Symplektische Geometrie und klassische Mechanik: Übungen

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Johannes Wittmann
Abgabe am 20.10.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 1

Übungsblatt 1 ist ein freiwilliges Übungsblatt, d.h. die Aufgaben werden nicht bewertet. Ihre Abgabe wird aber dennoch korrigiert und die Aufgaben werden in der Übung nächste Woche besprochen. Auch wenn es keine Punkte gibt, empfehlen wir, die Aufgaben sorgfältig zu bearbeiten.

1. Aufgabe

Wir betrachten die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathrm{grad}V(\mathbf{x}(t))$$

wobei $m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$, $V(x) = f(\|x\|)$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren den Drehimpuls als $\mathbf{L}(t) \coloneqq m\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)$. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, d.h. es gilt $\frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$ für jede Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Newtonschen Bewegungsgleichung.

2. Aufgabe

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Weiter sei $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine antisymmetrische und nicht ausgeartete Bilinearform.[1] Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Basis der Form $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ von V, so dass

$$\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0, \qquad \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}$$

für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$.
Hinweis: Konstruieren Sie zuerst geeignete u_1 und v_1, und betrachten Sie dann

$$V_1 \coloneqq \{x \in V \mid \omega(x, u_1) = \omega(x, v_1) = 0\}.$$

Bemerkung: Insbesondere folgt aus dieser Aufgabe, dass die Dimension von V gerade ist, $\mathrm{dim}V = 2n$.

3. Aufgabe

Auf $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Differentialformen $\alpha \in \Omega^1\mathbb{R}^4$ und $\beta \in \Omega^2\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \alpha &= dx^1 + x_2 dx^2, \\ \beta &= \sin x_2 dx^1 \wedge dx^3 + \cos x_3 dx^2 \wedge dx^4. \end{aligned}$$

(Die dx^i werden wie üblich bezüglich der Karte $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$ gebildet.) Berechnen Sie $\alpha \wedge \beta$ und $d\beta$.

---

[1] Erinnerung: Eine Bilinearform heißt *antisymmetrisch*, falls $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$ für alle $x, y \in V$. Eine Bilinearform heißt *nicht ausgeartet*, falls aus $\omega(x,y) = 0$ für alle $x \in V$ folgt, dass $y = 0$.

4. Aufgabe

Sei $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ die Menge aller 2×2-Matrizen mit Determinante 1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ eine Unter-Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ ist. Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ist.