,

(c) $y' = e^y \sin t$, $y(0) = y_0$, wobei $y_0 \leq -\ln 2$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten das inhomogene lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

i) Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des homogenen Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie weiter die Lösung $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des homogenen Systems mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Bestimmen Sie nun die Lösung $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des inhomogenen Systems (1) mit $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $y \colon I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Weiter betrachten wir das lineare System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

i) Zeigen Sie: Ist (y, z) eine Lösung von (3), so ist y eine Lösung von (2). Ist y eine Lösung von (2), so kann man es auf eindeutige Art zu einer Lösung (y, z) von (3) ergänzen.

ii) Zeigen Sie: die Menge der Lösungen von (2) ist ein Vektorraum und bestimmen Sie dessen Dimension.

iii) Bestimmen Sie im Fall $a^2 \neq 4b$ zwei linear unabhängige Lösungen für (2) mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = \exp(\lambda t)$.

iv) Nun sei $a^2 \neq 4b$ und $a + b \neq -1$. Bestimmen **eine** spezielle Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = \exp(t) \tag{4}$$

mit dem Ansatz $y(t) = c \exp(\lambda t)$. Bestimmen Sie dann die Menge **aller** Lösungen von (4). *Hinweis: Satz 4.14.*