# Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann
**Abgabe am 10.11.2017 in der Übung**

---

## Übungsblatt 4

**Sie dürfen dieses Blatt und alle zukünftigen Blätter in Gruppen von bis zu maximal zwei Personen abgeben.**

**1. Aufgabe** (4 Punkte).

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir nennen $f$ $C^2$ strikt konvex, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in V \mid f(x) < \infty\}$ ist eine konvexe Teilmenge von $V$,
- $\mathrm{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R})) \neq \varnothing$,
- $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ ist stetig,
- $f|_{\mathrm{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))}$ ist $C^2$,
- $\mathrm{Hess}\, f|_x$ ist positiv definit für alle $x \in \mathrm{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))$.

Zeigen Sie: Ist $f$ $C^2$ strikt konvex, so ist $f$ konvex.

**2. Aufgabe** (4+2 Punkte).

a) Sei $V = \mathbb{R}$, $f : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x < -2 \\ 2|x| - 1 & \text{falls } -2 \leq x \leq -1 \\ |x|, & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f$.

b) Sei $V = \mathbb{R}$, $f : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - |x|^2}, & \text{falls } |x| \leq 1 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f$.

c) (2 Bonuspunkte) Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}$ definiert man die $q$-Norm, $1 < q < \infty$ als

$$\|x\|_q := \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^q \right)^{1/q}.$$

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als $f(x) := \frac{1}{2}\|x\|_q^2$. Zeigen Sie $\mathbb{L}f(p) := \frac{1}{2}\|p\|_r^2$, wobei $r$ Hölder konjugiert[1] zu $q$ ist.
*Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass*

$$\|p\|_r = \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle p, x\rangle}{\|x\|_q}.$$

*Dies ist eine Konsequenz der Hölder-Ungleichung und der assoziierten Gleichheitsdiskussion, siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Hölder's_inequality.*

**3. Aufgabe** (4 Punkte).

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Sei $x \in \operatorname{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))$.

a) Zeigen Sie, dass es mindestens ein $p_0 \in V^*$ gibt, so dass

$$f(y) \geq \langle p_0, y - x\rangle + f(x) \text{ für alle } y \in V. \tag{1}$$

b) Falls $f$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $x$ ist, dann ist $p_0 := df|_x$ der einzige Vektor in $V^*$, der (1) erfüllt.

**4. Aufgabe** (4 Punkte).

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie: Ist $f$ konvex, so ist $f|_{\operatorname{Inn}(f^{-1}(\mathbb{R}))}$ stetig.

[1] „$r$ Hölder konjugiert zu $q$" bedeutet: es gilt $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.