Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 17.11.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V,ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum.[1] Sei $E \subset V$ ein Untervektorraum. Wir definieren *das symplektische orthogonale Komplement (von E in V)* als

$$E^{\perp_\omega} := \{v \in V \mid \omega(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in E\}.$$

Zeigen Sie:

a) E^{ω} ist ein Untervektorraum von V.

b) Es gilt die Dimensionsformel: $\dim E + \dim E^{\perp_\omega} = 2n$.

c) Es gilt $(E^{\perp_\omega})^{\perp_\omega} = E$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei wieder (V,ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum. Ein Untervektorraum $E \subset V$ heißt *isotrop* (*Lagrange, symplektisch*), falls $E \subset E^{\perp_\omega}$ ($E = E^{\perp_\omega}$, $E \cap E^{\perp_\omega} = \{0\}$). Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Untervektorraum $E \subset V$ gilt:

a) E ist isotrop genau dann, wenn $\omega|_{E\times E} \equiv 0$. Insbesondere ist E genau dann Lagrange, wenn $\dim E = n$ und $\omega|_{E\times E} \equiv 0$.

b) E ist symplektisch genau dann, wenn $E^{\perp_\omega}$ symplektisch ist.

c) E ist symplektisch genau dann, wenn $E + E^{\perp_\omega} = V$.

d) E ist symplektisch genau dann, wenn die Bilinearform $\omega|_{E\times E}$ nicht-entartet ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines elektrisch geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(x,v,t) := \frac{1}{2}m\|v\|^2 + e\langle A(x,t), v\rangle - e\phi(x,t).$$

Hierbei sind $m, e \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, v \in \mathbb{R}^3$, $t \in (a,b)$, sowie $A\colon \mathbb{R}^3 \times (a,b) \to \mathbb{R}^3$ und $\phi\colon \mathbb{R}^3 \times (a,b) \to \mathbb{R}$ glatt. Berechnen Sie

a) die zu L gehörende Euler-Lagrange-Gleichung,

b) die zu L gehörende Hamilton-Funktion.

---

[1] Das heißt: V ist ein $2n$-dimensionaler reeller Vektorraum und $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine antisymmetrische nicht-entartete Bilinearform.